Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 254, 1998 г.

В. Н. Дубинин, Л. В. Ковалев

ПРИВЕДЕННЫЙ МОДУЛЬ КОМПЛЕКСНОЙ СФЕРЫ

Введение

Настоящая работа продолжает исследования в [1, 2], посвященные приведенным модулям открытых множеств и их приложениям в теории функций. Пусть B – открытое множество на комплексной сфере $\overline{\mathbb{C}}_z$. Пусть z_l, $l = 1, \dots, m$, – различные точки множества B; δ_l, $l = 1, \dots, m$, – произвольные вещественные числа, не все равные нулю, и пусть μ_l, ν_l, $l = 1, \dots, m$, – произвольные положительные числа. Введем следующие обозначения: $Z = \{z_l\}$, $\Delta = \{\delta_l\}$, $\Psi = \{\psi_l\}$ $\psi_l = \psi_l(r) \equiv \mu_l r^{\nu_l}$, $l = 1, \dots, m$; $E(z_0, r) = \{z : |z - z_0| \leqslant r\}$ в случае конечной точки z_0 и $E(z_0, r) = \{z : |z| \geqslant 1/r\}$ в случае $z_0 = \infty$, $r > 0$. Здесь и ниже, если не оговорено противное, символы $\{\ \}$, $\sum$ и $\prod$ означают соответственно совокупность, суммирование и произведение по всевозможным индексам, указанным в контексте, за исключением тех, при которых слагаемое в $\sum$ либо равно ∞, либо неопределено, а сомножитель в произведении равен либо нулю, либо ∞. При достаточно малом $r > 0$ определен конденсатор

$$C\,(r; B, Z, \Delta, \Psi) = \{\overline{\mathbb{C}}_z \setminus B, E(z_1, \psi_1(r)), \dots, E(z_m, \psi_m(r))\}$$

с предписанными значениями соответственно $0, \delta_1, \dots, \delta_m$. Модулем этого конденсатора называем величину

$$|C\,(r; B, Z, \Delta, \Psi)\,| = \sup \left\{ \iint\limits_{\mathbb{C}_z} |\nabla v|^2 \, dx\, dy \right\}^{-1},$$

где верхняя грань берется по всем вещественнозначным функциям $v(z)$, непрерывным на $\overline{\mathbb{C}}_z$, удовлетворяющим условию Липшица в некоторой окрестности каждой конечной точки и таким, что

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 96-01-00007) и ISSEP (грант s97-336).

$v(z)=0$ в окрестности множества $\overline{\mathbb{C}}_z\setminus B$ и $v(z)=\delta_l$ на $E(z_l,\psi_l(r))$, $l=1,\dots,m$ (здесь $1/0=+\infty$). В работе [1] показано, что если $\overline{\mathbb{C}}_z\setminus B$ имеет положительную гармоническую меру, то справедлива асимптотическая формула

$$|C\,(r;B,Z,\Delta,\Psi)\,|=-\frac{\nu}{2\pi}\log r+M\,(B,Z,\Delta,\Psi)+o(1)\,,\ r\to 0,\qquad(1)$$

где

$$M\,(B,Z,\Delta,\Psi)=\frac{\nu^2}{2\pi}\left\{\sum\frac{\delta_l^2}{\nu_l^2}\log\frac{r(B_l,z_l)}{\mu_l}+\sum\frac{\delta_l\delta_k}{\nu_l\nu_k}g_{B_l}(z_l,z_k)\right\},$$

$\nu=\left(\sum\delta_l^2\nu_l^{-1}\right)^{-1}$, B_l – связная компонента множества B, содержащая точку z_l, $r(B_l,z_l)$ – ее внутренний радиус относительно z_l и $g_{B_l}(z,\zeta)$ – функция Грина области B_l, $l=1,\dots,m$. Величину $M\,(B,Z,\Delta,\Psi)$ мы называем приведенным модулем множества B относительно совокупностей Z, Δ и Ψ. Заметим, что в [1] формула (1) была доказана в предположении, что все $\delta_l\neq 0$, $l=1,\dots,m$. При этом предельным переходом можно убедиться в справедливости ее для всех вещественных δ_l, хотя бы одно из которых отлично от нуля. Действительно, пусть $\delta_l\neq 0$ для $l=1,\dots,n$ и $\delta_l=0$, $l=n+1,\dots,m$. Обозначим

$$B_\rho=B\setminus\bigcup_{l=n+1}^{m}E(z_l,\psi_l(\rho)),\quad Z'=\{z_l\}_{l=1}^n,\quad \Delta'=\{\delta_l\}_{l=1}^n\quad \Psi'=\{\psi_l\}_{l=1}^n.$$

Из определения модуля для всех $r<\rho$ выполняется

$$|C\,(r;B,Z',\Delta',\Psi')\,|\geqslant|C\,(r;B,Z,\Delta,\Psi)\,|\geqslant|C\,(r;B_\rho,Z',\Delta',\Psi')\,|$$

При $r\to 0$ получаем

$$M\,(B,Z',\Delta',\Psi')\geqslant M\,(B,Z,\Delta,\Psi)\geqslant M\,(B_\rho,Z',\Delta',\Psi')$$

для всех достаточно малых ρ. Таким образом,

$$M\,(B,Z,\Delta,\Psi)=M\,(B,Z',\Delta',\Psi')\,.$$

Одна из задач настоящей работы – изучить асимптотику модуля конденсатора $C\,(r;B,Z,\Delta,\Psi)$ для множеств B, дополнение которых имеет гармоническую меру нуль. Ввиду известных свойств решения обобщенной задачи Дирихле [3] эта ситуация равносильна случаю $B = \overline{\mathbb{C}}_z$, поэтому в дальнейшем мы рассматриваем конденсаторы

$$C\,(r; Z, \Delta, \Psi) \stackrel{\text{def}}{=} \{E(z_1, \psi_1(r)), \ldots, E(z_m, \psi_m(r))\}.$$

Во втором параграфе даются некоторые приложения в геометрической теории функций, связанные прежде всего со свойством монотонности приведенных модулей и симметризационными преобразованиями [4].

§1. Определение и основные свойства

Пусть Z, Δ, Ψ и ν те же как и выше. Предположим, что существует конечный предел

$$M\,(Z, \Delta, \Psi) = \lim_{r \to 0} \left(|C\,(r; Z, \Delta, \Psi)| + \frac{\nu}{2\pi} \log r \right).$$

Тогда этот предел назовем приведенным модулем комплексной сферы $\overline{\mathbb{C}}_z$ относительно совокупностей Z, Δ и Ψ. Нетрудно показать, что в определении приведенного модуля круги $E(z_l, \psi_l(r))$ можно заменить на “почти круги” с центром в z_l того же радиуса (см. лемму 1 работы [1]). Полагая в формуле (1) $B = \{\, z : |z| < R\}$ и переходя к пределу при $R \to \infty$, получим формулу для приведенного модуля относительно совокупности конечных точек. Однако обоснование условия коммутирования двух предельных переходов требует не меньше усилий, чем прямое доказательство формулы, к которому мы и приступаем.

Теорема 1. *Для любых совокупностей* $Z = \{z_l\}$, $\Delta = \{\delta_l\}$ *и* $\Psi = \{\mu_l r^{\nu_l}\}$, *удовлетворяющих условиям* $\sum(\delta_l/\nu_l) = 0$, $\sum \delta_l^2 \neq 0$, *приведенный модуль комплексной сферы существует и справедлива следующая формула:*

$$M\,(Z, \Delta, \Psi) = \frac{\nu^2}{2\pi} \left(-\sum \frac{\delta_l^2}{\nu_l^2} \log \mu_l - \sum \frac{\delta_l \delta_k}{\nu_l \nu_k} \log |z_l - z_k| \right), \qquad (2)$$

где $\nu = \left(\sum \delta_l^2 \nu_l^{-1}\right)^{-1}$.

Доказательство. Приведем сначала несколько замечаний. Во-первых, можно считать, что $\delta_1 \neq 0$. Во-вторых, формулу (2) достаточно доказать для случая, когда $z_1 = \infty$. Действительно, при конечном z_1 отображение $z \mapsto (z-z_1)^{-1}$ переводит конденсатор $C\,(r; Z, \Delta, \Psi)$ в конденсатор $C\,(r; Z', \Delta', \Psi')$, пластины которого представляют собой "почти круги" с параметрами

$$z'_1 = \infty, \quad z'_l = 1/(z_l - z_1), \quad l = 2, \ldots, m;$$

$$\delta'_l = \delta_l, \quad \nu'_l = \nu_l, \quad l = 1, \ldots, m;$$

$$\mu'_1 = \mu_1, \quad \mu'_l = \mu_l/|z_l - z_1|^2, \quad l = 2, \ldots, m;$$

$$Z' = \{z'_l\}, \quad \Delta' = \{\delta'_l\}, \quad \Psi' = \{\mu'_l r^{\nu'_l}\}.$$

Ввиду конформной инвариантности модуля после несложных вычислений с учетом равенства $\sum(\delta_l/\nu_l) = 0$ имеем

$$M\,(Z, \Delta, \Psi) = M\,(Z', \Delta', \Psi') =$$

$$= \frac{\nu^2}{2\pi}\left(-\sum \frac{\delta_l^2}{\nu_l^2} \log \mu'_l - \sum \frac{\delta_l \delta_k}{\nu_l \nu_k} \log |z'_l - z'_k| \right) =$$

$$= \frac{\nu^2}{2\pi}\left(-\sum \frac{\delta_l^2}{\nu_l^2} \log \mu_l - \sum \frac{\delta_l \delta_k}{\nu_l \nu_k} \log |z_l - z_k| \right).$$

Далее, при указанных предположениях можно считать, что выполняется условие

$$\sum \frac{\delta_l}{\nu_l^2} \log \mu_l + \sum \frac{\delta_l}{\nu_l \nu_k} \log |z_l - z_k| = 0. \tag{3}$$

В противном случае наряду с конденсатором $C\,(r; Z, \Delta, \Psi)$ рассмотрим его образ при отображении $z \mapsto az$, где

$$a = \exp\left\{ \left(\sum \frac{\delta_l}{\nu_l^2} \log \mu_l + \sum \frac{\delta_l}{\nu_l \nu_k} \log |z_l - z_k| \right) \Big/ \left(\frac{\delta_1}{\nu_1} \sum \frac{1}{\nu_l} \right) \right\}.$$

Полученный конденсатор $C\,(r; Z', \Delta', \Psi')$ с параметрами

$$z'_l = az_l, \quad \delta'_l = \delta_l, \quad \nu'_l = \nu_l, \quad l = 1, \ldots, m;$$

$$\mu'_1 = \mu_1/a, \quad \mu'_l = a\mu_l, \quad l = 2, \ldots, m,$$

удовлетворяет условию (3), причем

$$M\,(Z, \Delta, \Psi) = M\,(Z', \Delta', \Psi') =$$

$$= \frac{\nu^2}{2\pi}\left(-\sum \frac{\delta_l^2}{\nu_l^2} \log \mu'_l - \sum \frac{\delta_l \delta_k}{\nu_l \nu_k} \log |z'_l - z'_k| \right) =$$

$$= \frac{\nu^2}{2\pi}\Bigg(-\sum \frac{\delta_l^2}{\nu_l^2}\log\mu_l - \sum \frac{\delta_l\delta_k}{\nu_l\nu_k}\log|z_l - z_k| -$$

$$-\Bigg(\sum_{l\neq 1}\frac{\delta_l^2}{\nu_l^2} - \frac{\delta_1^2}{\nu_1^2} + \sum_{\substack{l\neq k\\ l,k\neq 1}}\frac{\delta_l\delta_k}{\nu_l\nu_k}\Bigg)\log a\Bigg) =$$

$$= -\frac{\nu^2}{2\pi}\left(-\sum \frac{\delta_l^2}{\nu_l^2}\log\mu_l - \sum \frac{\delta_l\delta_k}{\nu_l\nu_k}\log|z_l - z_k|\right).$$

Итак, всюду ниже предполагается, что $z_1 = \infty$, $\delta_1 \neq 0$ и выполняется условие (3). Заметим, что при данных предположениях имеет место асимптотическое равенство

$$\sum_{l\neq 1}\frac{\delta_l}{\log\psi_l} - \sum \frac{\delta_l \log|z_l - z_k|}{\log\psi_l \log\psi_k} =$$

$$= -\frac{\delta_1}{\nu_1}(\log r)^{-1} + \frac{\delta_1}{\nu_1^2}\log\mu_1(\log r)^{-2} + o\left((\log r)^{-2}\right). \qquad (4)$$

Приступим теперь к непосредственному доказательству формулы (2) (ср. [1, с. 59–61]). Пусть $\delta_l \neq 0$ при всех $l = 1,\ldots,m$. Введем вспомогательную функцию

$$g(z) = \sum \delta_l \frac{\log|z - z_l|}{\log\psi_l} - \sum \frac{\delta_l}{\log\psi_l}\frac{\log|z_l - z_k|}{\log\psi_k}\log|z - z_k|$$

и положим $\widetilde{E}(z_l, r) = \{\, z \in E(z_l, \psi_l(2r)) : g(z)/\delta_l \geqslant 1 \,\}$, $l = 1,\ldots,m$. Для точек z множества $\widetilde{E}(z_l, r)$, в которых $g(z) = \delta_l$, в случае $l > 1$ имеем

$$\delta_l = \frac{\log|z - z_l|}{\log\psi_l}\left\{\delta_l - \sum \frac{\delta_k \log|z_l - z_k|}{\log\psi_k}\right\} + o(1) =$$

$$= \frac{\log|z - z_l|}{\log\psi_l}(\delta_l + o(1)),\ r \to 0,$$

откуда $\dfrac{\log|z - z_l|}{\log\psi_l} = 1 + o(1)$. С учетом последнего равенства имеем

$$\delta_l = \frac{\delta_l \log|z - z_l|}{\log\psi_l} + \sum \frac{\delta_k \log|z_k - z_l|}{\log\psi_k} -$$

$$-\sum \frac{\delta_k \log|z_k - z_l|}{\log\psi_k} + o\left((\log r)^{-1}\right) = \frac{\delta_l \log|z - z_l|}{\log\psi_l} + o\left((\log r)^{-1}\right).$$

Следовательно, на границе множества $\widetilde{E}(z_l,r)$ выполняется $|z-z_l|\sim\psi_l$, $r\to 0$. В случае $l=1$ с учетом (4) имеем

$$\delta_1=\log|z|\left\{\sum_{l\neq 1}\frac{\delta_l}{\log\psi_l}-\sum\frac{\delta_l}{\log\psi_l}\frac{\log|z_l-z_k|}{\log\psi_k}\right\}+o\left((\log r)^{-1}\right)=$$

$$=\frac{\log|z|}{\log r}\left\{-\frac{\delta_1}{\nu_1}+\frac{\delta_1}{\nu_1^2}\log\mu_1(\log r)^{-1}+o\left((\log r)^{-1}\right)\right\}+o\left((\log r)^{-1}\right).$$

Отсюда $|z|\sim 1/\psi_1$, $r\to 0$ на границе $\widetilde{E}(z_1,r)$. Таким образом, множества $\widetilde{E}(z_l,r)$ представляют собой "почти круги", и мы можем в определении приведенного модуля конденсатор $C(r;Z,\Delta,\Psi)$ заменить на конденсатор $\widetilde{C}(r;Z,\Delta,\Psi)\overset{\mathrm{def}}{=}\{\widetilde{E}(z_1,r),\ldots,\widetilde{E}(z_m,r)\}$. Функция $g(z)$ совпадает в поле конденсатора $\widetilde{C}(r)$ с его потенциальной функцией. Применяя принцип Дирихле, формулу Грина и равенство (4), после несложных преобразований получаем

$$|\widetilde{C}(r)|^{-1}=\iint\limits_{\mathbb{C}_z\setminus\bigcup\limits_1^m\widetilde{E}(z_l,r)}|\nabla g|^2\,dx\,dy=-\sum\int\limits_{\partial\widetilde{E}(z_l,r)}\delta_l\frac{\partial g}{\partial n}\,ds=$$

$$=-2\pi\sum_{l\neq 1}\delta_l\left(\frac{\delta_l}{\log\psi_l}-\sum\frac{\delta_k}{\log\psi_k}\frac{\log|z_k-z_l|}{\log\psi_l}\right)+$$

$$+2\pi\delta_1\left(\sum_{l\neq 1}\frac{\delta_l}{\log\psi_l}-\sum\frac{\delta_l\log|z_k-z_l|}{\log\psi_l\log\psi_k}\right)=-\frac{2\pi}{\log r}\sum\frac{\delta_l^2}{\nu_l}+$$

$$+\frac{2\pi}{(\log r)^2}\left(\sum\frac{\delta_l^2}{\nu_l^2}\log\mu_l+\sum\frac{\delta_l\delta_k}{\nu_l\nu_k}\log|z_l-z_k|\right)+o\left((\log r)^{-2}\right).$$

Поэтому

$$|\widetilde{C}(r)|=-\frac{\nu}{2\pi}\log r+\frac{\nu^2}{2\pi}\left\{-\sum\frac{\delta_l^2}{\nu_l^2}\log\mu_l-\sum\frac{\delta_l\delta_k}{\nu_l\nu_k}\log|z_l-z_k|\right\}+o(1),$$

и формула (2) доказана.

Наконец, рассмотрим общий случай: $\delta_l\neq 0$ при $l=1,\ldots,n$; $\delta_l=0$, $l=n+1,\ldots,m$ $(n\leqslant m)$. Положим

$$Z_n=\{z_1,\ldots,z_n\},\quad \Delta_n=\{\delta_1,\ldots,\delta_n\},\quad \Psi_n=\{\psi_1,\ldots,\psi_n\}.$$

Функция $g(z)$, построенная как и выше, но по параметрам Z_n, Δ_n, Ψ_n, совпадает с потенциальной функцией конденсатора $\widetilde{C}_n(r) \stackrel{\text{def}}{=} \{\widetilde{E}(z_1, r), \ldots, \widetilde{E}(z_n, r)\}$. Осталось показать, что

$$M\left(Z, \Delta, \Psi\right) = M\left(Z_n, \Delta_n, \Psi_n\right).$$

При достаточно малом $R > 0$ множества $E(z_k, R)$, $k = 1, \ldots, m$ не пересекаются. Для $k = n+1, \ldots, m$ положим $M_k = \max\{|g(z)| : z \in E(z_k, R)\}$. Из определения $g(z)$ следует $M_k = O\left((\log r)^{-1}\right)$. Введем вспомогательные функции

$$f_k(z) = M_k \log\left|\frac{z - z_k}{\psi_k}\right| \Big/ \log\left(\frac{R}{\psi_k}\right), z \in E(z_k, R) \setminus E(z_k, \psi_k), k > n.$$

При малых r функция

$$h(z) = \\ = \begin{cases} g(z), & z \notin \bigcup_{k=n+1}^m E(z_k, R), \\ \max\{\min\{g(z), f_k(z)\}, -f_k(z)\}, & z \in E(z_k, R) \setminus E(z_k, \psi_k), k > n, \\ 0, & z \in E(z_k, \psi_k), k > n \end{cases}$$

является допустимой для конденсатора

$$\widetilde{C}'(r) \stackrel{\text{def}}{=} \{\widetilde{E}(z_1, r), \ldots, \widetilde{E}(z_n, r), E(z_{n+1}, \psi_{n+1}), \ldots, E(z_m, \psi_m)\}.$$

Из оценки

$$|\widetilde{C}_n(r)|^{-1} \leqslant |\widetilde{C}'(r)|^{-1} \leqslant \iint\limits_{\mathbb{C}_z \setminus \bigcup\limits_1^n \widetilde{E}(z_l, r)} |\nabla h|^2 \, dx\, dy \leqslant$$

$$\leqslant \iint\limits_{\mathbb{C}_z \setminus \bigcup\limits_1^n \widetilde{E}(z_l, r)} |\nabla g|^2 \, dx\, dy + \sum_{l=n+1}^m \iint\limits_{E(z_l, R) \setminus E(z_l, \psi_l) \bigcup\limits_1^n} |\nabla f_l|^2 \, dx\, dy =$$

$$= |\widetilde{C}_n(r)|^{-1} + o\left((\log r)^{-2}\right)$$

сразу следует требуемый результат. Теорема доказана.

Следующие теоремы устанавливают связь между приведенными модулями комплексной сферы и ее подмножеств.

Теорема 2. *Пусть B_k, $k = 1, \ldots, n$, – открытые, попарно непересекающиеся множества на сфере $\overline{\mathbb{C}}_z$, и пусть z_{kl}, $z_{kl} \in B_k$, $l = 1, \ldots, m_k$, – различные точки этих множеств, $Z_k = \{z_{kl}\}_{l=1}^{m_k}$, $k = 1, \ldots, n$. Предположим, что совокупности $\Delta_k = \{\delta_{kl}\}_{l=1}^{m_k}$ и $\Psi_k = \{\mu_{kl} r^{\nu_{kl}}\}_{l=1}^{m_k}$ удовлетворяют следующим условиям: $\sum\limits_{l=1}^{m_k} \delta_{kl}^2 \neq 0$, $k = 1, \ldots, n$, $\sum(\delta_{kl}/\nu_{kl}) = 0$. Тогда*

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{l=1}^{m_k} \delta_{kl}^2/\nu_{kl} \right)^2 M\left(B_k, Z_k, \Delta_k, \Psi_k\right) \leqslant \left(\sum \delta_{kl}^2/\nu_{kl} \right)^2 M\left(Z, \Delta, \Psi\right),$$

где $Z = \{z_{kl}\}$, $\Delta = \{\delta_{kl}\}$ и $\Psi = \{\mu_{kl} r^{\nu_{kl}}\}$.

Доказательство. Введем обозначения

$$\nu_k = \left(\sum_{l=1}^{m_k} \delta_{kl}^2/\nu_{kl} \right)^{-1}, \quad k = 1, \ldots, n, \quad \nu = \left(\sum \delta_{kl}^2/\nu_{kl} \right)^{-1}.$$

В условиях теоремы 2 приведенные модули существуют и согласно их определению имеем

$$|C\left(r; B_k, Z_k, \Delta_k, \Psi_k\right)|^{-1} =$$
$$= -\left(\frac{2\pi}{\nu_k \log r} \right) - M\left(B_k, Z_k, \Delta_k, \Psi_k\right) \left(\frac{2\pi}{\nu_k \log r} \right)^2 + o\left(\left(\frac{1}{\log r} \right)^2 \right),$$
$$r \to 0, \quad k = 1, \ldots, n,$$

$$|C\left(r; Z, \Delta, \Psi\right)|^{-1} =$$
$$= -\left(\frac{2\pi}{\nu \log r} \right) - M\left(Z, \Delta, \Psi\right) \left(\frac{2\pi}{\nu \log r} \right)^2 + o\left(\left(\frac{1}{\log r} \right)^2 \right), \ r \to 0.$$

С другой стороны, из определения модулей легко следует неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} |C\left(r; B_k, Z_k, \Delta_k, \Psi_k\right)|^{-1} \geqslant |C\left(r; Z, \Delta, \Psi\right)|^{-1}.$$

Осталось суммировать выписанные соотношения, сократить особенности и перейти к пределу при $r \to 0$. Теорема доказана.

Отметим частный случай этой теоремы при $n = 1$: для произвольного открытого множества B и совокупностей $Z = \{z_l\}$,

$\Delta = \{\delta_l\}$ и $\Psi = \{\mu_l r^{\nu_l}\}$, удовлетворяющих условиям $\sum \delta_l^2 \neq 0$, $\sum(\delta_l/\nu_l) = 0$, справедливо неравенство

$$M\,(B, Z, \Delta, \Psi) \leqslant M\,(Z, \Delta, \Psi)\,. \tag{5}$$

Это неравенство мы будем рассматривать как частный случай монотонности приведенного модуля (см. [1, с. 58]).

Теорема 3. *Если совокупности* $Z = \{z_l\}$, $\Delta = \{\delta_l\}$ *и* $\Psi = \{\mu_l r^{\nu_l}\}$ *удовлетворяют условиям* $\sum(\delta_l/\nu_l) = 0$, $\sum \delta_l^2 \neq 0$, *то для любого вещественного числа* a *выполняется равенство*

$$M\,(B(a), Z, \Delta, \Psi) = M\,(Z, \Delta, \Psi)\,,$$

где $B(a) = \{\, z : \sum(\delta_l/\nu_l)\log|z - z_l| \neq a\,\}$.

Доказательство. Зафиксируем вещественное число a. Обозначим через B_l связную компоненту множества $B(a)$, содержащую точку z_l (при такой нумерации одна компонента может иметь несколько обозначений). Применяя обобщенный принцип максимума к функции

$$a - \sum(\delta_l/\nu_l)\log|z - z_l| - \sum(\delta_l/\nu_l) g_{B_l}(z, z_l)$$

в каждой области B_l, находим

$$a - \sum(\delta_l/\nu_l)\log|z - z_l| \equiv \sum(\delta_l/\nu_l) g_{B_l}(z, z_l) \quad \text{в} \quad B(a).$$

Прибавляя к обеим частям $(\delta_k/\nu_k)\log|z - z_k|$ и переходя к пределу при $z \to z_k$, получаем

$$a - \sum_l \frac{\delta_l}{\nu_l}\log|z_k - z_l| = \frac{\delta_k}{\nu_k}\log r(B_k, z_k) + \sum_l \frac{\delta_l}{\nu_l} g_{B_l}(z_k, z_l).$$

Отсюда

$$-\sum \frac{\delta_k^2}{\nu_k^2}\log\mu_k - \sum \frac{\delta_k\delta_l}{\nu_k\nu_l}\log|z_k - z_l| =$$
$$= \sum \frac{\delta_k^2}{\nu_k^2}\log\frac{r(B_k, z_k)}{\mu_k} + \sum \frac{\delta_k\delta_l}{\nu_k\nu_l} g_{B_l}(z_k, z_l).$$

Осталось воспользоваться формулами (1) и (2). Теорема доказана.

Приведем теперь результат о поведении приведенного модуля при отображении рациональной функцией.

Теорема 4. *Пусть* $W = \{w_l\}$, $\Delta = \{\delta_l\}$ *и* $\Psi = \{\mu_l r^{\nu_l}\}$ – *произвольные совокупности, удовлетворяющие условиям* $\sum(\delta_l/\nu_l) = 0$, $\sum \delta_l^2 \neq 0$. *Пусть* $w = R(z)$ – *рациональная функция степени* $p \geqslant 1$, *и в окрестностях точек* z_{kl}, *прообразов* w_l *при отображении* $w = R(z)$, *имеют место разложения*

$$R(z) - w_l = a_{kl}(z - z_{kl})^{p_{kl}} + o\left((z - z_{kl})^{p_{kl}}\right), z \to z_{kl},$$

$$k = 1, \ldots, m_l, \quad l = 1, \ldots, m,$$

где $\sum\limits_{k=1}^{m_l} p_{kl} = p$, $l = 1, \ldots, m$ *(в случае* $z_{kl} = \infty$ $(w_l = \infty)$ *величину* $z - z_{kl}$ $(R(z) - w_l)$ *необходимо заменить на* $1/z$ $(1/R(z))$*). Тогда*

$$M\left(W, \Delta, \Psi\right) = pM\left(Z_R, \Delta_R, \Psi_R\right),$$

где $Z_R = \{z_{kl}\}$, $\Delta_R = \{\delta_{kl}\}$, $\delta_{kl} = \delta_l$, $k = 1, \ldots, m_l$; $l = 1, \ldots, m$, $\Psi_R = \{\mu_{kl} r^{\nu_{kl}}\}$, $\mu_{kl} = (\mu_l/|a_{kl}|)^{1/p_{kl}}$, $\nu_{kl} = \nu_l/p_{kl}$, $k = 1, \ldots, m_l$; $l = 1, \ldots, m$.

Доказательство. Отметим прежде всего, что

$$\sum \delta_{kl}^2 \neq 0, \quad \sum(\delta_{kl}/\nu_{kl}) = p\sum(\delta_l/\nu_l) = 0,$$

так что приведенный модуль $M\left(Z_R, \Delta_R, \Psi_R\right)$ существует. Обозначим через $\widetilde{C}(r)$ прообраз конденсатора $C\left(r; W, \Delta, \Psi\right)$ при отображении $w = R(z)$. Нетрудно видеть, что пластины конденсатора $\widetilde{C}(r)$ представляют собой "почти круги" с центрами в точках z_{kl} и радиусов соответственно $\mu_{kl} r^{\nu_{kl}}$, $k = 1, \ldots, m_l$; $l = 1, \ldots, m$. Так как отображение $w = R(z)$ осуществляет полное p-кратное накрытие сферы $\overline{\mathbb{C}}_w$, то

$$p|\widetilde{C}(r)| = |C\left(r; W, \Delta, \Psi\right)|.$$

Отсюда

$$p\left\{\frac{1}{2\pi}\left(\sum(\delta_{kl}^2/\nu_{kl})\right)^{-1}\log r + |\widetilde{C}(r)|\right\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\sum(\delta_l^2/\nu_l)\right)^{-1}\log r + |C\left(r; W, \Delta, \Psi\right)|,$$

и требуемое равенство получается предельным переходом при $r \to 0$.

В заключение отметим, что из определения приведенного модуля множества и сферы и известных свойств модулей конденсаторов вытекают результаты о поведении приведенных модулей при различных типах симметризационных преобразований. Например, теоремы 1.8 и 1.10 работы [4] для емкостей конденсаторов (т.е. для величин, обратных модулю) почти дословно переносятся на случай конденсаторов с несколькими пластинами. Отсюда стандартным путем получаем результаты о поведении приведенных модулей при разделяющем преобразовании и диссимметризации [4].

§2. Приложения

Введение приведенного модуля сферы позволяет избежать дополнительного предельного перехода в ряде доказательств (см., например, [1, с. 64–68]). Мы не будем здесь останавливаться на этом и ограничимся приложениями элементарного характера. Начнем с теорем, которые восходят по существу к задачам об экстремальном разбиении [5, §4.5 и §§5.9–5.11].

Теорема 5. *Пусть $B \subset \overline{\mathbb{C}}_z$ – открытое множество, дополнение которого имеет ненулевую гармоническую меру. Если B содержит некоторые точки z_k, $k = 1, \ldots, 2n$, расположенные на окружности $|z| = 1$ в порядке возрастания индекса k, то выполняется неравенство*

$$\left[\prod r(B, z_k)\right] \prod \exp\left[(-1)^{k+l} g_B(z_k, z_l)\right] \leqslant (2/n)^{2n},$$

где $r(B, z)$ означает внутренний радиус связной компоненты множества B, содержащей точку z, а $g_B(z, \zeta)$ – функция Грина такой компоненты. Знак равенства достигается, например, для точек $z_k^* = \exp\left(i(\pi/2n + \pi(k-1)/n)\right)$ и множества $B^* = \{\, z : \pi(k-1)/n < \arg z < \pi k/n, k = 1, \ldots, 2n \,\}$.

Доказательство. Введем обозначения

$$Z = \{z_k\}, \quad \Delta = \{\delta_k\}, \quad \delta_{2l-1} = 1, \quad \delta_{2l} = -1,$$

$$l = 1, \ldots, n, \quad \Psi = \{\mu_k r^{\nu_k}\}, \quad \mu_k = \nu_k = 1, \quad k = 1, \ldots, 2n,$$

и рассмотрим конденсатор $C(r; B, Z, \Delta, \Psi)$, где $r > 0$ достаточно мало. Пусть функция $\zeta = p_k(z) \equiv -i(z/z_k)^{\pi/\varphi_k}$ конформно и однолистно отображает угол, образованный лучами Oz_k и Oz_{k+1}, на правую полуплоскость, $k = 1, \ldots, 2n$ ($z_{2n+1} = z_1$). Пусть $\{C_k(r)\}$ – результат разделяющего преобразования конденсатора $C(r; B, Z, \Delta, \Psi)$ относительно семейства функций $\{p_k\}$ и пусть

$\widetilde{C}_k(r)$ – конденсатор, полученный из $C_k(r)$ отбрасыванием первой пластины, $k=1,\ldots,2n$. Теорема 1.8 работы [4] дает

$$|C\,(r;B,Z,\Delta,\Psi)\,|^{-1} \geqslant \frac{1}{2}\sum|C_k(r)|^{-1} \geqslant \frac{1}{2}\sum|\widetilde{C}_k(r)|^{-1}. \qquad (6)$$

Легко видеть, что пластины конденсатора $\widetilde{C}_k(r)$ представляют собой "почти круги" с центрами в точках $\pm i$ радиуса $(\pi/\varphi_k)r$. Таким образом, конденсатор $\widetilde{C}_k(r)$ определяет приведенный модуль

$$M_k \stackrel{\text{def}}{=} M\left(\{-i,i\},\{(-1)^{k-1},(-1)^k\},\{(\pi/\varphi_k)r,(\pi/\varphi_k)r\}\right),\ k=1,\ldots,2n.$$

По определению приведенных модулей,

$$|\widetilde{C}_k(r)|^{-1} = -\frac{4\pi}{\log r} - M_k\left(\frac{4\pi}{\log r}\right)^2 + o\left(\left(\frac{1}{\log r}\right)^2\right),\, r\to 0, k=1,\ldots,2n,$$

$$|C\,(r;B,Z,\Delta,\Psi)\,|^{-1} = \\ = -\frac{4\pi n}{\log r} - M\,(B,Z,\Delta,\Psi)\left(\frac{4\pi n}{\log r}\right)^2 + o\left(\left(\frac{1}{\log r}\right)^2\right),\ r\to 0.$$

Подставляя эти соотношения в (6), получаем

$$(2n)^2 M\,(B,Z,\Delta,\Psi) \leqslant 2\sum M_k. \qquad (7)$$

Перепишем теперь неравенство (7) с учетом формул (1)–(2) и воспользуемся неравенством между средним геометрическим и средним арифметическим:

$$\sum \log r(B,z_k) + \sum(-1)^{k+l} g_B(z_k,z_l) \leqslant \sum \log\frac{2\varphi_k}{\pi} \leqslant \log(2/n)^{2n}.$$

Осталось заметить, что для множества B^* и симметричной совокупности точек $\{z_k^*\}$ в (6) и (7) имеет место знак равенства. Теорема доказана.

Полагая в теореме 5 $B=\bigcup D_k$, где D_k, $k=1,\ldots,n$, – неналегающие области и $z_{2k-1},z_{2k}\in D_k$, $k=1,\ldots,n$, получим теорему 6 работы [1]. Если же B есть объединение $2n$ попарно непересекающихся областей D_k, $z_k\in D_k$, $k=1,\ldots,2n$, то мы имеем частный случай неравенства 2.9 [4] (см. также [6, с. 97]).

Теорема 6. *Пусть функции $w = f(z)$ и $w = g(z)$ конформно и однолистно отображают круг $U = \{z : |z| < 1\}$ на неналегающие области. Пусть δ_k, $k = 1,\dots,n$, – произвольные вещественные числа, не все равные нулю, и пусть z_k, $k = 1,\dots,n$, – произвольные точки круга U, отличные от полюсов функций $f(z)$ и $g(z)$. Тогда*

$$\prod \left|f'(z_k)g'(z_k)\right|^{\delta_k^2} \frac{\prod \left|1-\bar{z}_k z_l\right|^{2\delta_k\delta_l}}{\prod \left|z_k - z_l\right|^{2\delta_k\delta_l}} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\prod \left|f(z_k)-g(z_l)\right|^{2\delta_k\delta_l}}{\prod \left|(f(z_k)-f(z_l))(g(z_k)-g(z_l))\right|^{\delta_k\delta_l}}.$$

Знак равенства достигается для функций $f(z)$ и $g(z)$, отображающих круг U на дополнительные полуплоскости так, что точки z_k переходят в симметричные точки $f(z_k)$ и $g(z_k)$ относительно общей границы этих полуплоскостей.

Доказательство. Положим

$$B_1 = f(U), \quad B_2 = g(U), \quad w_{1k} = f(z_k), \quad w_{2k} = g(z_k),$$
$$k = 1,\dots,n, \quad W_1 = \{w_{1k}\}, \quad W_2 = \{w_{2k}\};$$
$$\Delta_1 = \{\delta_{1k}\}, \quad \Delta_2 = \{\delta_{2k}\}, \quad \delta_{1k} = \delta_k, \quad \delta_{2k} = -\delta_k, \quad k = 1,\dots,n;$$
$$\Psi_i = \{\mu_{ik} r^{\nu_{ik}}\}, \quad \mu_{ik} = \nu_{ik} = 1, \quad k = 1,\dots,n, \quad i = 1,2.$$

Из теоремы 2 следует

$$\left(\sum \delta_k^2\right)^2 \sum M\left(B_i, W_i, \Delta_i, \Psi_i\right) \leqslant \left(2\sum \delta_k^2\right)^2 M\left(W, \Delta, \Psi\right),$$

где $W = \{w_{ik}\}$, $\Delta = \{\delta_{ik}\}$, $\Psi = \{\mu_{ik} r^{\nu_{ik}}\}$. Выписывая значения приведенных модулей по формулам (1)–(2) и пользуясь известными соотношениями:

$$r(B_1, w_{1k}) = (1-|z_k|^2)|f'(z_k)|, \quad r(B_2, w_{2k}) = (1-|z_k|^2)|g'(z_k)|,$$
$$g_{B_1}(w_{1k}, w_{1l}) = \log\left|\frac{1-\bar{z}_k z_l}{z_k - z_l}\right| = g_{B_2}(w_{2k}, w_{2l}), \quad k = 1,\dots,n,$$

получим в итоге требуемое неравенство. Теорема доказана.

В случае $n = 1$ теорема 6 совпадает с классическим результатом М. А. Лаврентьева [7]. Выбирая в теореме 2 подходящим образом множества B_k, а также совокупности точек и чисел, можно получить и другие известные теоремы о неналегающих областях. Например, известный результат П. П. Куфарева [8] сразу вытекает из теоремы 2, если ее применить к объединению четырех неналегающих областей, две из которых лежат в круге $|z| < R$, а две другие симметричны им относительно окружности $|z| = R$ $(n = 1)$. При этом параметры μ_{1l}, ν_{1l} и $|\delta_{1l}|$ необходимо взять равными единице, а знак δ_{1l} чередовать подходящим образом.

Применяя теорему 1, разделяющее преобразование или диссимметризацию [4], можно получить различные неравенства для комплексных чисел. Рассмотрим в качестве примера следующий результат (см. также [1, с. 64–67]).

Теорема 7. *Если точки z_k, $k = 1, \ldots, 2n$, расположены на окружности $|z| = 1$ в порядке возрастания индекса k, то справедливо неравенство*

$$\prod |z_k - z_l|^{(-1)^{k+l}} \geqslant (n/2)^{2n}.$$

Знак равенства достигается для симметрично расположенных точек z_k.

Доказательство повторяет слово в слово доказательство теоремы 5 с той лишь разницей, что конденсатор $C\,(r; B, Z, \Delta, \Psi)$ необходимо заменить на конденсатор $C\,(r; Z, \Delta, \Psi)$, а $M\,(B, Z, \Delta, \Psi)$ на $M\,(Z, \Delta, \Psi)$ и $\widetilde{C}_k(r) = C_k(r)$, $k = 1, \ldots, 2n$. Получив при этом неравенство (6), нам достаточно воспользоваться в дальнейшем лишь формулой (2).

Наш подход приводит также к теоремам искажения для однолистных функций. В дополнение к известным результатам приведем здесь две грубые оценки (ср. [9–10]).

Теорема 8. *Для функций $F(z)$ класса Σ при любых z_k, $k = 1, \ldots, n$, на окружности $|z| = \rho$, $\rho > 1$, имеем оценку:*

$$\left|\prod F'(z_k)\right| \prod |F(z_k) - F(z_l)| \leqslant \left(\frac{n\rho^{3n-1}}{\rho^{2n} - 1}\right)^n.$$

Доказательство. Желая применить свойство монотонности приведенного модуля (см. неравенство (5)), положим

$$B = F\left(\overline{\mathbb{C}}_z \setminus \overline{U}\right), \quad W = \{w_k\}, \quad w_k = F(z_k), \quad k = 1, \ldots, n, \quad w_{n+1} = \infty;$$

$$\Delta = \{\delta_k\}, \quad \delta_k = 1, \quad k = 1, \dots, n, \quad \delta_{n+1} = -n;$$

$$\Psi = \{\mu_k r^{\nu_k}\}, \quad \mu_k = \nu_k = 1, \quad k = 1, \dots, n+1.$$

Из монотонности следует

$$M\,(B, W, \Delta, \Psi) \leqslant M\,(W, \Delta, \Psi)\,.$$

Пользуясь формулами (1)–(2), перепишем это неравенство в виде

$$\rho^{-2n^2}(\rho^2-1)^n \prod \left|\frac{1-\bar z_k z_l}{z_k - z_l}\right| \leqslant \left|\prod F'(z_k)\right|^{-1} \prod |F(z_k) - F(z_l)|^{-1}.$$

Осталось воспользоваться тем фактом, что произведение в левой части неравенства достигает своего минимума в случае симметрично расположенных точек z_k [11, с. 785]. Теорема доказана.

Обозначим через $\Sigma(r)$ класс функций из Σ, обладающих следующим свойством: область $F(\overline{\mathbb{C}}_z \setminus \overline{U})$ не содержит некоторой односвязной области, содержащей начало координат и имеющей внутренний радиус $\geqslant r$, $0 < r < 1$, относительно этой точки [10, 12].

Теорема 9. *В классе $\Sigma(r)$ для любых конечных точек z_k, $|z_k| > 1$, $k = 1, 2$ и любого вещественного α справедливо неравенство*

$$\frac{\left(|z_1|^2-1\right)\left(|z_2|^2-1\right)|z_1-z_2|^2|z_1|^{2\alpha}}{|1-\bar z_1 z_2|^2 |z_2|^{2\alpha}} r^{\alpha^2} \leqslant \frac{|F(z_1)-F(z_2)|^2\,|F(z_1)|^{2\alpha}}{|F'(z_1)F'(z_2)|\,|F(z_2)|^{2\alpha}}.$$

Доказательство. Обозначим через B_1 область, указанную в определении класса $\Sigma(r)$. Положим

$$W_1 = \{w_{11}\},\ w_{11} = 0,\ \Delta_1 = \{\delta_{11}\},\ \delta_{11} = -\alpha,\ \Psi_1 = \{\mu_{11} r^{\nu_{11}}\},\ \mu_{11} = \nu_{11} = 1;$$

$$B_2 = F(\overline{\mathbb{C}}_z \setminus \overline{U}),\ W_2 = \{w_{2k}\}, w_{21} = F(z_1),\ w_{22} = F(z_2),\ w_{23} = \infty,$$

$$\Delta_2 = \{\delta_{2k}\},\ \delta_{21} = -\delta_{22} = 1,\ \delta_{23} = \alpha,$$

$$\Psi_2 = \{\mu_{2k} r^{\nu_{2k}}\}, \quad \mu_{2k} = \nu_{2k} = 1, \quad k = 1, 2, 3.$$

Теорема 2 дает

$$\alpha^4 M\,(B_1, W_1, \Delta_1, \Psi_1) + \left(2+\alpha^2\right)^2 M\,(B_2, W_2, \Delta_2, \Psi_2) \leqslant$$

$$\leqslant \left(2+2\alpha^2\right)^2 M\,(W, \Delta, \Psi)\,,$$

где $W = \{w_{ik}\}$, $\Delta = \{\delta_{ik}\}$ и $\Psi = \{\mu_{ik} r^{\nu_{ik}}\}$. Доказательство завершается применением формул (1) и (2).

Рассмотрим теперь оценки коэффициентов, вытекающие из свойств приведенных модулей. Обозначим через $S_f(z)$ шварциан функции $f(z)$.

Теорема 10. *Если функция $w = f(z)$ мероморфна и однолистна в круге U, то*

$$|S_f''(0) - S_f^2(0)| \leqslant 60.$$

Равенство достигается для функции Кебе.

Доказательство. В силу дробно-линейной инвариантности шварциана можем считать, что $f \in S$; пусть $f(z) = z + \sum\limits_{n=2}^{\infty} c_n z^n$. Из монотонности приведенного модуля следует, что для любых точек $w_1, \ldots, w_n$ области $f(U)$ и любых вещественных $\delta_1, \ldots, \delta_n$, $\sum \delta_k = 0$, имеет место неравенство

$$\sum \delta_k \delta_l h(w_k, w_l) \leqslant 0, \tag{8}$$

где $h(w, \zeta) = g_{f(U)}(w, \zeta) + \log|w - \zeta|$. Положим

$$w_1 = 0, \quad w_2 = f(re^{i\varphi}), \quad w_3 = f(-re^{i\varphi});\ \delta_1 = 2, \quad \delta_2 = \delta_3 = -1.$$

Тогда

$h(w_1, w_1) = 0;$

$$h(w_2, w_2) = \operatorname{Re}\left\{2c_2 re^{i\varphi} + (3c_3 - 2c_2^2) r^2 e^{2i\varphi} + \left(4c_4 - 6c_2c_3 + \frac{8}{3}c_2^3\right) r^3 e^{3i\varphi}\right.$$

$$\left. + \left(5c_5 - 8c_2c_4 - \frac{9}{2}c_3^2 + 12c_2^2c_3 - 4c_2^4\right) r^4 e^{4i\varphi}\right\} - r^2 - \frac{r^4}{2} + o(r^4);$$

$$h(w_3, w_3) = \operatorname{Re}\left\{-2c_2 re^{i\varphi} + (3c_3 - 2c_2^2) r^2 e^{2i\varphi} - \left(4c_4 - 6c_2c_3 + \frac{8}{3}c_2^3\right) r^3 e^{3i\varphi}\right.$$

$$\left. + \left(5c_5 - 8c_2c_4 - \frac{9}{2}c_3^2 + 12c_2^2c_3 - 4c_2^4\right) r^4 e^{4i\varphi}\right\} - r^2 - \frac{r^4}{2} + o(r^4);$$

$$h(w_1, w_2) = \operatorname{Re}\left\{c_2 re^{i\varphi} + \left(c_3 - \frac{c_2^2}{2}\right) r^2 e^{2i\varphi} + \left(c_4 - c_2c_3 + \frac{c_2^3}{3}\right) r^3 e^{3i\varphi} + \right.$$

$$+\left(c_5-c_2c_4-\frac{c_3^2}{2}+c_2^2c_3-\frac{c_2^4}{4}\right)r^4e^{4i\varphi}\Bigg\}+o(r^4);$$

$$h(w_1,w_3)=\mathrm{Re}\left\{-c_2re^{i\varphi}+\left(c_3-\frac{c_2^2}{2}\right)r^2e^{2i\varphi}-\left(c_4-c_2c_3+\frac{c_2^3}{3}\right)r^3e^{3i\varphi}+\right.$$

$$\left.+\left(c_5-c_2c_4-\frac{c_3^2}{2}+c_2^2c_3-\frac{c_2^4}{4}\right)r^4e^{4i\varphi}\right\}+o(r^4);$$

$$h(w_2,w_3)=\mathrm{Re}\left\{c_3r^2e^{2i\varphi}+\left(c_5-\frac{c_3^2}{2}\right)r^4e^{4i\varphi}\right\}+r^2-\frac{r^4}{2}+o(r^4).$$

Неравенство (8) принимает вид

$$\mathrm{Re}\left\{\left(4c_5-8c_2c_4-6c_3^2+16c_2^2c_3-6c_2^4\right)e^{4i\varphi}\right\}\leqslant 2.$$

Следовательно, $|2c_5-4c_2c_4-3c_3^2+8c_2^2c_3-3c_2^4|\leqslant 1$. Легко проверить, что левая часть последнего неравенства равна $\frac{1}{60}|S_f''(0)-S_f^2(0)|$. Теорема доказана.

Теорема 11. *Пусть функции $f(z)$ и $g(z)$ мероморфно и однолистно отображают круг U на неналегающие области, причем $\mathrm{Im}\,f(0)=\mathrm{Im}\,g(0)$, $f'(0)>0$, $g'(0)>0$. Тогда*

$$\frac{f'(0)g'(0)}{(f(0)-g(0))^2}\leqslant 1-\frac{1}{12}|S_f(0)+\overline{S_g(0)}|.$$

Равенство достигается для $f(z)=(1+z)/(1-z)$, $g(z)=(z-1)/(z+1)$.

Доказательство. Этот результат можно получить предельным переходом из теоремы 6. Однако нам удобнее воспользоваться готовыми вычислениями в [1]. Предположим, что в окрестности нуля имеют место разложения

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n,\quad g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n.$$

Введем вспомогательную функцию

$$\varphi(z)=\frac{(1+\gamma)z-(a_0\gamma+b_0)}{(1-\gamma)z+(a_0\gamma+b_0)},$$

где $\gamma\neq 0$, и положим $f_1(z)=\varphi(f(z))$, $f_2(z)=\varphi(g(z))$; тогда

$$f_1(0)=1,\ f_2(0)=-1,\ f_1'(0)=\frac{2\gamma}{a_0-b_0}a_1,\ f_2'(0)=\frac{2}{\gamma(a_0-b_0)}b_1.$$

Применяя теорему 8 работы [1], получим

$$\left|\frac{a_0-b_0}{2\gamma a_1}\right|^2+\left|\frac{\gamma(a_0-b_0)}{2b_1}\right|^2-\frac{1}{6}\operatorname{Re}\left\{S_f(0)\left(\frac{a_0-b_0}{2\gamma a_1}\right)^2\right\}-$$
$$-\frac{1}{6}\operatorname{Re}\left\{S_g(0)\left(\frac{\gamma(a_0-b_0)}{2b_1}\right)^2\right\}\geqslant\frac{1}{2}.$$

При $\gamma=\sqrt{b_1/a_1}e^{i\varphi}$ имеем

$$\frac{(a_0-b_0)^2}{2a_1b_1}\left\{1-\frac{1}{12}\operatorname{Re}\left((S_f(0)+\overline{S_g(0)})e^{-2i\varphi}\right)\right\}\geqslant\frac{1}{2},$$

$$\frac{a_1b_1}{(a_0-b_0)^2}\leqslant 1-\frac{1}{12}|S_f(0)+\overline{S_g(0)}|.$$

Теорема доказана.

В заключение приведем результат для рациональных функций. Пусть $R(z)$ – рациональная функция, отличная от константы. Для любой точки $z_0\in\overline{\mathbb{C}}_z$ введем обозначения $c(z_0)$ и $k(z_0)$ соотношением

$$\rho(R(z),R(z_0))\sim c(z_0)(\rho(z,z_0))^{k(z_0)},\ \ z\to z_0,$$

где $\rho(a,b)=|a-b|$, если $b\neq\infty$, и $\rho(a,\infty)=|a|^{-1}$. Обозначим также

$$\Pi(u)\stackrel{\text{def}}{=}\prod_{R(z)=u}c(z)^{k(z)},\ \ \Pi(u,v)\stackrel{\text{def}}{=}\prod_{\substack{R(z_1)=u\\ R(z_2)=v}}|z_1-z_2|^{k(z_1)k(z_2)},\ \ u,v\in\overline{\mathbb{C}}_w.$$

Теорема 12. *Пусть $R(z)$ – рациональная функция степени $p\geqslant 1$; $w_1,w_2\in\overline{\mathbb{C}}_w$, $w_1\neq w_2$. Тогда*

$$\frac{\Pi(w_1)\Pi(w_2)}{\Pi(w_1,w_1)\Pi(w_2,w_2)}(\Pi(w_1,w_2))^2=\begin{cases}|w_1-w_2|^{2p}, & \infty\notin\{w_i\},\\ 1, & \infty\in\{w_i\}.\end{cases}$$

Доказательство. Положим

$$W=\{w_i\},\ \Delta=\{\delta_i\},\ \delta_1=-\delta_2=1,\ \Psi=\{\mu_i r^{\nu_i}\},\ \mu_i=\nu_i=1,\ i=1,2;$$

$$Z_R=\{z_{ij}\}, z_{ij}\text{ – различные корни уравнения } R(z)=w_i,$$

$$\Delta_R=\{\delta_{ij}\},\quad \delta_{ij}=\delta_i,\quad \Psi_R=\{\mu_{ij}r^{\nu_{ij}}\},$$

$$\mu_{ij}=c(z_{ij})^{-1/k(z_{ij})},\quad \nu_{ij}=1/k(z_{ij}).$$

По теореме 4,

$$M\left(W, \Delta, \Psi\right) = pM\left(Z_R, \Delta_R, \Psi_R\right).$$

Применяя формулу (2), получим

$$\frac{1}{8\pi}\sum \log|w_i - w_j| =$$
$$= \frac{1}{8\pi p}\left\{\sum k(z_{ij})\log c(z_{ij}) - \sum (-1)^{i+k} k(z_{ij})k(z_{kl})\log|z_{ij} - z_{kl}|\right\},$$

$$p\sum \log|w_i - w_j| =$$
$$= \log\left(\Pi(w_1)\Pi(w_2)\right) - \log\left(\Pi(w_1, w_1)\Pi(w_2, w_2)\right) + 2\log\left(\Pi(w_1, w_2)\right).$$

Теорема доказана.

Литература

1. В. Н. Дубинин, *Асимптотика модуля вырождающегося конденсатора и некоторые ее применения,* Зап. научн. семин. ПОМИ **237** (1997), 56–73.
2. В. Н. Дубинин, *Приведенные модули открытых множеств в теории аналитических функций,* Докл. РАН (принято к печати).
3. Н. С. Ландкоф, *Основы современной теории потенциала,* Наука, М. (1966).
4. В. Н. Дубинин, *Симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного,* Успехи мат. наук **49**, No. **1** (1994), 3–76.
5. Г. В. Кузьмина, *Методы геометрической теории функций. I, II,* Алгебра и анализ, No. **9**, вып. 3 (1997), 41–103, вып. 5 (1997), 1–50.
6. Е. Г. Емельянов, *О связи двух задач об экстремальном разбиении,* Зап. научн. семин. ЛОМИ **160** (1987), 91–98.
7. М. А. Лаврентьев, *К теории конформных отображений,* Тр. физ. мат. ин-та им. В. А. Стеклова **5** (1934), 159–245.
8. П. П. Куфарев, *К вопросу о конформных отображениях дополнительных областей,* Докл. АН СССР **73** (1950), 881–884.
9. Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного,* Наука, М. (1966).
10. Г. В. Кузьмина, *Задачи об экстремальном разбиении и оценки коэффициентов в классе $\Sigma(r)$,* Зап. научн. семин. ПОМИ **196** (1991), 101–116.
11. В. Н. Дубинин, *Некоторые свойства внутреннего приведенного модуля,* Сиб. мат. журн. **35**, No. **4** (1994), 774–792.
12. А. Ю. Солынин, *Некоторые экстремальные задачи в классе $\Sigma(r)$,* Зап. научн. семин. ПОМИ **196** (1991), 138–153.

Институт прикладной
математики ДВО РАН,
Владивосток

Поступило 5 мая 1998 г.