Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 254, 1998 г.

Е. Г. Емельянов

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ РАЗБИЕНИЯ РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ И КВАЗИКОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Хорошо известный результат Дж. Дженкинса об экстремальном разбиении римановой поверхности используется для построения аналога отображения Тейхмюллера римановой поверхности с фиксированными отмеченными точками. Построенные отображения применяются для изучения характера зависимости функционала в задаче об экстремальном разбиении от отмеченных точек.

§1. Построение квазиконформных отображений специального вида

1.1. Пусть $\mathfrak{R}$ – конечная риманова поверхность, $\mathbf{P} = \{p_1, \dots, p_N\}$ – множество отмеченных точек на $\mathfrak{R}$, $\mathbf{\Gamma} = \{\Gamma^1, \dots, \Gamma^n\}$ – семейство гомотопических классов замкнутых жордановых кривых на $\mathfrak{R}' = \mathfrak{R} \backslash \mathbf{P}$, не гомотопных нулю или точечной кривой p_k, $k = \overline{1, N}$, в котором классы Γ^i и Γ^j при $i \neq j$ содержат непересекающиеся кривые. Через $\mathcal{D}_{\mathbf{\Gamma}}$ будем обозначать семейство всех систем $D = \{D_1, \dots, D_n\}$ неналегающих двусвязных областей D_i на $\mathfrak{R}'$, в котором всякая замкнутая жорданова кривая $\gamma_i \subset D_i$, разделяющая граничные компоненты области D_i, принадлежит классу Γ^i.

Пусть $\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ – множество положительных чисел. Под экстремальным разбиением поверхности $\mathfrak{R}$, соответствующим семейству классов кривых $\mathbf{\Gamma}$ и множеству чисел $\boldsymbol{\alpha}$, понимаем систему областей $D^* = \{D_1^*, \dots, D_n^*\} \subset \mathcal{D}_{\mathbf{\Gamma}}$, доставляющую максимум функционалу

$$\mathcal{M}(D) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \, M(D_i),$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант No. 97-01-00259.

где $M(D_i)$ – модуль семейства замкнутых кривых в области D_i, разделяющих граничные компоненты D_i. (Здесь возможно $D_i^* = \varnothing$ для некоторых i, тогда $M(D_i^*) = 0$.)

Как хорошо известно [1], существует единственный квадратичный дифференциал Q на $\mathfrak{R}$ ($Q = Q(\mathbf{P}, \mathbf{\Gamma}, \boldsymbol{\alpha})$) с замкнутыми траекториями и такой, что каждая область D_j^* является или кольцевой областью дифференциала Q, или подобластью кольцевой области этого дифференциала, при этом каждая некритическая траектория Q, не проходящая через точки $p_i \in \mathbf{P}$, $i = \overline{1, N}$, принадлежит одному из классов $\Gamma^k \subset \mathbf{\Gamma}$, и ее Q-длина равна α_k. Дифференциал Q не имеет полюсов выше первого порядка, и множество его полюсов содержится в $\mathbf{P}$.

1.2. В дальнейшем мы будем считать, что $D_j^* \neq \varnothing$ для всех $i = \overline{1, n}$, и что каждая точка $p_j \in \mathbf{P}$ является простым полюсом дифференциала Q. В таком случае каждая область D_j^* оказывается кольцевой областью для Q.

Пусть $\mathbf{K} = \{k_1, k_2, \dots, k_n\}$, $k_i \in \mathbb{C}$, $|k_j| < 1$. Пусть $z = z(p)$ – локальный параметр в окрестности точки $p \in \mathfrak{R}$. Положим

$$\mu_{\mathbf{K}}(z) = \begin{cases} k_j \dfrac{|Q(z)|}{Q(z)}, & \text{если} \quad p \in D_j^*, \\ 0, & \text{если} \quad p \in \mathfrak{R} \setminus \bigcup\limits_i D_i^*. \end{cases} \tag{2}$$

Тогда $\mu_{\mathbf{K}}$ – дифференциал Бельтрами на $\mathfrak{R}$, и найдется гомеоморфизм $f : \mathfrak{R} \to \widehat{\mathfrak{R}}$, удовлетворяющий уравнению Бельтрами $f'_{\bar{z}} = \mu_{\mathbf{K}}(z) \cdot f'_z$. Такой гомеоморфизм единственен с точностью до конформного автоморфизма поверхности $\widehat{\mathfrak{R}}$. Выбирая некоторое нормирующее условие, можем считать, что локально (при малой $\|\mathbf{K}\|^2 = |k_1|^2 + \dots + (k_n)^2$) f однозначно определяется выбором $\mathbf{K}$, и использовать обозначение $f = f_{\mathbf{K}}$ ($f_{\mathbf{0}}$ – тождественное отображение). Мы также будем, если это окажется удобнее, употреблять обозначение $\widehat{\mathfrak{R}} = \mathfrak{R}_{\mathbf{K}}$. Положим

$$\mathbf{P}_{\mathbf{K}} = \{\widehat{p}_j = f_{\mathbf{K}}(p_j), p_j \in \mathbf{P}\} \subset \mathfrak{R}_{\mathbf{K}}, \quad \Gamma^j_{\mathbf{K}} = \left\{f_{\mathbf{K}}(\gamma) : \gamma \in \Gamma^j\right\},$$

$$\mathbf{\Gamma}_{\mathbf{K}} = \left\{\Gamma^j_{\mathbf{K}}\right\}_{j=1}^n, \ \mathfrak{R}'_{\mathbf{K}} = \mathfrak{R}_{\mathbf{K}} \setminus \mathbf{P}_{\mathbf{K}}, \ D_{\mathbf{K}} = \left\{f_{\mathbf{K}}(D_j^*)\right\}_{j=1}^n.$$

Экстремальным разбиением поверхности $\mathfrak{R}_{\mathbf{K}}$, соответствующим семейству $\mathbf{\Gamma}_{\mathbf{K}}$ и системе $\boldsymbol{\alpha}$, является система неналегающих двусвязных областей $\widehat{D}^* = \{\widehat{D}_j^*\}_{j=1}^n$ на $\mathfrak{R}'_{\mathbf{K}}$. доставляющая максимум функционалу

$$\widehat{\mathcal{M}}(\widehat{D}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2\, M(\widehat{D}_i) \tag{3}$$

в семействе $\widehat{D} = \{\widehat{D}_i\}_{i=1} \in \widehat{\mathcal{D}}_{\mathbf{\Gamma_K}}$, где $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathbf{\Gamma_K}}$ определяется для $\mathfrak{R}'_{\mathbf{K}}$ так же, как $\mathcal{D}_{\mathbf{\Gamma}}$ для $\mathfrak{R}'$. Соотвествующий квадратичный дифференциал на $\mathfrak{R}_{\mathbf{K}}$ мы будем обозначать через $Q_{\mathbf{K}}$, а само экстремальное значение функционала (3) – через $\mathcal{M}^*(\mathbf{K})$:

$$\mathcal{M}^*(\mathbf{K}) = \widehat{\mathcal{M}}(\widehat{D}^*). \tag{4}$$

Тем самым, $\mathcal{M}^*(\mathbf{0}) = \mathcal{M}(D^*)$.

В дальнейшем, чтобы избежать некорректности в обозначениях, в случае, когда $\widehat{p} = f_{\mathbf{K}}(p)$, $z = z(p)$ и $w = w(\widehat{p})$ – локальные параметры в окрестностях указанных точек, для отображения $w \circ f_{\mathbf{K}} \circ p(z)$ будем использовать обозначение $w = F_{\mathbf{K}}(z)$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. 1. $\widehat{D}^* = D_{\mathbf{K}}$.

2. $$\mathcal{M}^*(\mathbf{K}) = \mathrm{Re} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^2 \tfrac{1-k_j}{1+k_j} M(D_j^*). \tag{5}$$

3. Если $\widehat{p} \in f_{\mathbf{K}}(D_j^*)$ и $w = w(\widehat{p})$ – локальный параметр в окрестности точки $\widehat{p}$, то

$$Q_{\mathbf{K}}(w) = \Big(\frac{1-|k_j|^2}{1+k_j}\Big)^2 \cdot \big(Q \circ F_{\mathbf{K}}^{-1}\big) \cdot \big(F_{\mathbf{K}}^{-1}\big)'^{\,2}_{w}. \tag{6}$$

4. Порядок $m(\widehat{p})$ дифференциала $Q_{\mathbf{K}}$ в точке $\widehat{p} = f_{\mathbf{K}}(p)$ равен порядку $m(p)$ дифференциала Q в точке p. Траектории дифференциала Q при отображении $f_{\mathbf{K}}$ переходят в траектории дифференциала $Q_{\mathbf{K}}$.

Доказательство. Приводимое ниже доказательство является некоторым обобщением конструкции доказательства теоремы Л. Берса в [2, §8] для отображений Тейхмюллера. Пусть $p_0 \in \mathfrak{R}$, $m = m(p_0)$ – порядок дифференциала Q в точке p_0, т.е. $m = -1$, если в этой точке Q имеет полюс (необходимо простой), $m = 1, 2, \ldots$, если в точке p_0 – нуль порядка m дифференциала Q, и $m = 0$ в остальных случаях. Положим, следуя [2],

$$I_{p_0}(p) = \int\limits_{p_0}^{p} \sqrt{Q(z)}\, dz, \qquad u_{p_0}(p) = [\, I_{p_0}(p)\,]^{2/(m+2)}. \tag{7}$$

Для $j = \overline{1,n}$ пусть

$$\psi_j(u) = \frac{u + k_j\,\overline{u}}{1 + k_j} = x + iy\frac{1 - k_j}{1 + k_j}, \quad u = x + iy. \tag{8}$$

Определим теперь некоторую специальную систему локальных параметров на $\widehat{\mathfrak{R}}_{\mathbf{K}}$ по аналогии с [2].

1) Пусть $\widehat{p}_0 = f_{\mathbf{K}}(p_0)$, $p_0 \in D_j^*$. Тогда $m(p_0) = 0$. Положим

$$w_{\widehat{p}_0}(\widehat{p}) = \psi_j \circ I_{p_0} \circ f_{\mathbf{K}}^{-1}(\widehat{p}) \tag{9}$$

в окрестности точки $\widehat{p}_0$.

2) Пусть $\widehat{p}_0 = f_{\mathbf{K}}(p_0)$, $p_0 \in \partial D_i^*$, $m = m(p_0)$. В достаточно малой окрестности точки p_0 имеем $m(p) = 0$ для $p \neq p_0$. Обозначим через $J(p_0)$ множество индексов $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, для которых $p_0 \in \partial D_j^*$. Для $\widehat{p} = f(p)$, достаточно близкого к $\widehat{p}_0$, $p \in \overline{D_j^*}$, положим

$$w_{\widehat{p}_0}(\widehat{p}) = \left[\, \psi_j \circ I_{p_0} \circ f_{\mathbf{K}}^{-1} \,\right]^{2/m+2} (\widehat{p}). \tag{10}$$

В случае $p \in \partial D_{j'}^* \cap \partial D_{j''}^*$ для j', $j'' \in J(p_0)$ точка p необходимо лежит на траектории дифференциала Q, выходящей из p_0, и поэтому $u = I_{p_0}(p)$ вещественно и $\psi_{j'} = \psi_{j''}(u)$, так что определение (10) корректно.

В случае 1) утверждение, что $w_{\widehat{p}_0}(\widehat{p})$ – локальный параметр в окрестности точки $\widehat{p}_0$, сразу следует из того факта, что отображения $\psi_j \circ I_{p_0}$ и $f_{\mathbf{K}}$ квазиконформны и имеют одинаковую дилатацию в окрестности точки p_0. В случае 2) нетрудно убедиться, что $w_{\widehat{p}_0}$ квазиконформно в окрестности точки $\widehat{p}_0$. Поскольку $w_{\widehat{p}_0}(\widehat{p})$ конформно в окрестностях точек $\widehat{p} \in f(D_j^*)$, $j \in J(p_0)$, то конформность $w_{\widehat{p}_0}(\widehat{p})$ в достаточно малой окрестности точки $\widehat{p}_0$ следует из леммы Вейля (см., например, [3]). Таким образом, система локальных параметров $w_{\widehat{p}_0}(\widehat{p})$ на $\mathfrak{R}_{\mathbf{K}}$ определена.

Как и в [2], убедимся, что соотношение

$$Q_{\mathbf{K}}(w)\, dw^2 = \left(\frac{m+2}{2}\right)^2 w_{\widehat{p}_0}{}^m \,(dw_{\widehat{p}_0})^2\,, \tag{11}$$

где

$$m = m(p_0), \quad \widehat{p}_0 = f_{\mathbf{K}}(p_0),$$

определяет на $\mathfrak{R}_{\mathbf{K}}$ квадратичный дифференциал. Выражение (6) получается из (11) для $\widehat{p} \in f_{\mathbf{K}}(D_j^*)$ прямым подсчетом с использованием (9) и 2). Вдоль траектории $\gamma \subset D_j^*$ имеем в (8): $y = \mathrm{const}$, поэтому из (9) ясно, что $(dw_{\widehat{p}_0})^2>0$ вдоль $f_{\mathbf{K}}$-образа γ. Прямой подсчет показывает, что $Q_{\mathbf{K}}$-длина $f_{\mathbf{K}}(\gamma)$ равна в этом случае α_j. Утверждение теоремы о порядках $m(p)$ и $m(\widehat{p})$ следует из построения $Q_{\mathbf{K}}$.

Как показано в [1], существует единственный квадратичный дифференциал с замкнутыми траекториями на $\mathfrak{R}_{\mathbf{K}}$, отвечающий выбранному семейству $\mathbf{\Gamma_K}$ и множеству $\boldsymbol{\alpha}$. Следовательно, $\widehat{D}^*=D_{\mathbf{K}}$.

Область D_j^*, разрезанная вдоль отрезка ортогональной Q-траектории, соединяющей ее граничные континуумы, отображается посредством функции $\zeta=I_{p_0}(p)$, $p_0\in D_j^*$, на прямоугольник длины α_j и высоты h_j, $h_j/\alpha_j=M(D_j^*)$. Область $\widehat{D}_j^*=f(D_j^*)$, разрезанная аналогичным образом вдоль отрезка ортогональной $Q_{\mathbf{K}}$-траектории, отображается посредством функции $\zeta=I_{\widehat{p}_0}(\widehat{p})$ на прямоугольник длины α_j и высоты $\widehat{h}_j$, $M(\widehat{D}_j^*)=\widehat{h}_j/\alpha_j$. Как видно из (8), $\widehat{h}_j=h_j\operatorname{Re}\frac{1-k_j}{1+k_j}$, что доказывает (5). Этим теорема доказана.

Замечания. 1) Если $k_1=k_2=\cdots=k_n$, то $f_{\mathbf{K}}$ – отображение Тейхмюллера, и результат теоремы 1 содержится в теореме Л. Берса [2].

2) Если

$$\mathfrak{R}\xrightarrow{f}\widehat{\mathfrak{R}}\xrightarrow{\hat f}\hat{\hat{\mathfrak{R}}},\quad f=f_{\mathbf{K}},\quad \widehat{f}=f_{\widehat{\mathbf{K}}},$$

то

$$\widehat{f}\circ f:\mathfrak{R}\to\hat{\hat{\mathfrak{R}}},\quad \widehat{f}\circ f=f_{\widehat{\mathbf{K}}*\mathbf{K}},$$

где

$$(\widehat{\mathbf{K}}*\mathbf{K})_j=\frac{k_j+\widehat{k}_j\Delta_j}{1+\widehat{k}_j\,\overline{k_j}\,\Delta_j},\quad \Delta_j=\frac{1+k_j}{1+\overline{k_j}}. \tag{12}$$

Легко проверить, что $(\mathbf{K}_1*\mathbf{K}_2)*\mathbf{K}_3=\mathbf{K}_1*(\mathbf{K}_2*\mathbf{K}_3)$, $\mathbf{0}*\mathbf{K}=\mathbf{K}$, $\mathbf{K}*\mathbf{0}=\mathbf{K}$. Поэтому, если $\mathbf{K}^j=(0,\dots,k_j,\dots,0)$, $j=\overline{1,n}$, то $\mathbf{K}=\mathbf{K}^1*\mathbf{K}^2*\cdots*\mathbf{K}^n$.

1.3. Будем называть два квазиконформных гомеоморфизма $f:\mathfrak{R}\to\widehat{\mathfrak{R}}$ и $g:\mathfrak{R}\to\hat{\hat{\mathfrak{R}}}$ эквивалентными ($f\sim g$), если существует конформный гомеоморфизм $\varphi:\widehat{\mathfrak{R}}\to\hat{\hat{\mathfrak{R}}}$ такой, что $\varphi(f(p_i))=g(p_i)$

для всех $p_i \in \mathbf{P}$ и отображение $g^{-1} \circ \varphi \circ f$ гомотопно тождественному на $\mathfrak{R}'$. Через $[f]$ обозначим класс эквивалентности по указанному отношению. Класс $[f]$ можно рассматривать как точку в пространстве Тейхмюллера $T_{g,N}$, где g – род $\mathfrak{R}$, а отображение

$$\Phi : \mathbf{K} \to [f_{\mathbf{K}}]$$

– как отображение единичного полидиска в пространстве $\mathbb{C}^n$ в $T_{g,N}$.

Теорема 2. *Отображение Φ локально биективно.*

Доказательство. Нужно доказать, что если норма $\|\mathbf{K} - \mathbf{K}'\|$ достаточно мала и $\mathbf{K} \neq \mathbf{K}'$, то невозможно совпадение

$$\mathfrak{R}_{\mathbf{K}} = \mathfrak{R}_{\mathbf{K}'} \quad \text{и} \quad Q_{\mathbf{K}} = Q_{\mathbf{K}'}. \tag{13}$$

Если (13) имеет место, рассмотрим на $\mathfrak{R}_{\mathbf{K}}$ отображение $\widehat{f}_{\widehat{\mathbf{K}}}$, где $\widehat{k}_j = -k_j\overline{\Delta_j}$ (см. (12)). Поскольку $\widehat{\mathbf{K}} * \mathbf{K} = \mathbf{0}$ в силу (12), то, значит, $\widehat{f}_{\widehat{\mathbf{K}}} : \mathfrak{R}_{\mathbf{K}} \to \mathfrak{R}$. Тогда

$$f_{\widehat{\mathbf{K}}*\mathbf{K}'} = \widehat{f}_{\widehat{\mathbf{K}}} \circ f_{\mathbf{K}'} : \mathfrak{R} \to \mathfrak{R} \quad \text{и} \quad Q_{\widehat{\mathbf{K}}*\mathbf{K}'} = Q.$$

Поэтому достаточно доказать, что если норма $\|\mathbf{K}\|$ мала, $\mathbf{K} \neq \mathbf{0}$, то невозможно совпадение

$$\mathfrak{R}_{\mathbf{K}} = \mathfrak{R}, \quad Q_{\mathbf{K}} = Q. \tag{14}$$

Предположим, что (14) имеет место. Фиксируем $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Из (9) следует, что для $p \in D_j^*$

$$f_{\mathbf{K}} = I_{p_0}^{-1} \circ \psi_j \circ I_{p_0}. \tag{15}$$

На каждой из двух граничных компонент области D_j^* найдется критическая точка дифференциала Q; обозначим эти точки через q_1 и q_2. В силу (14), $f_{\mathbf{K}}(q_1) = q_1$, $f_{\mathbf{K}}(q_2) = q_2$. Рассмотрим геодезическую линию γ в Q-метрике, соединяющую q_1 и q_2 в D_j^*. Вдоль γ имеем: $\arg Q(z)dz^2 = \text{const}$. Из (15) видно, что для кривой $f_{\mathbf{K}}(\gamma)$ должно выполняться такое же условие. Отсюда следует, что при достаточно малой норме $\|\mathbf{K}\|$ должно быть $f_{\mathbf{K}}(\gamma) = \gamma$. Пусть $I_{p_0}(q_2) - I_{p_0}(q_1) = u$. Поскольку $f_{\mathbf{K}}(q_2) = q_2$, $f_{\mathbf{K}}(q_1) = q_1$ и $\widehat{h}_j = h_j$, то должно быть $\psi_j(u) = u$. Из (8) тогда получаем, что $k_j(u - \overline{u}) = 0$, откуда $k_j = 0$, так как u невещественно. Таким образом $\mathbf{K} = \mathbf{0}$ вопреки предположению. Теорема доказана.

§2. О зависимости функционала в задаче об экстремальном разбиении от отмеченных точек

Пусть $\pi : H_+ \to \mathfrak{R}'$ – универсальное накрытие римановой поверхности $\mathfrak{R}' = \mathfrak{R} \setminus \mathbf{P}$ верхней полуплоскостью, $\widehat{\mu}_{\mathbf{K}}$ – коэффициент Бельтрами на H_+, получающийся поднятием $\mu_{\mathbf{K}} \frac{d\bar{z}}{dz}$. Точку $[f_{\mathbf{K}}] \in T_{g,N}$ можно представить, как шварциан функции $\mathcal{F}_{\mathbf{K}}(z)$, являющейся гомеоморфным решением уравнения Бельтрами на $\overline{\mathbb{C}}$ с коэффициентом $\mu(z)$, равным $\widehat{\mu}_{\mathbf{K}}(z)$ на H_+ и 0 на H_-. Поскольку этот коэффициент голоморфно зависит от $\mathbf{K}$, то отображение $\Phi : \mathbf{K} \to [f_{\mathbf{K}}]$ – голоморфное вложение [4].

Остановимся на случае $\mathfrak{R} = \overline{\mathbb{C}}$. В этом случае, как легко подсчитать, максимальное число n областей экстремального разбиения равно $N-3$. Такова же размерность пространства Тейхмюллера $T_{0,N}$. Три из отмеченных точек можно считать фиксированными, используя дробно-линейное отображение. Набор $\{z_k = z(p_k)\}_{k=1}^{N}$ определяет, как можно показать, локальные координаты в пространстве $T_{0,N}$. Поэтому $k_j = k_i(z_4, z_5, \dots, z_N)$, $j = \overline{1, N-3}$, – голоморфное выражение одной системы координат через другую. Из выражения (5) теперь следует, что $\mathcal{M}^*(\mathbf{K})$ – плюригармоническая функция. Таким образом, имеем следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть* $\mathbf{P} = \{p_1, \dots, p_N\}$ – *множество отмеченных точек на* $\overline{\mathbb{C}}$, $N \geqslant 4$, $\mathbf{\Gamma} = \{\Gamma^1, \dots, \Gamma^{N-3}\}$ – *семейство гомотопических классов замкнутых жордановых кривых на* $\overline{\mathbb{C}}' = \overline{\mathbb{C}} \setminus \mathbf{P}$, *не гомотопных нулю или точечной кривой* p_k *на* $\overline{\mathbb{C}}'$, *в котором классы* Γ^i *и* Γ^j *при* $i \neq j$ *содержат непересекающиеся кривые. Пусть* $\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_j\}_{j=1}^{N-3}$ – *множество положительных чисел,* $D^* = D^*(\mathbf{P}, \mathbf{\Gamma}, \boldsymbol{\alpha})$ – *экстремальное разбиение* $\overline{\mathbb{C}}$, $D^* = \{D_j^*\}_{j=1}^{N-3}$, $Q(z)dz^2$ – *ассоциированный квадратичный дифференциал. Пусть функция* $\mathcal{M}^*(p_1, \dots, p_N)$ *определена равенством:*

$$\mathcal{M}^*(p_1, \dots, p_N) = \sum_{j=1}^{N-3} \alpha_j^2 \, M(D_j^*).$$

Тогда, если $D_j^* \neq \varnothing$ *при* $j = \overline{1, N-3}$ *и каждая точка* $p_j \in \mathbf{P}$ *служит полюсом дифференциала* $Q\,dz^2$, *то* $\mathcal{M}^*(p_1, \dots, p_N)$ – *плюригармоническая функция.*

Замечания. 1) Теорема 3 доказана А. Ю. Васильевым [5] для частного случая $N = 5$.

2) Теорему 3 не удается распространить на случай римановых поверхностей рода $g > 0$. Для таких поверхностей размерность $T_{g,N} = 3(g-1) + N$, а максимальное значение n меньше этой величины (например, для $g = 1$ имеем $n = N - 1$).

Литература

1. J. A. Jenkins, *On the existence of certain general metrics,* Ann. of Math. **66**, No. 3 (1957), 440–453.
2. L. Bers, *Quasiconformal mappings and Teichmüller's theorem,* Analytic function, Princeton, 1960, 89–120. Русский перевод: Л. Берс, *Квазиконформные отображения и теорема Тейхмюллера.* В кн.: Л. Альфорс, Л. Берс. *Пространства римановых поверхностей и квазиконформные отображения,* 9–50. М., 1961.
3. I. Kra, *Automorphic forms and Kleinian groups,* Mathematics Lecture Note Series. W. A. Benjamin, Reading, Massachusetts, 1972. Руский перевод: И. Кра, *Автоморфные формы и клейновы группы*, М., 1975.
4. L. Ahlfors, *Lecture on quasiconformal mappings* (manuscript); русский перевод: Л. Альфорс, *Лекции по квазиконформным отображениям*, М., 1969.
5. А. Ю. Васильев, *Инвариантные метрики и гармонические функционалы на пространстве Тейхмюллера,* Алгебра и анализ **9**, вып. 1 (1997), 49–70.

С.-Петербургский университет
экономики и финансов

Поступило 20 октября 1998 г.