Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 254, 1998 г.

Reiner Kühnau

RANDEFFEKTE BEIM ELEKTROSTATISCHEN KONDENSATOR

Im Gedächtnis an G. M. Golusin zum 90. Geburtstag

1. Einleitung

Sei durch $Z = Z(S)$ ein dreimal stetig differenzierbarer abgeschlossener Jordanbogen in der komplexen Z-Ebene gegeben, wobei S die Bogenlänge ist, $0 \leq S \leq L$, $L =$ Länge. Durch $z(S,t) = Z(S) + itZ'(S)$ entsteht zu festen reellen t (hinreichend klein) zu $\mathfrak{C}$ jeweils eine Parallelkurve im Abstand $|t|$. Wir nehmen die durch $t = \pm\epsilon$ ($\epsilon > 0$ hinreichend klein) für $0 \leqslant S \leqslant L$ entstehenden beiden Nachbarbögen als Elektroden ("Platten") eines elektrostatischen Kondensators. Dessen Kapazität sei C. Bekanntlich ist (bis auf einen einheitlichen Normierungsfaktor) $C = 2\pi/\log M$, wenn $M > 1$ den konformen Modul des auf der Zahlenkugel nach Löschen der beiden Elektroden entstehenden zweifach zusammenhängenden Gebietes G bezeichnet, so das sich G schlicht konform auf einen konzentrischen Kreisring des Radienverhältnisses M abbilden läst. Unser Ziel ist der

Satz. *Für $\epsilon \to 0$ gilt mit einer beschränkten Funktion $O(1)$ (Landau-Symbol) von ϵ*

$$C = \frac{L}{2\epsilon} + \frac{1}{\pi}\log\frac{1}{\epsilon} + O(1). \tag{1}$$

Der nach dem naheliegenden Term $L/(2\epsilon)$ auftretende und vergrösernde logarithmische Term entsteht durch den Randeffekt bei unserem Kondensator, weil nämlich das elektrostatische Feld nicht nur "zwischen" den Elektroden vorliegt. Die Geometrie von $\mathfrak{C}$ steckt - auser in dem "trivialen" Term $L/(2\epsilon)$ - nur in der Gröse O(1) in (1). Unsere Herleitung von (1) liefert im Prinzip auch beidseitige konkrete Abschätzungen dieses O(1) - vgl. z. B. (12).

Die Herleitung von (1) geschieht wie in einer analogen Situation in [6] mit Hilfe des Moduls "geeigneter" einparametriger Kurvenscharen [2]. "Geeignet" heist dabei, einmal eine Kurvenschar "nahe" den Feldlinien zu finden, zum anderen "nahe" den Potentiallinien.

Mit der räumlichen Übertragung [4] dieser Methode (Modul einparametriger Flächenscharen bzw. zweiparametriger Kurvenscharen) erhält man genauso auch das dreidimensionale Analogon zu (1):

$$C = \frac{F}{2\epsilon} + \frac{U}{2\pi} \log \frac{1}{\epsilon} + O(1). \tag{1'}$$

Dabei bezeichnet F die Fläche und U den Umfang eines dreimal stetig differenzierbaren glatten einfach zusammenhängenden doppelpunktfreien abgeschlossenen Flächenstückes $\mathfrak{F}$, zu dem die beiden Parallelflächen im Abstand $\pm\epsilon$ als Elektroden eines Kondensators genommen werden.

Im einfachsten Spezialfalle $\mathfrak{F}$ = Kreisscheibe wurde die Frage der asymptotischen Darstellung von C schon von R. Clausius und R. Kirchhoff (wenn auch nicht streng mathematisch) behandelt - vgl. [9]. In diesem klassischen Falle läst sich über O(1) wesentlich mehr gewinnen. Neuere Untersuchungen mit anderen Methoden [11, 12] (dort weitere Literatur) geben sogar Reihenentwicklungen für diese (für $\epsilon = 0$ im analytischen Verhalten hochkomplizierte) Funktion von ϵ (im Falle $\mathfrak{F}$ = Kreisscheibe, bzw. in [12] allgemeiner 2 parallele ebene Platten, ebener Fall entsprechend $\mathfrak{C}$ = Strecke in unserer Terminologie schon in [10]). Allerdings scheint dies nicht so ohne weiteres auch zu konkreten Abschätzungen für O(1) zu führen, da unbekannte Koeffizienten auftreten.

Es bleiben natürlich auch hier zahlreiche Fragen offen, z. B.: Ist C als Funktion von ϵ für hinreichend kleine ϵ monoton fallend?

Es sei noch bemerkt, das man mit den Modulformeln in [4] (in [3] ebener Fall) genauso den Fall behandeln kann, das Komplement der beiden Elektroden des Kondensators ist nicht (wie hier sonst immer angenommen) ein homogenes Dielektrikum, sondern die Dielektrizitätskonstante ist eine fest vorgegebene Ortsfunktion. Besonders interessant ist der Fall, es ist diese Ortsfunktion eine Konstante $D > 1$ im Raum zwischen den Elektroden (durch die Normalen am Rande der Elektroden abgegrenzt bzw. im ebenen Fall durch die Normalen an den Endpunkten von $\mathfrak{C}$), während im verbleibenden "Ausengebiet" die Dielektrizitätskonstante $\equiv 1$ ist. Für $D \to \infty$ ergibt sich übrigens die in [6, 7] betrachtete Situation mit anderen asymptotischen Formeln für C als Funktion des kleinen Abstandes 2ϵ. Für den Fall speziell zweier Kreisplatten vgl. noch [1].

Abschliesend bemerken wir noch, das sich die Formeln des Typs (1) natürlich auch deuten lassen z. B. bei Strömungen durch poröse Medien von der einen "Elektrode" zur anderen. C gibt dann die Durchlässigkeit an.

2. Eine konforme Hilfsabbildung

Lange bekannt und vielfach in der Literatur dargestellt (vgl. z. B. [8] III, §2.49) ist der Fall des Kondensators (der ebenen Elektrostatik), bei dem die beiden Elektroden sich parallel im Abstand 2ϵ gegenüberstehende Strahlen sind. Es seien diese o. E. d. A. in einer komplexen $z = x + iy-$ Ebene gegeben durch $-\infty < x \leqslant 0$, $y = \pm\epsilon$. Das elektrostatische Feld wird in bekannter Weise [8] berechenbar durch die konforme Abbildung

$$z = \frac{\epsilon}{\pi}(e^w + w + 1) \tag{2}$$

des Parallelstreifens $|v| < \pi$ einer $w = u + iv$ - Ebene auf das Feldgebiet. Zwar wird hier natürlich $C = \infty$, aber die hier anfallenden Feld- bzw. Potentiallinien lassen sich - natürlich modifiziert - nutzbringend verwenden.

Entscheidend wird unten sein der

Hilfssatz. *Bei der Abbildung (2) geht der (auch für $u = 0$) analytische Bogen ($\mu > 0$ fest)*

$$w = u + i\pi - i\mu\epsilon\left(e^u - 1 - u - \frac{u^2}{2}\right), \qquad 0 \leqslant u \leqslant log\left(\pi\frac{l}{\epsilon}\right), \quad 0 < \epsilon < l, \tag{3}$$

in einen für $0 < u \leqslant \log\left(\pi\frac{l}{\epsilon}\right)$ analytischen und für $u = 0$ noch glatten Bogen B über, wobei im Anfangspunkt $z = i\epsilon$ horizontale Tangente vorliegt. Ferner gilt (bei festem μ) zu hinreichend kleinem l (dann fest gehalten) für alle hinreichend kleinen ϵ folgendes: $x(u)$ ist eigentlich monoton fallend, $y(u)$ eigentlich monoton steigend. Überdies gilt auf B

$$y \geqslant \epsilon + \frac{11}{18}\mu\pi x^2. \tag{4}$$

Beweis:

a) Bei der Abkürzung

$$U = \mu\epsilon\left(e^u - 1 - u - \frac{u^2}{2}\right) = \mu\epsilon\left(\frac{u^3}{6} + \frac{u^4}{24} + ...\right) < \mu\epsilon e^u \leqslant \mu\pi l \tag{5}$$

bekommt B die Darstellung

$$z(u) = x(u) + iy(u) = \frac{\epsilon}{\pi}(u + 1 - e^u \cos U + i\pi - iU + ie^u \sin U). \tag{6}$$

Man errechnet für $u = 0$ die Potenzreihenentwicklungen

$$x(u) = -\frac{\epsilon}{2\pi}u^2 + .., y(u) = \epsilon + \frac{\epsilon^2\mu}{6\pi}u^4 + ...,$$

also

$$(y(u) - \epsilon)x^{-2} \to \frac{2}{3}\mu\pi \quad \text{für} \quad u \to 0,$$

woraus das Tangentenverhalten von B im Endpunkt $z = i\epsilon$ folgt.

b) Die Monotonie von $x(u)$ ergibt sich bei

$$U' = \frac{dU}{du} = \mu\epsilon(e^u - 1 - u) < \mu\epsilon e^u \leqslant \mu\pi l$$

aus

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2}\frac{dx}{du} &= 1 - e^u[\cos U - U' \sin U] \\ &< 1 - (1+u)\left[1 - \frac{1}{2}U^2 - U\mu\pi l\right] \\ &= -u\left[1 - \frac{1}{2}U^2 - U\mu\pi l - \frac{1}{2}\frac{U^2}{u} - \frac{U}{u}\mu\pi l\right] < 0 \\ &\qquad \text{für} \quad 0 < u \leqslant \log\left(\pi\frac{l}{\epsilon}\right)\end{aligned}$$

(l hinreichend klein), da die Klammer [ ] wenig von 1 abweicht. Denn es läst sich z. B. abschätzen

$$\frac{U}{u} \leqslant \mu\epsilon\frac{e^u - 1}{u} \leqslant \mu\epsilon e^u \leqslant \mu\pi l.$$

Die Monotonie von $y(u)$ ergibt sich entsprechend wegen

$$\frac{\pi}{\epsilon}\frac{dy}{du} = e^u \sin U + [e^u \cos U - 1]U' > 0,$$

da

$$e^u \cos U - 1 > (1+u)\left(1 - \frac{1}{2}U^2\right) - 1 = u\left[1 - \frac{1}{2}U^2 - \frac{1}{2}\frac{U^2}{u}\right] > 0.$$

c) Zum Beweis von (4) schlieslich notieren wir zunächst

$$(e^u - 1)\left(e^u - 1 - u - \frac{u^2}{2}\right) \geqslant \frac{2}{3}(e^u - 1 - u)^2 \qquad \text{für} \quad u \geqslant 0, \tag{7}$$

mit Gleichheit genau für $u = 0$. Denn diese Ungleichung ist für alle grosen u offenbar richtig, für kleine (positive) u nach der Potenzreihenentwicklung, und für ein endliches (Rest-) Intervall folgt (7) z. B. nach [5].

Ferner notieren wir die Ungleichung

$$\mu^2\epsilon^2\left(e^u-1-u-\frac{u^2}{2}\right)^3 e^u \leqslant \frac{1}{2}(e^u-1)\left(e^u-1-u-\frac{u^2}{2}\right) \qquad (8)$$

bei den im Hilfssatz vorausgesetzten Einschränkungen an u, l, ϵ . Denn (8) folgt aus

$$\mu^2\epsilon^2\left(e^u-1-u-\frac{u^2}{2}\right)^3 e^u \leqslant \mu^2\epsilon^2\left(e^u-1-u-\frac{u^2}{2}\right)(e^u-1)e^{2u}$$

und

$$\mu^2\epsilon^2 e^{2u} \leqslant (\mu\pi l)^2.$$

Damit bekommen wir aus (7) und (8) schlieslich

$$\begin{aligned}(e^u-1)&\left(e^u-1-u-\frac{u^2}{2}\right)-e^u\frac{1}{6}\mu^2\epsilon^2\left(e^u-1-u-\frac{u^2}{2}\right)^3\\ &\geqslant \frac{11}{12}(e^u-1)\left(e^u-1-u-\frac{u^2}{2}\right)\geqslant\frac{11}{12}\cdot\frac{2}{3}(e^u-1-u)^2.\end{aligned}$$

Nach Multiplikation mit $\mu\epsilon$ fliest hieraus

$$\begin{aligned}e^u\left[U-\frac{1}{6}U^3\right]-U &\geqslant \frac{11}{18}\mu\epsilon(e^u-1-u)^2,\\ \frac{\pi}{\epsilon}[y(u)-\epsilon] &= e^u\cdot\sin U-U\\ &\geqslant \frac{11}{18}\mu\epsilon(e^u\cdot\cos U-1-u)^2=\frac{11}{18}\mu\epsilon\left[-\frac{\pi}{\epsilon}x(u)\right]^2.\end{aligned}$$

Daraus folgt (4). Der Hilfssatz ist bewiesen.

3. Abschätzung von C nach unten

Es sei $\mathfrak{s}$ eine einparametrige (hinreichend glatte) Kurvenschar, die im Feldgebiet vom Satz liegt (dieses nicht vollständig ausfüllen mus), wobei jede Einzelkurve $\mathfrak{C}(t)$ (t = Scharparameter innerhalb eines Intervalles) von der einen Elektrode zur anderen verläuft. Die Einzelkurven $\mathfrak{C}(t)$ seien doppelpunktfrei, je zwei Kurven mögen sich nicht schneiden. Der infinitesimale Abstand zwischen den Kurven $\mathfrak{C}(t)$ und $\mathfrak{C}(t+dt)$ im betreffenden Punkte sei adt. Dann gilt nach [2], [3] für den Modul $M(\mathfrak{s})$ (= reziproke extremale Länge von $\mathfrak{s}$)

$$C \geqslant M(\mathfrak{s}) = \int \frac{dt}{\int_{\mathfrak{C}(t)}\frac{ds}{a}}\ . \qquad (9)$$

Hier und im folgenden bezeichne s die Bogenlänge auf der Kurve $\mathfrak{C}(t)$. Um hiermit möglichst gute Abschätzungen zu bekommen, gilt es, eine Schar $\mathfrak{s}$ zu finden, die "nahe" der Schar der Feldlinien liegt. Es zeigt sich, das zur Herleitung von (1) ausreichend ist, folgende Schar $\mathfrak{s}$, bestehend aus drei Teilscharen $\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2, \mathfrak{s}_3$, zu nehmen.

Zunächst sei $\mathfrak{s}_1$ die Schar der Strecken der Länge 2ϵ, die zu $\mathfrak{C}$ orthogonal sind, wobei die Mittelpunkte auf $\mathfrak{C}$ liegen. Man wählt naheliegend als Scharparameter t die Bogenlänge auf $\mathfrak{C}$. Wird die Bogenlänge s auf $\mathfrak{C}(t)$ für den Mittelpunkt von $\mathfrak{C}(t)$ noch $= 0$ gesetzt, wird $a = 1 + ks$. Dabei sei $k =$ vorzeichenbehaftete Krümmung von $\mathfrak{C}$, so das $iZ'' = kZ'$. Also wird analog zu (9)

$$M(\mathfrak{s}_1) = \int\limits_0^L \frac{dt}{\int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \frac{ds}{1+ks}} = \frac{L}{2\epsilon} + O(\epsilon). \tag{10}$$

(vgl. auch [6], (8)).

$\mathfrak{s}_2$ sei die Schar der Kreisbögen, konzentrisch zu dem einen Endpunkt von $\mathfrak{C}$, wobei der Radius zwischen ϵ und einem Wert $R' > \epsilon$ variiert und diese Kreisbögen vom "äuseren Ufer" der einen Elektrode zum "äuseren Ufer" der anderen Elektrode des Kondensators verlaufen (dabei keinen Punkt mit den Kurven von $\mathfrak{s}_1$ gemeinsam habend). Wenn R' hinreichend klein (dann fest) gewählt wird, dann schneiden die zu diesem Endpunkt von $\mathfrak{C}$ konzentrischen Kreise der Radien $r > R'$ unser $\mathfrak{C}$ genau einmal, so das wir es bei hinreichend kleinem ϵ wirklich mit genau einem Kreisbogen zum jeweiligen Radius $r(\epsilon \leqslant r \leqslant R')$ zu tun haben.

$\mathfrak{s}_3$ werde analog beim anderen Endpunkt von $\mathfrak{C}$ definiert. Hier mögen die Radien der analogen Kreisbögen zwischen ϵ und einem Wert $R'' > \epsilon$ variieren.

Wenn R' und R'' hinreichend klein, liegen $\mathfrak{s}_2$ und $\mathfrak{s}_3$ (und $\mathfrak{s}_1$) punktfremd, so das in [9] $\mathfrak{s} = \mathfrak{s}_1 + \mathfrak{s}_2 + \mathfrak{s}_3$ tauglich ist.

Wir sehen nun zu $\mathfrak{s}_2$ und $\mathfrak{s}_3$ mit r als Scharparameter, das $a \equiv 1$,

$$M(s_2) \geqslant \int\limits_\epsilon^{R'} \frac{dr}{2\pi r} = \frac{1}{2\pi} \log \frac{R'}{\epsilon}, \qquad M(s_3) \geqslant \int\limits_\epsilon^{R''} \frac{dr}{2\pi r} = \frac{1}{2\pi} \log \frac{R''}{\epsilon}. \tag{11}$$

Dabei haben wir nach (9)

$$
\begin{aligned}
C &\geqslant M(\mathfrak{s}_1)+M(\mathfrak{s}_2)+M(\mathfrak{s}_3)\\
&> \int\limits_0^L \frac{dt}{\int_{-\epsilon}^{+\epsilon}\frac{ds}{1+ks}}+\frac{1}{2\pi}\log\frac{R'R''}{\epsilon^2}\\
&> \frac{L}{2\epsilon}+\frac{1}{2\pi}\log\frac{R'R''}{\epsilon^2}-\frac{\epsilon}{6}\int\limits_0^L k^2dt+O(\epsilon^3).
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Das liefert schon (1) mit $\geqslant$ statt $=$.

4. Abschätzung von C nach oben

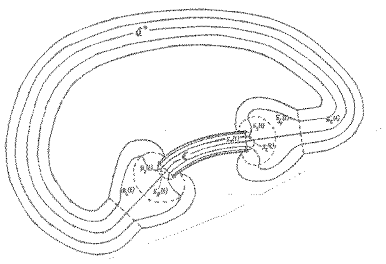
Das ist etwas kniffliger. Wir suchen jetzt eine einparametrige Schar $\mathfrak{s}$ von geschlossenen Jordankurven (wieder hinreichend glatt), die im Feldgebiet zum Kondensator vom Satz in §1 liegt (dieses wieder nicht vollständig ausfüllen mus), wobei jede Einzelkurve auf der Zahlenkugel die beiden Elektroden trennt und die Einzelkurven zueinander punktfremd sind. Jetzt wird statt (9) nach [2] (vgl. auch [6] bei einer analogen Anwendung)

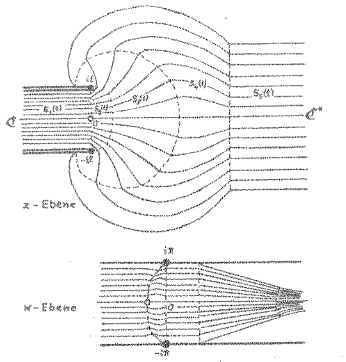
$$\frac{1}{C}\geqslant M(\mathfrak{s}) \tag{13}$$

mit einer zu (9) analogen Formel für $M(\mathfrak{s})$.

Es gilt nun, mit dem Ziele einer guten Abschätzung eine Schar $\mathfrak{s}$ nahe der Schar der Potentiallinien zu verwenden. Besonders sensibel ist dabei neben dem Bereich "zwischen" den Elektroden der Bereich in der Nähe der Endpunkte von $\mathfrak{C}$, wo wir zur Konstruktion von $\mathfrak{s}$ tatsächlich die Hilfsabbildung von §2 verwenden.

Die Sachlage wird deutlicher, wenn wir zunächst die vereinfachende Zusatzannahme machen, $\mathfrak{C}$ hat in einer Umgebung der Endpunkte identisch verschwindende Krümmung, ist also dort geradlinig. Die geschlossenen Einzelkurven von $\mathfrak{s}$, zum jeweiligen festen Scharparameter t anfallend, werden aus 8 Teilbögen $\mathfrak{s}_1(t),\ldots,\mathfrak{s}_8(t)$ der Reihe nach wie folgt zusammengesetzt. Man vergleiche hierzu Fig. 1 und Fig. 2. Letztere stellt vergrösert die Situation in Umgebung des einen Endpunktes (hier als $z=0$ angenommen) dar.




z - Ebene
w - Ebene

a) $\mathfrak{s}_1(t)$ sei der durch $z(S,t) = Z(S) + itZ'(S)$ entstehende Parallelbogen zu $\mathfrak{C}, -\epsilon < t < +\epsilon, \quad 0 \leqslant S \leqslant L$. Dann ist $a \equiv 1$ und damit

$$\int_{\mathfrak{s}_1(t)} \frac{ds}{a} = \int_{\mathfrak{s}_1(t)} ds = \int_0^L (1+kt)dS = L + O(\epsilon). \tag{14}$$

Dabei ist hier und im folgenden $O(\epsilon)/\epsilon$ in t sogar gleichmässig beschränkt.

b) Vor der Definition von $\mathfrak{s}_2(t)$ nehmen wir zunächst $\mathfrak{s}_3(t)$. Dazu sei ohne Einschränkung der Allgemeinheit das "rechte" Ende von $\mathfrak{C}$ (entsprechend S nahe L) wie in §2 auf der negativ reellen Achse gelegen und in $z = 0$ (entsprechend $S = L$) der z-Ebene endend. Dann sei $\mathfrak{s}_3(t)$ das Bild von

$$v = \frac{\pi}{\epsilon} t (= const), \qquad |t| < \epsilon, \qquad 0 \leqslant u \leqslant \log(\pi l/\epsilon). \tag{15}$$

Über das (hinreichend kleine) $l > \epsilon$ werden wir bei $\mathfrak{s}_4(t)$ unten verfügen. Bezeichnet a_z bzw. $a_w (\equiv \pi/\epsilon)$ mit verdeutlichendem Index die oben genannte Abstandsgröse a zwischen infinitesimal benachbarten (zu t und $t + dt$ gehörenden) Kurven der Scharen in der z-Ebene bzw. w-Ebene, so gilt wegen der Konformität von (2) $a_z = a_w \cdot |dz/dw|$,

$$\int_{\mathfrak{s}_3(t)} \frac{ds}{a_z} = \frac{\epsilon}{\pi} \int_{\mathfrak{s}_3(t)} \left|\frac{dw}{dz}\right| ds = \frac{\epsilon}{\pi} \log(\pi l/\epsilon). \tag{16}$$

Analog werden in Umgebung des anderen Endes von $\mathfrak{C}$ die $\mathfrak{s}_7(t)$ definiert.

c) Nun sei $\mathfrak{s}_2(t)$ die Verbindungsstrecke des "rechten" Endpunktes $Z(L) + itZ'(L) = it$ von $\mathfrak{s}_1(t)$ und des "linken" Endpunktes $z(w)$ mit $w = i\frac{\pi}{2}t$ von $\mathfrak{s}_3(t)$ (mit gleichem t). Letzterer errechnet sich nach (2) zu

$$\frac{\epsilon}{\pi}\left(1 + \cos\frac{\pi}{\epsilon}t\right) + it + i\frac{\epsilon}{\pi}\sin\frac{\pi}{\epsilon}t.$$

Damit starten die $\mathfrak{s}_2(t)$ auf der Strecke $x = 0$, $|y| < \epsilon$ "fächerförmig", d. h. der elementar zu $\alpha = \frac{\pi}{2\epsilon}t$ errechnete Anstiegswinkel ist monoton in t. Auf dieser Strecke $\mathfrak{s}_2(t)$ nimmt dadurch a sein Minimum auf dem linken Endpunkt an, und dieser Minimalwert ist

$$\cos\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2\epsilon}t\right).$$

Damit wird

$$\int_{\mathfrak{s}_2(t)} \frac{ds}{a} \leqslant \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2\epsilon}t\right)} \cdot \int_{\mathfrak{s}_2(t)} ds = \frac{\frac{\epsilon}{\pi}\left(1 + \cos\frac{\pi}{\epsilon}t\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2\epsilon}t\right)} = 2\frac{\epsilon}{\pi} = O(\epsilon). \tag{17}$$

Analog werden in Umgebung des anderen Endpunktes von $\mathfrak{C}$ die $\mathfrak{s}_8(t)$ definiert.

d) Zur Fortsetzung von $\mathfrak{s}_3(t)$ über den "rechten" Endpunkt fixieren wir zunächst eine Verbindung $\mathfrak{C}^*$ der Endpunkte von $\mathfrak{C}$, so das $\mathfrak{C}+\mathfrak{C}^*$ eine geschlossene Jordankurve bildet. $\mathfrak{C}^*$ sei ebenfalls ein dreimal stetig differenzierbarer glatter Bogen, in der Nähe der Endpunkte mit verschwindender Krümmung, also dort streckenförmig, wobei glatter Übergang zu $\mathfrak{C}$ erfolgen möge. Nun sei $\mathfrak{s}_5(0)$ der Teilbogen von $\mathfrak{C}^*$, der entsteht, wenn an beiden Endpunkten jeweils die Längen $2\,l$ abgeschnitten werden. Wir können dabei l so klein annehmen, das auf den Endstücken von $\mathfrak{C}^*$ sogar der Längen $3\,l$ die Krümmung $\equiv 0$ ist. Die restlichen $\mathfrak{s}_5(t)$ seien die Parallelkurven zu $\mathfrak{s}_5(0)$ im (wieder vorzeichenbehafteten) Abstand $\frac{l}{2\epsilon}t$, $-\epsilon < t < \epsilon$. Es sei l dabei auch so klein (und dann fixiert und damit relativ zu ϵ gros), das im Endeffekt eine taugliche Schar $\mathfrak{s}$ entsteht, d. h. alle Einzelkurven doppelpunktfrei sind und getrennt liegen. Jedenfalls liefert (vgl. die analoge Situation bei $\mathfrak{s}_1(t)$) wegen $a=\frac{l}{2\epsilon}$

$$\int\limits_{\mathfrak{s}_5(t)} \frac{ds}{a} = O(\epsilon) \tag{18}$$

später keinen wesentlichen Anteil.

e) $\mathfrak{s}_4(t)$ wird nun zu jedem festen t als "Zwischenstück" zwischen $\mathfrak{s}_3(t)$ und $\mathfrak{s}_5(t)$ so definiert, das nach Übertragung in die w-Ebene gemäs (2) eine Strecke entsteht. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann dabei das "rechte" Ende von $\mathfrak{C}$ in der Länge wie unter b) angenommen werden, so das insbesondere $z=0$ Endpunkt ist. Man beachte dazu, das die Endpunkte der $\mathfrak{s}_3(t)$ nach (2) "nahezu" auf $|z|=l$ liegen.

Analog zur Rechnung bei $\mathfrak{s}_3(t)$ haben wir

$$\int\limits_{\mathfrak{s}_4(t)} \frac{ds}{a_z} = \int \frac{|dw|}{a_w} = O(\epsilon), \tag{19}$$

da die Längen der Strecken in der w-Ebene als Funktion von t und ϵ beschränkt sind und auserdem gilt $\epsilon \cdot a_w \geqslant$ positive Konstante.

Analog werden in Umgebung des anderen Endpunktes von $\mathfrak{C}$ die $\mathfrak{s}_6(t)$ definiert.

f) Nun sind die geschlossenen Kurven von $\mathfrak{s}$ alle definiert, und die zugehörigen Abschätzungen führen wegen (14) ... (19) zu

$$\frac{1}{C} \geqslant M(\mathfrak{s}) \geqslant \int\limits_{-\epsilon}^{+\epsilon} \frac{dt}{L + \frac{2\epsilon}{\pi}\log(\pi l/\epsilon) + O(\epsilon)} = \frac{2\epsilon}{L + \frac{2\epsilon}{\pi}\log(\pi l/\epsilon) + O(\epsilon)}. \tag{20}$$

Im Verein mit (12) haben wir damit den Satz bewiesen unter obiger vorläufiger Zusatzvoraussetzung, $\mathfrak{C}$ ist an den Enden geradlinig.

Man beachte also: die Kurven $\mathfrak{s}_1(t)$, $\mathfrak{s}_2(t)$, $\mathfrak{s}_5(t)$, $\mathfrak{s}_8(t)$ werden in der z-Ebene selbst als Strecken definiert, die Kurven $\mathfrak{s}_3(t)$, $\mathfrak{s}_4(t)$, $\mathfrak{s}_6(t)$, $\mathfrak{s}_7(t)$ in einer Hilfsebene wie der w-Ebene.

g) Jetzt lösen wir uns von der bisher gemachten Zusatzvoraussetzung der Geradlinigkeit von $\mathfrak{C}$ an den beiden Enden. Die Kurven $\mathfrak{s}_1(t)$ seien auch jetzt im allgemeinen Fall $\mathfrak{C}$ durchweg wieder die Parallelkurven zu $\mathfrak{C}$. Dazu wird $\mathfrak{C}^*$ wieder wie oben gewählt, geradlinig an den Enden von $\mathfrak{C}^*$ mit glattem Übergang zu $\mathfrak{C}$. Es bleiben $\mathfrak{s}_2(t)$, $\mathfrak{s}_8(t)$, $\mathfrak{s}_5(t)$ wie oben, also auch die zugehörigen Abschätzungen der Integrale $\int ds/a$.

Lediglich die Definition von $\mathfrak{s}_3(t)$ und $\mathfrak{s}_4(t)$ (analog $\mathfrak{s}_7(t)$ und $\mathfrak{s}_6(t)$) mus modifiziert werden. Wieder können wir annehmen, das das "rechte" Ende von $\mathfrak{C}$ in $z = 0$ endet, die negative Achse in $z = 0$ berührend.

Die Idee ist nun, diese allgemeine Situation durch eine Deformation aus dem bisher betrachteten Falle, das rechte Ende von $\mathfrak{C}$ ist streckenförmig, zu erhalten, wobei sich die Werte von a und damit von $\int ds/a$ nur um einen Fehler höherer Ordnung modifizieren, der am Ergebnis (20) nichts verändert.

Die beiden äuseren Ufer der Elektroden des Kondensators gehen durch die Umkehrung von $z(w)$ von (2) über in zwei Kurven, die in $\pm\pi i$ nach rechts mit horizontaler Tangente starten. Nachdem man die Krümmung der beiden Elektroden in $+\pi i$ bestimmt hat, kann man ein positives μ so angeben (wird dann festgehalten), das ein hinreichend kleiner Bogen von

$$y = \epsilon + \frac{11}{18}\mu\pi x^2 \qquad (x \geqslant 0)$$

oberhalb der oberen Elektrode liegt und ein hinreichend kleiner Bogen von

$$y = -\epsilon - \frac{11}{18}\mu\pi x^2 \qquad (x \geqslant 0)$$

unterhalb der unteren Elektrode. Diese Bögen liegen kann jedenfalls im "äuseren" Feldgebiet, so das wir nach dem Hilfssatz von §2. statt $\mathfrak{s}_3(t)$

die Kurven $\mathfrak{s}_3^*(t)$ nehmen können, die definiert sind durch

$$\begin{aligned} &v = \left[\pi - \mu\epsilon\left(e^u - 1 - u - \frac{u^2}{2}\right)\right]\frac{t}{\epsilon}, \qquad |t| < \epsilon, \\ &0 \leqslant u \leqslant \log(\pi l/\epsilon) \equiv u_0. \end{aligned} \tag{21}$$

Die Ersetzung des durch (15) definierten $\mathfrak{s}_3(t)$ (in der w-Ebene jeweils eine simple Strecke) durch dieses $\mathfrak{s}_3^*(t)$ bedeutet die angekündigte Deformation. Nach dieser Deformation erhält man jetzt mit der Schar (21)

$$a_w = \frac{\partial v}{\partial t}\cos\beta,$$

wobei β der Anstiegswinkel der betreffenden Einzelkurve (21) gegen die reelle Achse ist, also tg $\beta = |\partial v/\partial u|$. Damit wird

$$\frac{|dw|}{a_w} = \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\beta}\,du}{(\partial v/\partial t)\cos\beta} = \frac{1 + \operatorname{tg}^2\beta}{\partial v/\partial t}du = \frac{\epsilon}{\pi}\frac{1 + [\mu t(e^u - 1 - u)]^2}{1 - \frac{1}{\pi}\mu\epsilon\left(e^u - 1 - u - \frac{u^2}{2}\right)}du,$$

$$\int\limits_{\mathfrak{s}_3^*(t)} \frac{|dw|}{a_w} - \frac{\epsilon}{\pi}u_0 \leqslant \frac{\epsilon}{\pi}\int\limits_0^{u_0} \frac{(\mu\epsilon)^2 e^{2u} + \frac{1}{\pi}\mu\epsilon e^u}{1 - \frac{1}{\pi}\mu\epsilon\pi\frac{l}{\epsilon}}du = O(\epsilon).$$

Damit haben wir in Modifizierung von (16)

$$\int\limits_{\mathfrak{s}_3^*(t)} \frac{ds}{a_z} = \int\limits_{\mathfrak{s}_3^*(t)} \frac{|dw|}{a_w} = \frac{\epsilon}{\pi}\log(\pi l/\epsilon) + O(\epsilon). \tag{22}$$

Wie die Kurven $\mathfrak{s}_4(t)$ (analog damit $\mathfrak{s}_6(t)$) definiert werden, liegt auf der Hand. Es werden wieder Strecken genommen, nur etwas zusammengeschoben, weil die linken Endpunkte enger zusammen liegen. Am Ergebnis (19) ändert sich nichts.

So erhalten wir endgültig wieder - insbesondere (22) benutzend - wieder das Ergebnis (20). Unser Satz ist damit endgültig bewiesen.

References

1. W. Chew, J. Kong, *Asymptotic formula for the capacitance of two oppositely charged disk,* Math. Proc. Cambrigde Philos. Soc. **89**, No. 3 (1981), 373–384.
2. R. Kühnau, *Über gewisse Extremalprobleme der quasikonformen Abbildung,* Wiss. Zeitschrift d. Martin-Lüther-Univ. Halle-Wittenberg, Math.-Nat. R., **13**, No. 1 (1964), 35–39.

3. R. Kühnau, *Quasikonforme Abbildungen und Extremalprobleme bei Feldern in inhomogenen Medien,* J. reine angew. Math. **231** (1968), 101–113.
4. R. Kühnau, *Der Modul von Kurven- und Flächenscharen und räumliche Felder in inhomogenen Medien,* J. reine angew. Math. **243** (1970), 184–191.
5. R. Kühnau, *Eine Methode, die Positivität einer Funktion zu prüfen,* Z. angew. Math. Mech. **74** (1994), 140–142.
6. R. Kühnau, *Der konforme Modul schmaler Vierecke,* Math. Nachr. **175** (1995), 193–198.
7. R. Kühnau, *Die Kapazität dünner Kondensatoren,* Math. Nachr. (im Druck).
8. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, *Методы теории функций комплексного переменного,* 3-е изд., Москва 1965. Deutsche Übersetzung: M. A. Lawrentjew und B. W. Schabat, Methoden der komplexen Funktionentheorie, VEB Deutscher Verlag der Wiss., Berlin, 1967.
9. G. Pólya and G. Szegö, Isoperimetric inequalities in mathematical physics, Princeton Univ. Press, Princeton, 1951. Русский перевод: Г. Полиа и Г. Сеге, Изопериметрические неравенства в математической физике, М., 1962.
10. И. Б. Симоненко, А. А. Чекулаева, *О емкости конденсатора, состоящего из бесконечных полос,* Изв. вузов. Электромеханика 1972, No. 4, 362–370.
11. Я. С. Сойбельман, *Асимптотика емкости конденсатора с пластинами произвольной формы,* Сиб. мат. ж., **25**, No. 6 (1984), 167–181.
12. J. Soibelman, *Condenser capacity and invariants of Riemannian submanifolds,* C. R. Acad. Sci. Paris **323**, Ser. I (1996) 507–510.

Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg
Fachbereich Mathematik und Informatik
D-06099 Halle (Saale)
Deutschland

Поступило 11 мая 1998 г.