Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 254, 1998 г.

Н. А. Широков

КОНСТРУКТИВНЫЕ ОПИСАНИЯ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМИАЛЬНЫМИ ПРИБЛИЖЕНИЯМИ. I

Одна из больших ветвей современной конструктивной теории функций начинается с доклада С. М. Никольского в 1956 году на III Всесоюзном математическом съезде. Вопрос С. М. Никольского заключался в описании с помощью оценок полиномиальной аппроксимации, предположительно зависящих от точек компакта, различных конкретных пространств функций, непрерывных на компактах и аналитических на их внутренностях. Первый существенный ответ на этот вопрос был дан В. К. Дзядыком в конце 50х годов. Им были обнаружены достаточно универсальные шкалы приближений [1, 2], зависящие от компактов и классов функций, для которых удалось доказать утверждения, аналогичные классическим теоремам Джексона–Бернштейна для приближений тригонометрическими полиномами. В последующие десятилетия многие математики выяснили пригодность шкал В. К. Дзядыка для широких классов множеств и функций (достаточно подробные обзоры и библиографию см. в монографиях П. М. Тамразова [3] и В. К. Дзядыка [4]). Однако оказалось, что шкалы В. К. Дзядыка не универсальны: в [5] был анонсирован пример континуума, содержащего внутренние точки, для которого эти шкалы не давали аналогов полного описания классов Гёльдера; в книге В. К. Дзядыка [4] приведен простой пример континуума без внутренних точек, также не укладывающегося в требуемую схему; еще один тип контрпримеров указан В. В. Андриевским [6].

Поэтому естественно встал вопрос о поиске шкал, с помощью которых можно конструктивно описывать классы функций на континуумах, выпадающих из схемы приближения по В. К. Дзядыку. Поскольку шкал оказалось много [5], то представляется естественным выделять те из них, которые описывают классы функций по возможности “экономно” (см. [5, 7]). Подробно вышесказанные соображения предполагается обсудить в части II настоящей работы. В настоящей части I подробно описано построение континуума, существование которого анонсировано в [5], а для подготовки результатов части II приводится доказательство результата о приближении, анонсированного в [8].

1. Обозначения и вспомогательные результаты

В дальнейшем $\mathbb{D}$ – единичный круг комплексной плоскости, $B_r(z)$ – круг радиуса r с центром в точке z. Если L – незамкнутая кривая, $z, \zeta \in L$, то $(z,\zeta)_L \subset L$ – дуга L с концами z и ζ; если L – замкнутая жорданова кривая, то $(z,\zeta)_L$ означает ту из двух дуг с концами z и ζ, диаметр которой меньше. Если D – ограниченный континуум комплексной плоскости, то $\psi_{[D]}$ – функция, конформно отображающая $\mathbb{C}\setminus\mathbb{D}$ на $\mathbb{C}\setminus D$ так, что $\psi_{[D]}(\infty)=\infty$, $\psi'_{[D]}(\infty)>0$, $\varphi_{[D]}$ – обратное к $\psi_{[D]}$ отображение.

Если $\Gamma=\partial D$, $h>0$, то $\Gamma_h=\psi_{[D]}((1+h)\partial\mathbb{D})$,

$$\rho_h(z;D)=\operatorname{dist}(z,\Gamma_h),\quad \Gamma=\partial D.$$

Жорданову область D назовем радоновской областью, если ее граница в каждой точке имеет односторонние касательные и угол наклона ориентированный касательной к оси абсцисс является функцией ограниченной вариации. Если граница ∂D радоновской области D имеет $N>1$ точек $z_1,\dots,z_N$, занумерованных в порядке положительного обхода ∂D, в которых внешний по отношению к D угол равен 2π, и $\zeta_k=\psi_{[D]}(z_k)$, $k=1,\dots,N$, то пусть $\gamma_k\subset\partial\mathbb{D}$ – дуга с концами ζ_k, ζ_{k+1}, $(\zeta_{N+1}=\zeta_1)$, $\Gamma_k=\psi_{[D]}(\gamma_k)$, и для $z\in\Gamma_k$ полагаем $\Gamma_h(z)=\psi_{[D]}((1+h)\gamma_k)$,

$$\rho_h^*(z)=\operatorname{dist}(z,\Gamma_h(z)).$$

Если только что введенное число $N>1$, то пусть $\zeta_{k+\frac12}$ – середина дуги γ_k, $\zeta_{\frac12}=\zeta_{N+\frac12}$; если же $N=1$, положим $\zeta'_2=-\zeta_1$, точки $\zeta_{\frac12}$, $\zeta_{\frac32}$ – середины дуг с концами в точках ζ_1, ζ'_2, причем $\zeta_{\frac12}$, ζ_1, $\zeta_{\frac32}$, ζ'_2 следуют в положительном направлении. Далее, при любом N положим $\gamma_k^{\pm}=(\zeta_k,\zeta_{k\pm\frac12})_{\gamma_k}$, наконец, положим $\Gamma_k^{\pm}=\psi_{[D]}(\gamma_k^{\pm})$, $k=1,\dots,N$.

Пусть $H_\alpha(D)$ – пространство функций, аналитических во внутренности D и удовлетворяющих на D условию Гельдера порядка α;

$$|||\,f\,|||_{H_\alpha(D)} = \sup_{\substack{z,\zeta\in D\\ z\neq\zeta}} \frac{|f(z)-f(\zeta)|}{|z-\zeta|^\alpha}, \quad 0<\alpha<1,$$

$$|||\,f\,|||_{H_\alpha(D)} = |||\,f^{(r)}\,|||_{H_\sigma(D)}, \quad \alpha = r+\sigma, \quad 1\leqslant r, \quad 0<\sigma<1;$$

$H_{r,\omega}(D)$ – пространство функций f, аналитических во внутренности D, для которых

$$|||\,f\,|||_{H_{r,\omega}(D)} = \sup_{\substack{z,\zeta\in D\\ z\neq\zeta}} \frac{|f^{(r)}(z)-f^{(r)}(\zeta)|}{\omega(|z-\zeta|)} < \infty.$$

Соотношение $a \asymp b$ означает наличие постоянных c_1, c_2, не зависящих от существенных для рассматриваемой ситуации параметров, для которых $c_1 a \leqslant b \leqslant c_2 b$.

Приведем теперь результаты о функции $\psi_{[D]}$, которые чрезвычайно существенны для дальнейшего, поскольку позволяют получить информацию о поведении функций ρ_h, ρ_h^*.

Теорема A (см. Г. М. Голузин [9], гл. 9 или П. Дюрен [10], гл. 8). *Пусть D – область с ограниченным граничным вращением, $\psi = \psi_{[D]}$. Тогда справедлива формула*

$$\psi'(\zeta) = \exp\int_0^{2\pi} \log\Big(1-\frac{e^{i\theta}}{\zeta}\Big)\,d\mu(\theta), \tag{1.1}$$

где μ – вещественный заряд, $\int_0^{2\pi}|d\mu(\theta)|<\infty$,

$$\int_0^{2\pi} d\mu(\theta) = 2, \quad \int_0^{2\pi} e^{i\theta}\,d\mu(\theta) = 0.$$

Здесь μ имеет нагрузки, по модулю не превосходящие 1.

Если $t_j^0 = e^{i\theta_j^0}$ – любая точка, переходящая при отображении ψ в точку на границе ∂D, в которой внешний по отношению к D угол равен 2π, то заряд μ имеет в точке θ_j^0 нагрузку, равную 1.

Используя теорему A, можно достаточно точно оценивать величины $|\psi(t_1)-\psi(t_2)|$, $t_1, t_2 \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{D}$. Детали получения этих оценок будем, как правило опускать, так как основой их является формула (1.1), включенная в элементарные аналитические и геометрические рассмотрения.

2. Теорема 1 о приближении. Формулировка и начало доказательства

В нижеследующей теореме 1 область D имеет ограниченное граничное вращение, ее граница не содержит нулевых внешних по отношению к D углов и содержит конечное число внешних по отношению к D углов, равных 2π. Пусть $U_j \ni z_j$ – окрестности, содержащие все точки z_j, $j = 1, \dots, N$, являющиеся вершинами таких углов; окрестности U_j предполагаем выбранными таким образом, что для заряда μ, фигурирующего в (1.1), и дуг $s_j = \varphi(\partial\mathbb{D} \cap U_j)$ справедливо соотношение

$$\int\limits_{s_j} \left| \, d\mu(e^{i\theta}) \, \right| < \frac{9}{8}. \tag{2.1}$$

В дальнейшем на дугах $\Gamma_k^{\pm}$, определенных в п. 1, направление обхода индуцировано положительным обходом ∂D. Если $z \in U_j$, то $z^{\pm}(z) \in \Gamma_j^{\pm}$ – такие точки, что $|z - z^{\pm}(z)| = \operatorname{dist}(z, \Gamma_j^{\pm})$.

Теорема 1. *Пусть область D введена выше, точки $z_j \in \partial D$ и окрестности U_j обладают указанными ранее свойствами. Предположим, что функция $f \in H_{r,\omega}(D)$, $z \in U_j$, $M > 0$ – любое число. Тогда существуют полиномы P_n, $\deg P_n \leqslant n$, таких, что справедливо неравенство*

$$|f(z) - P_n(z)| \leqslant C\Big[\rho^{*r}_{\frac{1}{n}}(z^+(z))\,\omega(\rho^*_{\frac{1}{n}}(z^+(z))\Big(\frac{\rho^*_{\frac{1}{n}}(z^+(z))}{\rho^*_{\frac{1}{n}}(z^+(z)) + |z - z^+(z)|}\Big)^M +$$

$$+\rho^{*r}_{\frac{1}{n}}(z^-(z))\,\omega(\rho^*_{\frac{1}{n}}(z^-(z))\Big(\frac{\rho^*_{\frac{1}{n}}(z^-(z))}{\rho^*_{\frac{1}{n}}(z^-(z)) + |z - z^-(z)|}\Big)^M\Big], \tag{2.2}$$

причем постоянная C не зависит от n и z.

Замечание. Впервые расстояния $\rho^*_{\frac{1}{n}}(z)$, модифицирующие для областей с возможными внешними углами, равными 2π, классические расстояния $\rho_{\frac{1}{n}}(z)$, введены В. К. Дзядыком в [1], и формулировка теоремы 1 была приведена в [8]. Впоследствии расстояния $\rho^*_{\frac{1}{n}}(z)$ и теорема 1 были распространены В. В. Андриевским [11] на случай незамкнутых квазиконформных дуг. Тем не менее результат теоремы 1 не покрывается утверждениями в [11].

Доказательство теоремы 1 (начало доказательства)

Приступим к доказательству теоремы 1, которое закончим в п. 3 и 4. Учитывая, прежде всего, что справедливы неравенства

$$\rho^*_{\frac{1}{n}}(z) \geqslant \rho_{\frac{1}{n}}(z) = \operatorname{dist}(z, \Gamma_{\frac{1}{n}}) \geqslant \frac{c}{n^2},$$

при $z \in \Gamma = \partial D$ (точную постоянную c для второго из этих неравенств см. в работе В. И. Белого [12]), видим, что правая часть в (2.2) не мньше $c \cdot n^{-2M-2r-2}$, поэтому если в дальнейшем какое-либо выражение будет иметь оценку $c \cdot n^{-A}$ с $A \geqslant 2M+2r+2$, то для него (2.2) выполняется.

Теперь введем приближающий полином, который, как окажется, будет должным образом приближать данную функцию $f \in H_{r,\omega}(D)$. Впервые приводимые полиномы появились в работах Н. А. Лебедева и автора [13] и В. И. Дзядыка [14].

Выберем достаточно большие натуральные числа m и p, причем заведомо $m > 4p^2(r+1)$, более точно эти числа будут определены по ходу доказательства. Положим $R = 1 + \frac{1}{n}$. Не ограничивая общности, считаем, что $n > 2m$. Теперь полагаем ($\Gamma = \partial D$):

$$\gamma_{m,n} = \left[\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\sin[\frac{n}{2m}]x}{\sin x} \right)^{2m} dx \right]^{-1};$$

$$J_m(\theta) = J_m(\theta; n) = \gamma_{m,n} \left(\frac{\sin[\frac{n}{2m}]\theta}{\sin \theta} \right)^{2m};$$

$$\zeta_{R,\theta} = \zeta_{R,\theta}(\zeta) = \psi_{[D]}\big(R\, e^{i\theta} \varphi_{[D]}(\zeta)\big); \quad \zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}, \quad \zeta_R = \zeta_R(\zeta) = \zeta_{R,0}(\zeta),$$

$$P_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\pi}^{\pi} J_m(\theta)\, d\theta \int\limits_{\Gamma} (\zeta) \sum_{k=1}^{p} \frac{(\zeta_{R,\theta} - \zeta)^{k-1}}{(\zeta_{R,\theta} - z)^k}\, d\zeta.$$

Для того, чтобы оценивать разности $f(z) - P_n(z)$ при $z \in U_j$, выберем точку $z_* \in \Gamma$ таким образом, чтобы одна из дуг $(z, z_*)_\Gamma$, которую обозначим $\tilde\Gamma_j^+$, содержала бы Γ_j^+, а другая из них – дуга $\tilde\Gamma_j^-$ – содержала бы дугу Γ_j^-. Ориентация на $\tilde\Gamma_j^+$ и $\tilde\Gamma_j^-$ индуцирована положительным обходом Γ. Далее для краткости обозначим $z_0^+ = z^+(z)$, $z_0^- = z^-(z)$. Введем важную для дальнейших оценок величину $W(z)$:

$$W(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\pi}^{\pi}J_m(\theta)\,d\theta\int\limits_{\Gamma_j^+}\sum_{\nu=0}^{r}\frac{1}{\nu!}f^{(\nu)}(z_0^+)(\zeta-z_0^+)^\nu\left(\frac{\zeta_{R,\theta}-\zeta}{\zeta_{R,\theta}-z}\right)^p\frac{d\zeta}{\zeta-z}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\pi}^{\pi}J_m(\theta)\,d\theta\int\limits_{\Gamma_j^-}\sum_{\nu=0}^{r}\frac{1}{\nu!}f^{(\nu)}(z_0^-)(\zeta-z_0^-)^\nu\left(\frac{\zeta_{R,\theta}-\zeta}{\zeta_{R,\theta}-z}\right)^p\frac{d\zeta}{\zeta-z}. \quad (2.3)$$

Полагая для краткости

$$H_p(\zeta,R,\theta,z)=\left(\frac{\zeta_{R,\theta}-\zeta}{\zeta_{R,\theta}-z}\right)^p\frac{1}{\zeta-z}, \qquad (2.4)$$

получаем следующую формулу:

$$f(z)-P_n(z)-W(z)=\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{r!}\int\limits_{-\pi}^{\pi}J_m(\theta)\,d\theta\int\limits_{\tilde\Gamma_j^+}H_p(\zeta,R,\theta,z)\,d\theta\times$$

$$\times\left[\int\limits_{z_0^+}^{\zeta}(\zeta-t)^{r-1}\left(f^{(r)}(t)-f^{(r)}\left(z_0^+\right)\right)dt\right]+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{r!}\int\limits_{-\pi}^{\pi}J_m(\theta)\,d\theta\int\limits_{\tilde\Gamma_j^-}H_p(\zeta,R,\theta,z)\,d\zeta\times$$

$$\times\left[\int\limits_{z_0^-}^{\zeta}(\zeta-t)^{r-1}\left(f^{(r)}(t)-f^{(r)}\left(z_0^-\right)\right)dt\right]=\sigma_+(z)+\sigma_-(z). \qquad (2.5)$$

3. Оценка выражения $W(z)$

Начнем со следующей леммы.

Лемма 1. *Для величины* $W(z)$, *определенной в* (2.3), *справедлива оценка*

$$|W(z)|\leqslant c\cdot\quad \textit{правая часть } (2.2), \qquad (3.1)$$

где постоянная c не зависит от n и z и может быть разной в разных утверждениях.

Доказательство. Прежде всего запишем функцию $W(z)$ в виде суммы двух интегралов:

$$W(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} J_m(\theta)\,d\theta \int_{\Gamma} \sum_{\nu=0}^{r} \frac{f^{(\nu)}(z_0^-)}{\nu!}(\zeta - z_0^-)^\nu\, H_p(\zeta, R, \theta, z)\,d\zeta +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} J_m(\theta)\,d\theta \int_{\tilde{\Gamma}+} H_p(\zeta, R, \theta, z)\Bigg[\sum_{\nu=0}^{r} \frac{f^{(\nu)}(z_0^+)}{\nu!}(\zeta - z_0^+)^\nu -$$

$$-\sum_{\nu=0}^{r}\frac{f^{(\nu)}(z_0^-)}{\nu!}(\zeta - z_0^-)^\nu\Bigg]\,d\zeta = W_1(z) + W_2(z),$$

где функции $H_p(\zeta, R, \theta, z)$ определены в (2.4).

Полагая $\Gamma_* = \psi_{[D]}(2\cdot\partial\mathbb{D})$, заменяя в формуле, определяющей $W_1(z)$, интегрирование по Γ интегрированием по Γ_* и учитывая, что существует такое $\delta_0 > 0$, не зависящее от $z \in D$ и $\zeta \in \Gamma_*$, что $|\zeta - z| \geqslant \delta_0$, $|\zeta_{R,\theta} - z| \geqslant \delta_0$, за счет выбора достаточно большого p и затем m можно получить оценку $|W_1(z)| \leqslant cn^{-A}$ с любым желаемым A, например, с $A = 2M + 2r + 2$, что, как отмечалось ранее, гарантирует соотношение (2.2).

Интегрируя по частям, получаем

$$\sum_{\nu=0}^{r-1}\frac{1}{\nu!}\left[f^{(\nu)}(z_0^+)\,(\zeta - z_0^+)^\nu - f^{(\nu)}(z_0^-)\,(\zeta - z_0^-)^\nu\right] =$$

$$= (-1)^{r-1} f^{(r)}(z_0^+)\cdot\frac{1}{r!}\left[(z_0^+ - \zeta)^r - (z_0^- - \zeta)^r\right] +$$

$$+(-1)^{r-1}\cdot\frac{1}{(r-1)!}\int_{z_0^-}^{z_0^+}(t-\zeta)^{r-1}\,\left(f^{(r)}(t) - f^{(r)}(z_0^+)\right)\,dt,$$

поэтому

$$W_2(z) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} J_m(\theta)\,d\theta \int_{\tilde{\Gamma}+} H_p(\zeta, R, \theta, z)\,d\zeta\Bigg[(-1)^{r-1}\frac{1}{(r-1)!}\int_{z_0^-}^{z_0^+}(t-\zeta)^{r-1}\times$$

$$\times \left(f^{(r)}(t) - f^{(r)}(z_0^+)\right)\, dt + \frac{1}{r!}\left(f^{(r)}(z_0^+) - f^{(r)}(z_0^-)\right)(\zeta - z_0^-)^r\Big]. \quad (3.2)$$

В формуле (3.2) интегрирование от z_0^- до z_0^+ проводится по кривой $\ell(z_0^-, z_0^+)$, лежащей в D, длину которой можно считать соизмеримой с $|z_0^+ - z_0^-|$, так как область D не содержит нулевых внешних по отношению к D углов.

Заменим путь интегрирования в (3.2). Пусть $t_* = \varphi_{[D]}(z_*)$. Рассмотрим кривую $\tilde{\tilde{\Gamma}}_j^+$, являющуюся образом при отображении $\psi_{[D]}$ кривой, состоящей из отрезков $I_0 = [t_j^0, (1+\varepsilon_0)\, t_j^0]$, $I_1 = [t_*^0, (1+\varepsilon_0)\, t_*]$ и той дуги $(1+\varepsilon_0)\partial\mathbb{D}$, которая при добавлении к ней отрезков I_0 и I_1 и дуги $\varphi_{[D]}(\tilde{\Gamma}_j^+)$ образует контур, не содержащий $\partial\mathbb{D}$, причем ε_0 выбрано так, что для $|t - t_j^0| < 2$, $t \notin \mathbb{D}$, будет выполняться $\psi_{[D]}(t) \in U_j$. Теперь в (3.2) $\int_{\tilde{\Gamma}_j^+} = \int_{\tilde{\tilde{\Gamma}}_j^+}$ и потому

$$|W_2(z)| \leqslant c\int\limits_{-\pi}^{\pi} J_m(\theta)\, d\theta \int\limits_{\tilde{\tilde{\Gamma}}_j^+} |\, H_p(\zeta, R, \theta, z)\,||\, d\zeta\,|\,\Big[\int\limits_{\ell(z_0^-, z_0^+)} |t-\zeta|^{r-1}\times$$

$$\times\left|f^{(r)}(t) - f^{(r)}(z_0^+)\right||dt| + \left|f^{(r)}(z_0^+) - f^{(r)}(z_0^-)\right||z_0^- - \zeta|^r\Big]. \qquad (3.3)$$

Пусть для краткости $a = |z_0^+ - z_0^-|$, $x = |z_j^0 - z|$. Поскольку z_j^0 – точка заострения на Γ с внешним по отношению к D углом, равным 2π, то при нашем выборе окрестностей U_j имеем

$$|z_0^+ - z_j^0| \asymp |z_0^- - z_j^0| \asymp |z - z_j^0| \asymp |\tau - z_j^0| \qquad (3.4)$$

для любой точки $\tau \in \ell(z_0^-, z_0^+)$.

Продолжим неравенство (3.3):

$$|W_2(z)| \leqslant c\int\limits_{-\pi}^{\pi} J_m(\theta)\, d\theta \int\limits_{\tilde{\tilde{\Gamma}}j+} |\, H_p(\zeta, R, \theta, z)\,|\,|\, d\zeta\,|\cdot\big(a^r\,\omega(a) +$$

$$\omega(a)\big(a^r + |z_0^+ - \zeta|\big)^r\big).$$

Теперь учтем соотношение $m > 4p^2(r+1)$ и применим следующую теорему.

Теорема В (см. работу В. И. Белого [12]). *Пусть D – произвольный континуум, $r \in D$, $\zeta \in \mathbb{C} \setminus D$. Тогда*

$$\frac{1}{|\zeta_{R,\theta} - z|} \leqslant c_0 \big(u(\theta) + 1\big)^4 \frac{1}{|\zeta_R - z|}, \tag{3.5}$$

где постоянная c_0 не зависит от ζ, z, θ и n.

С помощью (3.5) продолжаем оценивать $W_2(\zeta)$:

$$|W_2(z)| \leqslant c \int\limits_{\tilde{\tilde{\Gamma}}_j^+} \left|\frac{\zeta_R - \zeta}{\zeta_R - z}\right|^p \left(a^r + |z_0^+ - \zeta|^r\right) \omega(a) \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z|}.$$

Пусть $\breve{\Gamma} = \psi(I_0)$. При $\zeta \in \tilde{\tilde{\Gamma}}_j^+ \setminus \breve{\Gamma}$ имеем оценки $|\zeta_R - z| \geqslant \delta_1$, $|\zeta - z| \geqslant \delta_1$, поэтому за счет выбора достаточно большого p можно получить неравенство

$$\int\limits_{\tilde{\tilde{\Gamma}}_j^+ \setminus \breve{\Gamma}} \left|\frac{\zeta_R - \zeta}{\zeta_R - z}\right|^p \left(a^r + |z_0^+ - \zeta|^r\right) \omega(a) \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z|} \leqslant c \cdot \frac{1}{n^A} \tag{3.6}$$

с любой постоянной A, например, с $A = 2M + 2r + 2$. Для оценки $\int_{\breve{\Gamma}}$ используем специфику выбора окрестностей U_j. Как следует из (1.1), для некоторой постоянной λ, $|\lambda| = 1$, имеем равенство

$$\psi'(t) = (t - t_j^0)\, q(t) \lambda$$

при $t \in \varphi_{[D]}(U_j)$, причем $|\arg q(t)| < \frac{\pi}{8}$. Поэтому при $\zeta \in \breve{\Gamma}$ выполняются соотношения

$$|\zeta - z| \asymp |\zeta - z_j^0| + |z_j^0 - z|, \quad |\zeta_R - z| \asymp |\zeta_R - z_j^0| + |z_j^0 - z|, \tag{3.7}$$

откуда

$$\int\limits_{\breve{\Gamma}} \left|\frac{\zeta_R - \zeta}{\zeta_R - z}\right|^p |\zeta - z_0^+|^r \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z|} \leqslant c \int\limits_{\breve{\Gamma}} \left|\frac{\zeta_R - \zeta}{\zeta_R - z}\right|^p |\zeta - z|^{r-1} \, |d\zeta| \asymp$$

$$\asymp \int\limits_{\breve{\Gamma}} \frac{|\zeta_R - \zeta|^p (|\zeta - z_j^0| + |z - z_j^0|)^{r-1}}{(|\zeta_R - z_j^0| + |z_j^0 - z|)^p} |d\zeta| \overset{\mathrm{def}}{=} Q(z).$$

Пусть

$$b(t) = \frac{|\varphi'_{[D]}(t\,t_j^0)|}{|t-1|}.$$

Соотношение (1.1) и выбор окрестностей U_j влекут следующее легко проверяемое утверждение.

Утверждение 1. Существуют постоянные c_1, c_2, не зависящие от t, и число ε_1, $0<\varepsilon_1<\frac{1}{8}$, такие, что при $1+\varepsilon_0 \geqslant t_1 > t_2 > 1$ справедливы неравенства

$$c_1\left(\frac{t_2}{t_1}\right)^{\varepsilon_1} \leqslant \frac{b(t_1)}{b(t_2)} \leqslant c_2\left(\frac{t_1}{t_2}\right)^{\varepsilon_1}. \tag{3.8}$$

Кроме того учтем, что при любом t справедливо соотношение

$$|\,\psi_{[D]}(Rt)-\psi_{[D]}(t)\,| \asymp (R-1)\ |\,\psi'_{[D]}(Rt)\,|\,. \tag{3.9}$$

Применяя (3.8) и (3.9) для $\zeta\in\breve{\Gamma}$, можем записать:

$$|\zeta_R-\zeta| = |\psi_{[D]}(Rt)-\psi_{[D]}(t)| \asymp (R-1)|\psi'_{[D]}(Rt)| =$$

$$=(R-1)(R|t|-1)\,b(R|t|) \leqslant c_2(R-1)\,(R|t|-1)\,b(R)\cdot\left(\frac{R|t|-1}{R-1}\right)^{\varepsilon_1} \asymp$$

$$\asymp |\,z^0_{j,R}-z^0_j\,|\,\left(\frac{R|t|-1}{R-1}\right)^{1+\varepsilon_1},$$

$$|\,\zeta_R-z_j^0\,| = |\,\psi_{[D]}(Rt)-\psi_{[D]}(t_j^0)\,| \asymp \big(R|t|-1\big)\,|\,\psi'_{[D]}(Rt)\,| \asymp$$

$$\asymp \big(R|t|-1\big)^2\,b(R|t|),$$

$$|\,\zeta-z_j^0\,| \asymp \big(|t|-1\big)^2\,b(|t|),$$

откуда получаем

$$Q(z) \leqslant c\int\limits_1^{1+\varepsilon_0} \frac{|z^0_{j,R}-z^0_j|^p\,(\frac{Rt-1}{R-1})^{(1+\varepsilon_1)p}}{[(Rt-1)^2\,b(Rt)+x]^p}\times$$

$$\times\big[\,|\psi'_{[D]}(t\,t_j^0)\,|(t-1)+x\big]^{r-1}|\,\psi'_{[D]}(t\,t_j^0)\,|\,dt = \int\limits_1^{1+\frac{1}{n}}+\int\limits_{1+\frac{1}{n}}^{1+\varepsilon_0}.$$

Далее, поскольку

$$x \geqslant c \mid z_{jR}^0 - z_j^0 \mid \asymp \int\limits_1^{1+\frac{1}{n}} \mid \psi'_{[D]}(\tau\, t_j^0) \mid \, d\tau \geqslant$$

$$\geqslant c \mid \psi'_{[D]}(\tau\, t_j^0) \mid (t-1), \quad t \leqslant 1 + \frac{1}{n},$$

то

$$\int\limits_1^{1+\frac{1}{n}} \leqslant c \frac{|z_{jR}^0 - z_j|^p}{x^p} \int\limits_1^{1+\frac{1}{n}} x^{r-1} \mid \psi_{[D]}(\tau\, t_j^0) \mid \, d\tau \asymp \frac{|z_{jR}^0 - z_j|^{p+1}}{x^{p+1-r}}. \quad (3.10)$$

Кроме того,

$$\int\limits_{1+\frac{1}{n}}^{1+\varepsilon_0} \asymp \mid z_{j,R}^0 - z_j^0 \mid^p \int\limits_{1+\frac{1}{n}}^{1+\varepsilon_0} \frac{(\frac{t-1}{R-1})^{(1+\varepsilon_1)p} |\psi'_{[D]}(t_j^0\, t)| dt}{((t-1)^2\, b(RT) + x)^{p+1-r}} \asymp$$

$$\asymp \mid z_{j,R}^0 - z_j^0 \mid^p \int\limits_{1+\frac{1}{n}}^{1+\varepsilon_0} \frac{(\frac{t-1}{R-1})^{(1+\varepsilon_1)p} (t-1)\, b(t)}{((t-1)^2\, b(RT) + x)^{p+1-r}}\, dt \leqslant$$

$$\leqslant c \mid z_{j,R}^0 - z_j^0 \mid \, b(R) \int\limits_{1+\frac{1}{n}}^{1+\varepsilon_0} \frac{(\frac{t-1}{R-1})^{(1+\varepsilon_1)p} (t-1)\, b(R) (\frac{t-1}{R-1})^{\varepsilon_1}}{((t-1)^2\, b(RT))(\frac{R-1}{t-1})^{\varepsilon_1} + x)^{p+1-r}}\, dt =$$

$$= \mid z_{j,R}^0 - z_j^0 \mid^p \; b_0 \int\limits_{1+\frac{1}{n}}^{\varepsilon_0} \frac{(uv)^{(1+\varepsilon_1)p+\varepsilon_1} v\, dv}{(v^2\, b_0 (uv)^{-\varepsilon_1} + x)^{p+1-r}} =$$

$$= \mid z_{j,R}^0 - z_j^0 \mid \; b_0 \Bigg(\int\limits_{\frac{1}{n}}^{u} + \int\limits_{u}^{\varepsilon_0} \Bigg),$$

где

$$b_0 = b(R), \quad u = \left(\frac{n^{\varepsilon_1}\, x}{b_0} \right)^{\frac{1}{2-\varepsilon_1}}.$$

Далее,

$$\int_{\frac{1}{n}}^{u} \leqslant c\frac{1}{x^{p+1-r}}\int_{\frac{1}{n}}^{u}(uv)^{(1+\varepsilon_1)p+\varepsilon_1}\, v\, dv \leqslant$$

$$\leqslant c\left(\frac{|z_{j,R}^0 - z_j^0|}{x}\right)^{\frac{(1-2\varepsilon_1)(p+1)-1}{2-\varepsilon_1}} \cdot x^r, \tag{3.11}$$

$$\int_{u}^{\varepsilon_0} \asymp \int_{u}^{\varepsilon_0} \frac{(uv)^{(1+\varepsilon_1)p+\varepsilon_1}}{(v^2\, b_0(uv)^{-\varepsilon_1})^{p+1-r}}dv \asymp x^r\left(\frac{|z_{j,R}^0 - z_j^0|}{x}\right)^{\frac{(1-2\varepsilon_1)(p+1)-1}{2-\varepsilon_1}}. \tag{3.12}$$

Итак, при $p_1 = \frac{(1-2\varepsilon_1)(p+1)-1}{2-\varepsilon_1}$ из (3.6), (3.10)–(3.12) получаем оценку:

$$|\, W_2(z)\, | \leqslant c\,\omega(a)\, x^r\left(\frac{|z_{j,R}^0 - z_j^0|}{x}\right)^{p_1} + \frac{1}{n^A}. \tag{3.13}$$

Осталось преобразовать правую часть оценки (3.13). Прежде всего, из (3.8) и (3.9) для любой точки $\zeta \in \Gamma \cap U_j$ находим, что $|z_{j,R}^0 - z_j^0| \leqslant c\,\rho_{1/n}^*(\zeta)$ и, кроме того, $a \leqslant cx$, поэтому при $p_1 > M + r + 1$ выполняется

$$\omega(a)\, x^r\left(\frac{|z_{j,R}^0 - z_j^0|}{x}\right)^{p_1} \leqslant$$

$$\leqslant c\,\omega(\,|\, z_{j,R}^0 - z_j^0|)\frac{a + |z_{j,R}^0 - z_j^0|}{|z_{j,R}^0 - z_j^0|}x^r\left(\frac{|z_{j,R}^0 - z_j^0|}{x}\right)^{p_1} \leqslant$$

$$\leqslant c\omega(\rho_\pm^*)\,\rho_\pm^{*r}\left(\frac{\rho_\pm^*}{x}\right)^{p_1-r-1} \leqslant c\omega(\rho_\pm^*)\,\rho_\pm^{*r}\left(\frac{\rho_\pm^*}{\rho_\pm^* + a}\right)^{M},$$

где $\rho_\pm^* = \rho_{1/n}^*(z_0^\pm)$. Лемма доказана.

4. Окончание доказательства теоремы 1: оценка $\sigma_\pm$

Лемма 2. *Слагаемые $\sigma_\pm$ в правой части формулы (2.5) оцениваются так же, как правая часть в (2.2).*

Доказательство. Выражения для σ_+ и σ_- оцениваются аналогично, поэтому ограничимся оценкой для σ_+. Пусть $y = |z - z_0^+$, $x = |\zeta - z|$. Считаем, что $t \geqslant c\,\rho_+^* = c\,\rho_{1/n}^*(z_0^+)$, поскольку при условии $y \leqslant c\,\rho_+^*$ рассуждения упрощаются. Используя неравенство (3.5) теоремы В. И. Белого, получаем:

$$|\sigma_+(z)| = \left|\frac{1}{2\pi i r!}\int_{-\pi}^{\pi} J_m(\theta)\,d\theta \int_{\tilde\Gamma_j^+} H_p(\zeta, R, \theta, z)\times\right.$$

$$\left.\times\left[\int_{z_0^+}^{\zeta}(\zeta-t)^{r-1}\left(f^{(r)}(t)-f^{(r)}(z_0^+)\right)dt\right]d\zeta\right| \leqslant$$

$$\leqslant c\int_{\tilde\Gamma_j^+}\left|\frac{\zeta_R-\zeta}{\zeta_R-z}\right|^p\,|\,\zeta-z_0^+\,|^{r-1}\,\omega\left(\,|\,\zeta-z_0^+\,|\,\right)\frac{|d\zeta|}{|\zeta-z|} \asymp$$

$$\asymp c\int_{\tilde\Gamma_j^+}\frac{|\zeta_R-\zeta|^p|\zeta-z_0^+|^{r-1}\,\omega(|\zeta-z_0^+|)}{(|\zeta_R-z_0^+|+y)^p(|\zeta-z_0^+|+y)}\,|d\zeta| \leqslant$$

$$\leqslant c\int_{\tilde\Gamma_j^+}\frac{|\zeta_R-\zeta|^p|\zeta-z_0^+|^{r-1}\,\omega(|\zeta-z_0^+|)}{(|\zeta-z_0^+|+y)^{p+1}}\,|d\zeta|. \tag{4.1}$$

Теперь нам понадобится следующее неравенство.

Лемма 3. *При $\zeta\in\Gamma\cap U_j$ выполняется соотношение*

$$\frac{|\zeta_R-\zeta|}{\rho_+^*} \leqslant c\left(\frac{|\zeta-z_0^+|+\rho_+^*}{\rho_+^*}\right)^{\frac{5}{7}}. \tag{4.2}$$

Доказательство. Пусть $e^{i\theta j}=t_j^0$,

$$z_0^+=\psi_{[D]}(e^{i\theta_0}),\quad \zeta=\psi_{[D]}(e^{i\theta}),\quad b(t)=\frac{|\psi'_{[D]}(t)|}{|t-t_j^0|}.$$

Используя (3.9), находим

$$|\zeta_R-\zeta|\asymp\frac{1}{n}\left(|\theta-\theta_j|+\frac{1}{n}\right)b\,(R\,e^{i\theta}),$$

$$|\zeta-z_0^+|\asymp\left(|\theta-\theta_j|+|\theta-\theta_0|+\frac{1}{n}\right)\left(|\theta-\theta_0|+\frac{1}{n}\right)b\left(R(1+|\theta-\theta_0|)\,e^{i\theta}\right).$$

Если $|\theta-\theta_0| \leqslant c\frac{1}{n}$, то имеем $|\zeta_R-\zeta| \asymp \rho_+^*$, $|\zeta - z_0^+| \leqslant c\,\rho_+^*$, что влечет (4.2). Пусть теперь $|\theta-\theta_0| > c\frac{1}{n}$. Имеем

$$\frac{|\zeta - z_0^+|}{\rho_+^*} \asymp \frac{(|\theta-\theta_j|+|\theta-\theta_0|)|\theta-\theta_0| b((1+|\theta-\theta_0|)\,e^{i\theta_0})}{\frac{1}{n}\cdot|\theta_0-\theta_j|\cdot b\,(R_l\,e^{i\theta_0})}. \tag{4.3}$$

При оценке (4.3) следует рассмотреть случаи $|\theta_0-\theta_j| \leqslant \frac{c}{n}$ и $|\theta_0-\theta_j| \geqslant \frac{c}{n}$, рассмотрим лишь более сложный второй случай. Учитывая, что при сделанных предположениях справедливо элементарное неравенство

$$\frac{|\theta-\theta_j|+\frac{1}{n}}{|\theta_0-\theta_j|} \leqslant c\sqrt{\frac{(|\theta-\theta_j|+|\theta-\theta_0|)|\theta-\theta_0|}{\frac{1}{n}|\theta_0-\theta_j|}},$$

из (3.16) и (3.8) заключаем, что

$$\frac{|\zeta_R-\zeta|}{\rho_+^*} \leqslant c\frac{|\theta-\theta_j|+\frac{1}{n}}{|\theta_0-\theta_j|}\big(n|\theta-\theta_0|\big)^{\varepsilon_1} \leqslant$$

$$\leqslant c\sqrt{\frac{(|\theta-\theta_j|+|\theta-\theta_0))|\theta-\theta_0|}{\frac{1}{n}|\theta_0-\theta_j|}}\big(n|\theta-\theta_0|\big)^{\varepsilon_1} \asymp$$

$$\asymp \sqrt{\frac{|\zeta-z_0^+|}{\rho_+^*}\cdot\frac{b(R\,e^{i\theta_0}}{b(1+|\theta-\theta_0|e^{i\theta_0})}}\big(n|\theta-\theta_0|\big)^{\varepsilon_1} \leqslant$$

$$\leqslant c\sqrt{\frac{|\zeta-z_0^+|}{\rho_+^*}}\big(n|\theta-\theta_0|\big)^{\frac{3}{2}\varepsilon_1}. \tag{4.4}$$

Если еще раз применить (4.3) и (3.8), то получим

$$\frac{|\zeta-z_0^+|}{\rho_+^*} \geqslant cn|\theta-\theta_0|\cdot\frac{|\theta-\theta_0|+|\theta-\theta_j|}{|\theta_j-\theta_0|}\big(n|\theta-\theta_0|\big)^{-\varepsilon_1} \geqslant c\big(n|\theta-\theta_0|\big)^{1-\varepsilon_1},$$

откуда

$$n\mid\theta-\theta_0\mid \leqslant c\left(\frac{|\zeta-z_0^+|}{\rho_+^*}\right)^{\frac{1}{1-\varepsilon_1}}. \tag{4.5}$$

Вспоминая, что $\varepsilon_1 < \frac{1}{8}$ из (4.5) находим, что

$$\text{правая часть(4.4)} \leqslant c\left(\frac{|\zeta-z_0^+|}{\rho_+^*}\right)^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\frac{\varepsilon_1}{1-\varepsilon_1}} \leqslant c\left(\frac{|\zeta-z_0^+|}{\rho_+^*}\right)^{\frac{5}{7}},$$

что и представляет собой требуемое неравенство (4.2). Лемма 3 доказана.

Закончим доказательство леммы 2. Учитывая лемму 3, продолжим цепочку соотношений (4.1):

$$\int\limits_{\tilde{\Gamma}_j^+} \frac{|\zeta_R - \zeta|^p |\zeta - z_0^+|^r \omega(|\zeta - z_0^+|)}{(|\zeta - z_0^+| + y)^{p+1}}\, |d\zeta| \leqslant$$

$$\leqslant c\, {\rho_+^*}^{\frac{2}{7}p} \int\limits_{\tilde{\Gamma}_j^+} \frac{(|\zeta - z_0^+| + \rho_+^*)^{\frac{5}{7}p+r} \omega(|\zeta - z_0^+|)}{(|\zeta - z_0^+| + y)^{p+1}}\, |d\zeta| \leqslant$$

$$\leqslant c\, {\rho_+^*}^{\frac{2}{7}p-1}\, \omega(\rho_+^*) \int\limits_0^\infty \frac{dx}{(x+y)^{\frac{2}{7}p-r}} \leqslant c {\rho_+^*}^{r}\, \omega(\rho_+^*) \left(\frac{\rho_+^*}{\rho_+^* + y} \right)^{\frac{2}{7}p-r-1}. \quad (4.6)$$

Если $\frac{2}{7}p - r - 1 > M$, то правая часть (4.6) удовлетворяет оценке (2.2). Лемма 2, а с ней и теорема 1 доказаны.

5. Формулировка теоремы 2. Построение области для контрпримера

В этом пункте мы сформулируем и начнем доказывать следующий результат, анонсированный в [5].

Теорема 2. *Пусть $0 < \alpha < 1$. Существует области D с ограниченным граничным вращением и функция $f \in H_\alpha(D)$, для которой не существует последовательности полиномов P_n, $\deg P_n \leqslant n$, такой, что при всех $n = 1, 2, \ldots$ выполняются соотношения*

$$|\, f(z) - P_n(z) \,| \leqslant c\, \rho_{\frac{1}{n}}^{\alpha}(z), \quad z \in \partial D, \quad \rho_h(z) = \rho_h(z; D). \qquad (5.1)$$

Замечание. Веса $\rho_{1/n}^{\alpha}(z)$ были впервые обнаружены В. К. Дзядыком как возможный инструмент конструктивного описания различных классов функций. Наиболее широкий в определенном смысле класс областей, для которых действует описание (5.1), составляют области с квазиконформной границей, что установлено В. И. Белым [12]. Область D, которая будет построена ниже, конечно, не квазиконформна, она содержит внешний угол, равный 2π, но не содержит нулевых внешних углов.

Построим требуемую область D. Пусть $\omega_0 = \frac{1}{2}$, $\omega_n = 1 - \frac{1-\alpha}{10}\frac{1}{n^2}$, $\Omega_0 = 0$. Отложим из точки Ω_0 по оси абсцисс отрезок ℓ_0 длины 1 и пусть Ω_1 – второй конец отрезка ℓ_0. Затем из точки Ω_1 отложим отрезок $\ell_1 = [\Omega_1, \Omega_2]$ длины $\varepsilon_0 = 0,01$ так, что векторы $\overrightarrow{\Omega_1\Omega_0}$ и $\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2}$ образуют угол, равный $\pi\omega_1$. Из точки Ω_2 проведем отрезок $\ell_2 = [\Omega_2, \Omega_3]$ длины $(\varepsilon_0|\ell_1|)^{18/1-\alpha}$ так, что векторы $\overrightarrow{\Omega_2,\Omega_1}$ и $\overrightarrow{\Omega_2,\Omega_3}$ образуют угол $\pi\omega_3$ и т.д., из точки Ω_n проведем отрезок $\ell_n = [\Omega_n, \Omega_{n+1}]$ длины $(\varepsilon_0|\ell_{n-1}|)^{18/1-\alpha}$ так, что векторы $\overrightarrow{\Omega_n,\Omega_{n-1}}$ и $\overrightarrow{\Omega_n,\Omega_{n+1}}$ образуют угол $\pi\omega_n$. Пусть точка Ω – предельная точка последовательности $\{\Omega_n\}_{n=0}^{\infty}$. Теперь пусть $\Omega_0^+ = i \cdot e^{-100}$,

$$r_n = \exp\biggl(-\frac{200}{1-\alpha}n^4 - \frac{10^4}{1-\alpha}n^2 - \frac{n!}{|\Omega_n - \Omega_{n+1}|^{200n^2/1-\alpha}}\biggr), \qquad (5.2)$$

$\Omega_n^+ = \Omega_n + ir_n$. Соединим точки Ω_0^+ и $\Omega_1^+, \ldots, \Omega_n^+$ и Ω_{n+1}^+ отрезками, полученную кривую обозначим через Γ_1, и положим $\Gamma_0 = \bigcup\limits^{\infty} \ell_\nu$. Угол между векторами $\overrightarrow{\Omega_n^+,\Omega_{n+1}^+}$ и $\overrightarrow{\Omega_n^-,\Omega_{n+1}^-}$ обозначим через $\pi\omega_n^+$. Точки Ω_0 и Ω_0^+ соединим окружностью $\tilde{r}_0$, касающейся отрезков $[\Omega_0, \Omega_1]$ и $[\Omega_0^+, \Omega_1^+]$. Наконец, положим $\Gamma = \tilde{r}_0 \cup \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, $D = \operatorname{Int}\Gamma$. Из построения следует, что область D имеет ограниченное граничное вращение и у нее отсутствуют внешние нулевые углы.

6. Предварительные свойства области D

Начнем выяснять специфические особенности области D, построенной в п. 4. Далее используем обозначения:

$$\varphi = \varphi_{[D]}, \quad \psi = \psi_{[D]}, \quad t_n = \varphi(\Omega_n), \quad t_n^+ = \varphi(\Omega_n^+), \quad T = \varphi(\Omega).$$

Лемма 4. *Справедливы соотношения:*

$$\frac{1}{64} \mid t_n^+ - t_{n+1}^+ \mid^3 \leqslant \mid \Omega_n^+ - \Omega_{n+1}^+ \mid \leqslant 2 \mid t_n^+ - t_{n+1}^+ \mid^{\frac{1}{3}}, \qquad (6.1)$$

$$\frac{1}{64} \mid t_n - t_{n+1} \mid^3 \leqslant \mid \Omega_n - \Omega_{n+1} \mid \leqslant 2 \mid t_n - t_{n+1} \mid^{\frac{1}{3}}, \qquad (6.2)$$

Доказательство. Представим функцию $|\psi'|$ по формуле (1.1):

$$\mid \psi'(t) \mid = \exp\biggl(\int\limits_0^{2\pi} \log\left|1 - \frac{e^{i\theta}}{t}\right| d\mu(\theta)\biggr). \qquad (6.3)$$

Для построенной области D заряд μ состоит только из нагрузок $\omega_n - 1$ в точках t_n, нагрузок $1-\omega_n^+$ в точках t_n^+, нагрузки 1 в точке T и некоторой положительной меры на меньшей из дуг $(t_0, t_0^+)_{\partial\mathbb{D}}$, вариация которой равна угловому измерению дуги $\tilde{r}_0$, деленному на π, и потому заключена между $0,99$ и 1. Далее, определения углов ω_n влекут соотношения

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mid \omega_n - 1 \mid = \frac{\pi^2}{60}(1-\alpha) < \frac{1-\alpha}{3}. \tag{6.4}$$

Элементарные геометрические оценки для углов ω_n^+ приводят к неравенству

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mid \omega_n^+ - 1 \mid < \frac{1-\alpha}{3}. \tag{6.5}$$

Пусть $t \in (t_n, t_{n+1})_{\partial\mathbb{D}}$, $t = e^{i\theta}$, $t_n = e^{i\theta_n}$, $T = e^{i\lambda}$. Поскольку

$$0,99 < \int_{t_0}^{t_0^+} d\mu(\theta) < 1,$$

то из (6.3)–(6.5) находим, что

$$4\left|\sin\frac{\theta-\theta_n}{2}\sin\frac{\theta_{n+1}-\theta}{2}\right| \leqslant \mid \psi'(t) \mid \leqslant 2\left|\sin\frac{\theta-\lambda}{2}\right|^{1-\frac{1-\alpha}{3}}. \tag{6.6}$$

Наконец, ввиду того, что $[\Omega_n, \Omega_{n+1}]$ – отрезок, имеем

$$\mid \Omega_n - \Omega_{n+1} \mid = \int_{(t_n, t_{n+1})_{\partial\mathbb{D}}} \mid \psi'(t) \mid \, |dt|. \tag{6.7}$$

Подставляя в (6.7) неравенства (6.6), получим (6.2). Аналогично получается и (6.1). Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть*

$$\tau_n = |t_{n-1} - t_n|^{\frac{2\cdot 10^4}{(1-\alpha)^2}}, \quad \tau_n^+ = \mid t_{n-1}^+ - t_n^+ \mid^{\frac{2\cdot 10^4}{(1-\alpha)^2}}.$$

Тогда при $t \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{D}$, $|t - t_n| < \tau_n$ *выполняется*

$$\left|1 - \frac{t_n}{t}\right|^{\omega_n - 1} \mid t_{n+1} - t_n \mid^3 < \mid \psi'(t) \mid <$$

$$< 3\left|1-\frac{t_n}{t}\right|^{\omega_n-1} \mid t_{n+1}-t_n \mid^{-\frac{1-\alpha}{3}} \cdot \frac{1}{|t_0-t_1|^2}. \qquad (6.8)$$

Неравенства, аналогичные (6.8), *выполняются при* $t \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{D}$, $|t-t_n^+| < \tau_n^+$ *с заменой* t_n, t_{n+1}, $\omega_n - 1$ *соответственно на* t_n^+, t_{n+1}^+, $1-\omega_n^+$.

Доказательство следует из элементарных оценок функции $|\psi'(t)|$, записанной в виде

$$| \psi'(t) |= \left|1-\frac{t_n}{t}\right|^{\omega_n-1}\prod_{\nu=1}^{n-1}\left|1-\frac{t_\nu}{t}\right|^{\omega_\nu-1}\prod_{\nu=n+1}^{\infty}\left|1-\frac{t_\nu}{t}\right|^{\omega_\nu-1}\times$$

$$\times\prod_{\nu=1}^{\infty}\left|1-\frac{t_\nu^+}{t}\right|^{\omega_\nu^+-1}\left|1-\frac{T}{t}\right|\exp\left(\int_{t_0}^{t_0^+}\log\left|1-\frac{e^{i\theta}}{t}\right|d\mu(\theta)\right).$$

Теперь сформулируем результат, аналогичный для областей с ограниченным граничным вращением классической теореме Зигмунда–Привалова.

Лемма 6. *Пусть* G *– область с ограниченным граничным вращением,* $\omega\pi$ *– наименьший внутренний угол между односторонними касательными на границе* G, $0<\beta<\frac{1}{2-\omega}$, f *– внешняя в* G *функция, причем* $|f| \geqslant c > 0$, $|f| \in H_\beta(\partial G)$. *Тогда* $f \in H_\beta(G)$.

Доказательство осуществляется отображением области G на круг $\mathbb{D}$, при котором классам $H_\beta(\partial G)$ и $H_\beta(G)$ соответствуют классы функций с переменной гладкостью, зависящей от рассматриваемого конформного отображения, и применением стандартной схемы доказательства теоремы Зигмунда–Привалова.

7. Продолжение доказательства теоремы 2: вспомогательная функция и ее свойства

В этом пункте будет проделано важное построение, которое позже даст требуемый контрпример функции, принадлежащей классу $H_\alpha(G)$, которую нельзя приблизить полиномами с оценками (5.1).

Лемма 7. *Пусть* G *– область с ограниченным граничным вращением, не имеющая внешних углов, равных* θ *или* 2π, $\omega\pi$ *– наименьший внутренний угол между односторонними касательными к* ∂G,

$0<\beta<\frac{1}{2-\omega}$, *точки* $z_n^{\pm}$, Ω *принадлежат* ∂G, *причем* $z_n^{\pm} \xrightarrow[n\to\infty]{} \Omega$ *и дуги* $(z_n^+, z_n^-)_{\partial G}$ *попарно не пересекаются. Тогда существует функция* $\Phi \in H_\beta(G)$ *такая, что для любой пары точек* z *и* ζ, *удовлетворяющих условиям* $z,\ \zeta \in (z_n^+, z_n^-)_{\partial G}$, $|(z, z_n^+)_{\partial G}| = |(\zeta, z_n^-)_{\partial G}|$, *справедливо неравенство*

$$|\Phi(z)-\Phi(\zeta)| \geqslant |z-\zeta|^\beta. \tag{7.1}$$

Доказательство. Возьмем какую-нибудь функцию h, определенную на ∂G, для которой выполняются условия $h(z)\geqslant 1$, $h\in H_\beta(\partial G)$ и

$$|\, h(z)-h(\zeta)\,| \geqslant |\, z-\zeta\,|^\beta \tag{7.2}$$

для любой пары точек z, ζ, определенной посредством условия (7.1). Ясно, что такую вещественную функцию h нетрудно построить. Определим внешнюю в G функцию Φ равенством $|\Phi(\zeta)| = h(\zeta)$, $\zeta\in\partial G$. Тогда по лемме 6 имеем $\Phi\in H_\beta(G)$. Кроме того, для требуемых пар точек z, ζ из (7.2) получаем

$$|\,\Phi(z)-\Phi(\zeta)\,| \geqslant |\; |\Phi(z)|-|\Phi(\zeta)|\;| \geqslant |z-\zeta|^\beta,$$

что и является требуемым неравенством (7.1).

В нижеследующей лемме 8 D – область, построенная в п. 5, Γ – ее граница, дуги $\Gamma_0\subset\Gamma$, $\Gamma_1\subset\Gamma$ определены при конструировании области D. Пусть функция v аналитична и ограничена в $\mathbb{C}\setminus\mathbb{D}$ и удовлетворяет соотношению

$$|\, v(z)\,| < \lambda, \quad z\in I, \tag{7.3}$$

где I – дуга на границе ∂G, целиком лежащая либо на Γ_0, либо на Γ_1, причем для величины λ в (7.3) справедлива оценка

$$\lambda < \varepsilon\,|\,I\,|^\alpha \tag{7.4}$$

с некоторым ε, $0<\varepsilon<1$. Кроме того, будем предполагать справедливость неравенства

$$|\, v(z)\,| \leqslant \lambda + A\,\tau^\alpha(z), \quad z\in\Gamma\setminus I, \tag{7.5}$$

где $\tau(z) = |(z,\zeta)_\Gamma|$, ζ – середина дуги I (относительно длины дуги на Γ).

Геометрически понятно, что означает выражение “точка z лежит над I” или “точка z лежит под I”, если $z\notin I$ и существует точка $z_0\in I$, для которой $\operatorname{Re} z = \operatorname{Re} z_0$.

Лемма 8. (a) *Пусть* $I \subset \Gamma_0$ *и точка* $z \in \mathbb{C} \setminus D$ *лежит под* I *или же* $I \subset \Gamma_1$ *и точка* z *лежит над* I, *причем* $\operatorname{dist}(z, I) \leqslant A_1 |\, I \,|$. *Тогда*

$$|\, v(z) \,| \leqslant A\, A_2 \,|\, I \,|^{\alpha}. \tag{7.6}$$

(в) *Пусть дуга* σ *имеет общую середину с дугой* I, $|\sigma| = \varepsilon |I|$ *и точка* $z \in \mathbb{C} \setminus D$ *лежит над или под* σ, *как и в случае* (a), $\operatorname{dist}(z, \infty) \leqslant \varepsilon\, |I|$.
Тогда при $\varepsilon < \varepsilon(D)$ *выполняется неравенство*

$$|\, v(z) \,| \leqslant A_3\, A^{\varepsilon^{1/3}}\, \lambda^{1-\varepsilon^{1/3}} \,|\, I \,|^{\varepsilon^{1/3}}. \tag{7.7}$$

Доказательство. Установим более сложную оценку (7.7), неравенство (7.6) доказывается аналогично, но проще. Пусть $F(t) = v(\psi(t))$, $W = \varphi(I)$, $V = \varphi(\sigma)$, ψ отображает $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$ на $\mathbb{C} \setminus D$, $\psi = \varphi^{-1}$, t' – середина дуги V, $t_0 = \varphi(z)$. Из соотношения (1.1) нетрудно получить, что $|t_0 - t'| \leqslant A_3\, |V|$. Для функции F справедливы условия

$$|\, F(t) \,| \leqslant \lambda, \quad t \in V, \tag{7.8}$$

$$|\, F(t) \,| \leqslant \lambda + A\, A_4 \,|\, \psi(t) - \psi(t') \,|^{\alpha}, \quad t \in \partial\, \mathbb{C} \setminus V. \tag{7.9}$$

Далее, аналогично (3.9) находим, что

$$|\, \psi(t) - \psi(t') \,|^{\alpha} \leqslant A_5 \,|\, \psi'\big((1 + |t - t'|)\, t'\big) \,|^{\alpha} \,|\, t - t' \,|^{\alpha}\, . \tag{7.10}$$

Применяя к $\log |F(t)|$ оценку через интеграл Пуассона и рассуждая стандартным образом (см. [15], гл. 1) из (7.3)–(7.5), (7.8)–(7.10) получаем (7.7).

8. Дальнейшие свойства области D

Нам понадобятся свойства области D, связанные со сравнением величин $\rho_h(z)$ и $\rho_h^*(z)$. Пусть число r_N определено в (5.2), $s_N = |\Omega_N - \Omega_{N+1}|^{10}$.

Лемма 9. *Если* $|z - \Omega_N| < s_N$, $\sqrt{r_N} < h < s_N$, $z \in \Gamma_0$, *то*

$$\rho_h(z) \leqslant B_1\, h \left(h + |z - \Omega_N|^{1/3}\right)^{\frac{1-\alpha}{20N^2}} |\, \Omega_N - \Omega_{N+1} \,|^{-1+\alpha}, \tag{8.1}$$

$$\rho_h^*(z) \geqslant B_2\, h \big(h + |z - \Omega_N|^3\big)^{-\frac{1-\alpha}{10N^2}} \,|\, \Omega_N - \Omega_{N+1} \,|^{9}\, . \tag{8.2}$$

Доказательство. Пусть $z_0 \in \Gamma_1$ и разность $z - z_0$ чисто мнимая, $t = \psi(z)$, $t_0 = \psi(z_0)$. Существуют постоянные B_2, B_1' такие, что

$$\rho_h^* \geqslant B_2 |\psi'\big((1+h)t\big)| h, \quad \rho_h(z) \leqslant |z - z_0| + B_1' |\psi'\big((1+h)t_0\big)| h.$$

В силу ограничений на h снизу и построению области D имеем

$$\rho_h(z) \leqslant B_1 \mid \psi'\big((1+h)t_0\big) \mid h.$$

Теперь неравенства (8.1) и (8.2) получаются из леммы 5 путем несложных элементарных преобразований.

В качестве следствия неравенств (8.1) и (8.2) мы получаем следующее утверждение.

Лемма 10. *Пусть числа B_1, B_2 определены в лемме 9,*

$$h_N = \left(\frac{B_1}{B_2}\right)^{\frac{200N^2}{1-\alpha}} \cdot N^{\frac{200N^2}{1-\alpha}} \mid \Omega_N - \Omega_{N+1} \mid^{\frac{2\cdot 10^3 N^2}{1-\alpha}} . \tag{8.3}$$

Тогда при $t \in \partial\mathbb{D}$, $|t - t_N| < h_N|\log h_N|^{100}$, $h_N < h < h_N|\log h_N|$, $N \geqslant N(D,R)$ имеем

$$\rho_h(z) \leqslant \frac{1}{|\log h_N|^R} \min \rho_h^*(z_0), \tag{8.4}$$

где минимум в правой части (8.3) берется по точкам $z_0 = \psi(t_0) \in \Gamma_0$ таким, что $|t_0 - t_N| < h_N|\log h_N|$.

9. Построение требуемой для теоремы 2 функции

Приступим к построению требуемой функции f. В начале построим вспомогательную область $G \supset D$, которая также имеет ограниченное граничное вращение. Продолжим отрезок $[\Omega_1, \Omega_0]$ за точку Ω_0 на отрезок единичной длины, вторым концом которого является точка O_1, затем проведем в точке Ω общую касательную к кривым Γ_0 и Γ_1 и отложим на ней вне D отрезок $[\Omega, O_2]$ единичной длины (односторонние касательные к $[\Omega, O_2]$ и кривым Γ_0, Γ_1 образуют угол π). Соединим точки O_1 и O_2 дважды гладкой кривой γ, имеющей в точках O_1 и O_2 дважды гладкое касание с отрезками $[O_1, \Omega_0]$ и $[\Omega, O_2]$, внутренность которой вместе с кривой Γ_0 и отрезками $[O_1, \Omega_0]$ и $[\Omega, O_2]$ содержит область D. Пусть G – область, ограниченная определенными выше кривыми. Ее граница имеет ограниченное граничное вращение и минимальный угол между односторонними касательными в любой ее точке больше $(2 - \frac{1}{\alpha})\pi$.

Последовательность $\{h_N\}$ была определена в (8.3). Определим последовательность точек $\{z_N^+\}$ и $\{z_N^-\}$:

$$z_N^+ = \varphi\big(t_N\, e^{-ih_N|\log h_N|^{100}}\big), \quad z_N^- = \psi\big(t_N\, e^{ih_N|\log h_N|^{100}}\big).$$

Применим к области G и последовательностям точек $\{z_N^+\}$ и $\{z_N^-\}$ лемму 7 из п. 7 и построим функцию f с требуемыми свойствами: именно, $f \in H_\alpha(G)$ и справедливы оценки

$$| f(z) - f(\zeta) | \geqslant | z - \zeta |^\alpha \tag{9.1}$$

для любых точек $z, \zeta \in (z_n^+, z_n^-)_{\Gamma_0}$ таких, что

$$| (z, z_n^+) |_{\Gamma_0} = | (\zeta, z_n^-)_{\Gamma_0} | .$$

Функция f – искомая.

10. Специальное продолжение функции f

Предположим тем не менее, что для построенной функции f для каждого $n = 1, 2, \dots$ можно найти полином P_n, $\deg P_n \leqslant n$, для которого справедливо соотношение (5.1). Построим продолжение функции f в $\mathbb{C} \setminus D$ со специальной оценкой $\frac{\partial f}{\partial \bar z}$, впервые введенное и успешно применяемое Е. М. Дынькиным [16, 17]. Это построение проведем, учитывая конкретные свойства построенной области D.

Выберем последовательность натуральных чисел ν_N и h_N следующим образом:

$$2^{-\nu_N - 1} \leqslant \frac{1}{10} h_N \mid \log h_N \mid \leqslant 2^{-\nu_N}, \tag{10.1}$$

$$2^{-\nu_N - k_{N-1}} \leqslant h_N \leqslant 2^{-\nu_N - k_N}, \tag{10.2}$$

где число h_N определено в (8.3). Затем введем в рассмотрение области W_N, L_N, W_N^0, L_N^0:

$$W_N = \{t \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{D} : 2^{-\nu_N - k_N - 1} \leqslant |t| - 1 \leqslant 2^{-\nu_N},$$

$$\Big| \arg \frac{t}{t_N} \Big| \leqslant 2^{-\nu_N} \}; \tag{10.3}$$

$$L_N = \psi(W_N); \tag{10.4}$$

$$W_N^0 = \{t \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{D} : h_N \mid \log h_N \mid^{1/4} \leqslant |t| - 1 < h_N \mid \log h_N \mid^{1/2},$$

$$\left| \arg \frac{t}{t_N} \right| < \frac{2^{-\nu_N}}{|\log h_N|^{1/2}} \},$$

$$L_N^0 = \psi(W_N^0). \tag{10.5}$$

Используя обозначения $\Gamma_{h_1,h_2} = \psi(\{t : 1+h_1 < |t| \leqslant 1+h_2\})$, определяем предварительную функцию f_0:

$$f_0(z) = \begin{cases} P_{2^n}(z), & z \in \Gamma_{2^{-n-1},2^{-n}} \setminus \bigcup\limits_{N=1}^{\infty} L_N; \\ P_{2^{\nu_N}}(z), & z \in L_N; \\ f(z), & z \in D; \\ 0, & z \ \text{лежит вне} \ \Gamma_2. \end{cases}$$

Отметим, что предварительное продолжение f_0 функции f было впервые осуществлено подобным образом Е. М. Дынькиным [16, 17]. Спецификой нашего случая является определение особых областей L_N и отдельное определение функции f_0 для этих областей.

Теперь, буквально следуя рассуждениям в [16] или [17], выберем достаточно малое $\lambda > 0$, зависящее лишь от D (заведомо $\lambda < 0,1$), и, полагая $\delta(z) = \lambda \operatorname{dist}(z, D)$, окончательно получаем

$$f_1(z) = \begin{cases} f(z), & z \in D, \\ \dfrac{1}{\pi\delta^2(z)} \displaystyle\int\limits_{B_{\delta(z)}(z)} f_0(\zeta)\, d\sigma, & z \in \mathbb{C} \setminus D. \end{cases}$$

Лемма 11. *Функция f_1 обладает следующими свойствами:*

$$f_1 \quad \textit{непрерывна в} \quad \mathbb{C} \quad \textit{и финитна}; \tag{10.6}$$

$$\Bigl|\frac{\partial f_1(z)}{\partial \overline{z}}\Bigr| \leqslant c\,\delta^{\alpha-1}(z), \quad z \in \mathbb{C} \setminus D; \tag{10.7}$$

$$\frac{\partial f_1(z)}{\partial \overline{z}} = 0, \quad z \in L_N^0, \quad N > N_0. \tag{10.8}$$

Доказательство. При выборе достаточно малой постоянной λ справедливо включение

$$\varphi\left(B_{\delta(z)}(z)\right) \subset B_{0,1\cdot(|t|-1)}(t),$$

и потому при $z \in L_N^0$ имеем $\varphi(B_{\delta(z)}(z)) \subset L_N$, откуда $f_1(z) \equiv P_{2^{\nu_N}}(z)$, что и влечет (10.8).

Доказательства (10.6) и (10.7) проводятся по хорошо отработанной схеме [15, 17]. Следует рассмотреть случаи: более простой, когда $B_{\delta(z)}(z) \cap \bigcup_{N=1}^{\infty} L_N = \varnothing$, и более сложный, когда $B_{\delta(z)(z)} \cap L_N \neq \varnothing$ для некоторого N. Постоянную λ выбираем столь малой, чтобы круг $B_{\delta(z)}(z)$ пересекался не более, чем с двумя кольцами $\Gamma_{2^{-n-1},2^{-n}}$. Более простой первый случай рассматривается точно также, как в [16]. В более сложном втором случае также исходим из соотношений

$$\frac{\partial f_1(z)}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial}{\partial \overline{z}} \left(\frac{1}{\pi \delta^2(z)} \int\limits_{B_{\delta(z)}(z)} (f_0(\zeta) - P_{2^{\nu_N}}(z)) d\sigma_\zeta \right)$$

и

$$\left| \frac{\partial f_1(z)}{\partial \overline{z}} \right| \leqslant c \frac{1}{\delta(z)} \sup_{\zeta \in B_{\delta(z)}(z)} |\, P_m(\zeta) - P_{2^{\nu_N}}(\zeta) \,|, \tag{10.9}$$

где в правой части (10.9) $m = n-1, n, n+1$ и обязательно $\Gamma_{2^{-m-1},2^{-m}}$ или $\Gamma_{2^{-m},2^{-m+1}}$ пересекается с L_N. Наиболее трудная часть доказательства состоит в оценке $|P_m(\zeta) - P_{2^{\nu_N}}(z)|$.

По определению ν_N в (10.1), (10.2) и областей L_N в (10.3) и (10.4), при $n-1 \leqslant m \leqslant n+1$ имеем неравенства $\nu_N \leqslant m \leqslant \nu_m + k_N + 1$ и

$$|\, P_{2^{\nu_N}}(\zeta) - P_{2^m}(\zeta) \,| \leqslant \sum_{l=0}^{k_N+1} |\, P_{2^{\nu_N+l}}(\zeta) - P_{2^{\nu_N+l-1}}(\zeta) \,| \,. \tag{10.10}$$

Пусть, далее, H – внешняя в $\mathbb{C} \setminus D$ функция такая, что $|H(\zeta)| = \rho^{\alpha}_{2^{-\nu_N}}(\zeta)$, $\zeta \in \Gamma$. Из предположения (5.1) следует, что

$$|\, P_{2^{\nu_N+l}}(\zeta) - P_{2^{\nu_N+l-1}}(\zeta) \,| \leqslant c \,|\, \varphi(\zeta) \,|^{\nu_N+l} |\, H(\zeta) \,|,$$

и тогда неравенство (10.10) можно продолжить следующим образом:

$$|\, P_{2^{\nu_N}}(\zeta) - P_{2^m}(\zeta) \,| \leqslant c \,|\, H(\zeta) \,| \sum_{l=0}^{k_N+1} |\, \varphi(\zeta) \,|^{\nu_N+l} \,.$$

Далее, $\nu_N = O(|\log h_N|)$, $k_N = O(\log \nu_N)$, поэтому

$$|\, \varphi(\zeta) \,|^{\nu_N+l} \leqslant 1 + c h_N \,|\, \log h_N \,|, \quad \zeta \in L_N,$$

значит

$$\sum_{l=0}^{k_N+1} |\, \varphi(\zeta) \,|^{\nu_N+l} \leqslant c \,|\, \log h_N \,| \,. \tag{10.11}$$

Теперь применим лемму 8 из п. 7, полагая $I = (z_N^+, z_N^-)_{\Gamma_0}$, $\sigma = \varphi(V_N)$, где

$$V_N \left\{ t \in \partial\mathbb{D} : \left| \arg \frac{t}{t_N} \right| < h_N \mid \log h_N \mid^{10} \right\}.$$

Из лемм 4 и 5 получаем оценку

$$\frac{|\sigma|}{|I|} \leqslant c \frac{1}{|\log h_N|^{30}} \cdot \frac{\max\limits_{z \in L_N} \operatorname{dist}(z, \Gamma_0)}{|I|} \leqslant \frac{c}{|\log h_N|^{30}}.$$

В силу определения функций ρ^* имеем

$$|I| \asymp \rho^*_{h_N |\log h_N|^{100}}(\Omega_N),$$

и, применяя соотношение (8.4) леммы 10, при $\zeta \in I$ получаем

$$\mid H(\zeta) \mid = \rho^\alpha_{2^{-\nu_N}}(\zeta) \asymp \rho^\alpha_{h_N |\log h_N|}(\zeta) \leqslant$$

$$\leqslant c \frac{1}{|\log h_N|} \rho^{*\alpha}_{h_N |\log h_N|^{100}}(\Omega_N) \leqslant \frac{1}{|\log h_N|} |I|^\alpha.$$

Следовательно, в лемме 8 можно положить $\varepsilon = \frac{c}{|\log h_N|}$ и в соответствии с (7.7) при $\zeta \in L_N$, $N > N_0$ имеем

$$\mid H(\zeta) \mid \leqslant c \left(\rho^\alpha_{2^{-\nu_N}}(\zeta) \right)^{1 - \frac{1}{|\log h_N|^{1/3}}} \cdot \mid I \mid^{\frac{\alpha}{|\log h_N|^{1/3}}},$$

значит,

$$\mid H(\zeta) \mid \leqslant c \frac{1}{|\log h_N|} \delta^\alpha(\zeta), \quad \zeta \in L_N,$$

что вместе с (10.11) дает неравенство

$$| P_{2^{\nu_N}}(\zeta) - P_{2^m}(\zeta) | \leqslant c\, \delta^\alpha(\zeta), \quad \zeta \in L_N.$$

Лемма доказана.

11. Окончание доказательства теоремы 2

Нам потребуются последние технические приготовления. Числа h_N имеют тот же смысл, что и в п. 10. Определим числа ρ_N равенством

$$\rho_N = \rho^*_{h_N |\log h_N|^{3/8}}(\Omega_N),$$

и рассмотрим точки z_N^{0+}, z_N^{0-} которые лежат наΓ_0 по разные стороны от Ω_N и

$$\mid (z_N^{0+}, \Omega_N)_{\Gamma_0} \mid = \mid (z_N^{0-}, \Omega_N)_{\Gamma_0} \mid = \rho_N.$$

Для только что введенных чисел ρ_N и областей L_N^0, определенных в (10.5), легко проверяется включение

$$Q_N \subset L_N^0, \tag{11.1}$$

где

$$Q_N = \Big\{ \zeta = z + it,\, z \in \big(z_N^{0+},\, (z_N^{0-}\big)_{\Gamma_0},$$
$$\rho_N (\log \mid \log \rho_N \mid)^{-1} \leqslant t \leqslant \rho_N (\log \mid \log \rho_N \mid) \Big\}.$$

Для использования леммы 11 установим еще один факт технического характера. Продолжим отрезки $\Omega_0\, O_1$ и $\Omega\, O_2$ до лучей, обозначим через U_1 часть плоскости, ограниченную этими лучами и кривой Γ_0, не содержащую области D, и пусть $U_2 = \mathbb{C} \backslash (U_1 \cup D)$. Предположим, что функция $a(\zeta)$ удовлетворяет условиям

$$\mid a(\zeta) \mid \leqslant c \operatorname{dist}^{\alpha - 1}(\zeta, D), \quad \zeta \in U_1;$$
$$a(\zeta) \equiv 0, \quad \zeta \in Q_N, \quad N \geqslant N_0.$$

Положим

$$f_+(z) = \int\limits_{U_1} \frac{a(\zeta)}{\zeta - z} d\sigma_\zeta. \tag{11.2}$$

Лемма 12. *Для функции $f_+(z)$, определенной в (11.2), справедливо соотношение*

$$\mid f_+(z_N^{00+}) - f_+(z_N^{00-}) \mid = o\left(\mid z_N^{00+} - z_N^{00-} \mid^\alpha \right), \quad N \to \infty,$$

где $z_N^{00+} \in (z_N^{0+}, \Omega_N)_{\Gamma_0}$, $z_N^{00-} \in (z_N^{0-}, \Omega_N)_{\Gamma_0}$ и

$$\frac{\rho_N}{\sqrt{\log \mid \log h_N \mid}} = \mid (z^{00+}, \Omega_N)_{\Gamma_0} \mid = \mid (z^{00-}, \Omega_N)_{\Gamma_0} \mid.$$

Доказательство следует обычной для таких ситуаций схеме [16, 17]: полагая $r_N = \rho_N (\log |\log h_N|)^{-3/8}$, $B_N = B_{r_N}(\Omega_N)$, получаем

$$f_+(z_N^{00+}) - f_+(z_N^{00-}) = \int\limits_{B_N \cap U_1} \frac{a(\zeta) d\sigma}{\zeta - z_N^{00+}} - \int\limits_{B_N \cap U_1} \frac{a(\zeta) d\sigma}{\zeta - z_N^{00-}} +$$
$$+ (z_N^{00-} - z_N^{00+}) \int\limits_{U_1 \backslash B_N} \frac{a(\zeta) d\sigma}{(\zeta - z_N^{00+})(\zeta - z_N^{00-})} = S_1 - S_2 + S_3,$$

после чего получаем оценки модулей интегралов в S_J:

$$|S_j| \leqslant c\frac{1}{(\log|\log h_N|)^{\alpha/8}} \cdot |z_N^{00+} - z_N^{00}|^\alpha,$$

что и требовалось.

Закончим теперь доказательство теоремы 2. Пусть области U_1, U_2 определены в условиях леммы 12. Применяя к финитной функции f_1 формулу Грина, имеем

$$f(z) = f_1(z) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{C}} \frac{\frac{\partial f_1(\zeta)}{\partial\zeta}}{\zeta - z}d\sigma = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{U_1} - \frac{1}{\pi}\int\limits_{U_2}, \quad z \in \overline{D}.$$

Пусть

$$f_+(z) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{U_1} \frac{\frac{\partial f_0(\zeta)}{\partial\overline{\zeta}}}{\zeta - z}d\sigma, \quad f_-(z) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{U_1} \frac{\frac{\partial f_1(\zeta)}{\partial\overline{\zeta}}}{\zeta - z}d\sigma. \tag{11.3}$$

Рассмотрим функцию $f_- = f_1 - f_+$. Из формул (11.3) следует, что функция f_- аналитична вне U_2, поэтому она аналитична в $D \cup U_1$. Функция f_1 аналитична в G, функция f_+ аналитична в $\mathbb{C} \setminus U_1$, поэтому f_- аналитична в $D \cup U_1 \cup (G \cap U_2)$, значит,

$$| f_-(z_N^{00+}) - f_-(z_N^{00-}) | \leqslant c \mid z_N^{00+} - z_N^{00-} \mid. \tag{11.4}$$

К функции f_+ можно применить лемму 11 п. 10 и лемму 12 п. 11, что дает соотношение

$$| f_+(z_N^{00+}) - f_-(z_N^{00-}) | = o \mid z_N^{00+} - z_N^{00-} \mid^\alpha, \quad N \to \infty. \tag{11.5}$$

Из (11.4) и (11.5) следовало бы, что

$$| f(z_N^{00+}) - f(z_N^{00-}) | \leqslant o \mid z_N^{00+} - z_N^{00-} \mid^\alpha, \quad N \to \infty,$$

а это противоречило бы соотношению (9.1) при построении функции f. Полученное противоречие доказывает теорему 2.

Литература

1. В. К. Дзядык, *О проблеме С. М. Никольского в комплексной области,* Изв. АН СССР, Сер. мат. **23**, No. 5 (1959), 697–736.
2. В. К. Дзядык, *К теории приближения аналитических функций, непрерывных в замкнутых областях, и о проблеме С. М. Никольского (второе сообщение),* Изв. АН СССР, Сер. мат. **27**, No. 5 (1963), 1135–1164.

3. П. М. Тамразов, *Гладкости и полиномиальные приближения.* Киев, 1975.
4. В. К. Дзядык, *Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами.* М., 1977.
5. Н. А. Широков, *Аппроксимативная энтропия континуумов,* Докл. АН СССР **235**, No. 3 (1977), 546–549.
6. В. В. Андриевский, *Геометрическое строение областей и прямые теоремы конструктивной теории функций,* Мат. сб. **126**, No. 1 (1985), 41–58.
7. Н. А. Широков, *Аппроксимативные свойства одного континуума,* Зап. научн. семин. ЛОМИ **92** (1979), 241–252.
8. Н. А. Широков, *Равномерное приближение аналитических функций полиномами в области ограниченного граничного вращения без нулевых внешних углов,* Зап. научн. семин. ЛОМИ **65** (1976), 199–202.
9. Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного.* 2-ое изд., М., 1966.
10. P. L. Duren, *Univalent functions.* Springer-Verlag, 1983.
11. В. В. Андриевский, *Аппроксимационная характеристика классов функций на континуум комплексной плоскости,* Мат. сб. **125**, No. 1 (1994), 70–87.
12. В. И. Белый, *Конформные отображения и приближения функций в областях с квазиконформной границей,* Мат. сб. **104**, No. 3 (1977), 163–193.
13. Н. А. Лебедев, Н. А. Широков, *О равномерном приближении функций на замкнутых множествах, имеющих конечное число угловых точек с ненулевыми внешними углами,* Изв. АН Арм. ССР **6**, No. 4 (1971), 311–341.
14. В. Н. Дзядык, *О применении обобщенных полиномов Фабера к приближению интегралов типа Коши и функций класса A^r в областях с гладкой и кусочно-гладкой границей,* Укр. мат. журн. **24**, No. 1 (1972), 3–12.
15. N. A. Shirokov, *Analytic functions smooth up to the boundary,* Lecture Notes in Math. **1312**, 1988.
16. Е. М. Дынькин, *Скорость полиномиальной аппроксимации в $E^p(G)$,* Докл. АН СССР **231**, No. 3 (1976), 529–531.
17. Е. М. Дынькин, *Оценки аналитических функций в жордановых областях,* Зап. научн. семин. ЛОМИ **73** (1977), 70–91.

С.-Петербургский государственный
электротехнический университет

Поступило 12 марта 1997 г.