Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 255, 1998 г.

Г. Я. Арешкин

ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ ОТ СКАЛЯРНЫХ ФУНКЦИЙ ПО ВЕКТОРНОЙ МЕРЕ К НЕКОТОРЫМ ВОПРОСАМ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА И ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Краткий обзор содержания работы

В п. I вместе с принимаемыми обозначениями и соглашениями приводятся некоторые используемые в дальнейшем сведения. В п. II доказываются предложения о разложении векторных мер, неопределенных интегралов от скалярных функций по векторным мерам и линейных непрерывных операторов, действующих из БФП $X(T,\Sigma,\mu)$ в сепарабельное гильбертово пространство H. На этой основе в п. III дается обобщение теоремы Ф. Рисса о представлении линейных непрерывных функционалов на случай линейных непрерывных операторов, действующих из X в H, и, в частности, на случай преобразований пространства H. В п. IV полученные результаты применяются к самым общим линейным интегральным уравнениям $\int\limits_T x(t)d\nu = \varphi$, $x \in X$, $\varphi \in H$, определяемым ограниченными σ-аддитивными, абсолютно непрерывными относительно μ мерами $\nu : \Sigma \to H$. Доказывается, что такие уравнения эквивалентны (при некотором дополнительном условии) бесконечным системам скалярных линейных интегральных уравнений $\int\limits_T x(t)y_k(t)d\mu = \varphi_k$, $k = 1, 2, \ldots$; характеризуются бесконечные СЛАУ в l^2, эквивалентные таким системам и, значит, уравнениям вида $\int\limits_T x d\nu = \varphi$.

I. Обозначения, соглашения и необходимые сведения

Через (T,Σ,μ) обозначается измеримое пространство T с σ-алгеброй измеримых множеств Σ и с конечной σ-аддитивной мерой $\mu : \Sigma \to \mathbf{R}^+$; через X обозначается вещественное банахово фундаментальное пространство (БФП) над (T, Σ, μ) с условием (A) [1]. Функции в X отождествляются по мере μ. Функция $1(t) \equiv 1$ принадлежит X. Через S обозначается множество всех Σ-простых функций в X. В силу условия (A) S плотно в X [1]. Через H обозначается вещественное гильбертово пространство с не более чем счетным ортонормированным базисом $\Omega = \{\omega_k\}_K$. Будут рассматриваться σ-аддитивные, абсолютно непрерывные относительно μ векторные меры $\nu = \nu(e)$, $e \in \Sigma$, с значениями в H (см. [2]).

Пусть $h \in S$, $h = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \chi_{e_i}$, где $DT = \{e_i\}_1^n$ некоторое Σ-подразделение множества T. Положим $\psi_h(e) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \nu(e_i)$. $\psi_h(e)$ не зависит от представления h в виде $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \chi_{e_i}$. Мера ν называется ограниченной на S (см. [3, 4]), если существует число C такое, что $\forall h \in S$ $\forall e \in \Sigma$: $\|\psi_h(e)\|_H \leqslant C\|h\|_X$. Нижняя грань чисел C с таким свойством называется нормой меры ν и обозначается $\|\nu\|$.

Интегралы от скалярных функций по векторной мере вводились и изучались рядом авторов: Р. Г. Бартлом, Н. Данфордом и Дж. Шварцем в 1955 г. [5], Г. Гоулдом в 1965 г. [6], Д. Р. Леви в 1970 г. [7], Ш. Шварцем в 1976 г. [8]. Ни Д. Р. Леви, ни Ш. Шварц не анализировали связей между всеми этими понятиями. В работе [4] на аксиоматической основе было дано определение неопределенного интеграла от скалярных функций по аддитивной векторной мере ν, $\nu \ll \mu$: $\left\{\int_e x d\nu / e \in \Sigma\right\}_{x \in X}$, для случая, когда X – F-пространство, а H – B-пространство. Именно это определение положено в основу данной работы. Оно тесно связано с линейными операторами, а именно, в нашем случае пространств X и H из теорем 1 и 2 и следствия 2 работы [4] следует, что

1) Всякий оператор $f \in L(X, H)$ однозначно представим в виде: $\forall x \in X : f(x) = \int_T x d\nu_f$, где ν_f – σ-аддитивная и абсолютно непрерывная относительно μ мера, определяемая равенством $\forall e \in \Sigma : \nu_f(e) = f(\chi_e)$.

2) σ-аддитивная, абсолютно непрерывная относительно μ мера ν: $\Sigma \to H$, определяет оператор $f_\nu \in L(X, H)$ тогда и только тогда, когда она ограничена.

II. Теоремы о разложении векторных мер, неопределенных интегралов и линейных операторов

II.1 Лемма 1. *Всякая σ-аддитивная, абсолютно непрерывная относительно μ векторная мера $\nu : \Sigma \to H$ однозначно разлагается в ряд: $\forall e \in \Sigma : \nu(e) = \sum\limits_K \mu_k(e)\omega_k$, где $\mu_k(e) = (\nu(e), \omega_k)$, $k \in K$, σ-аддитивны и абсолютно непрерывны относительно μ. Если мера ν ограничена на S, то меры μ_k ограничены на S, причем $\|\nu\|^2 \leqslant \sum\limits_K \|\mu_k\|^2$.*

Доказательство. Поскольку $\nu(e) \in H$, имеем: $\nu(e) = \sum\limits_K (\nu(e), \omega_k)\omega_k = \sum\limits_K \mu_k(e)\omega_k$. Если $\mu(e) = 0$, то $\nu(e) = 0$, откуда следует, что $\mu_k(e) = 0$. Доказательство σ-аддитивности мер μ_k не составляет труда. Докажем их ограниченность. Пусть $h \in S$, $h = \sum\limits_\Pi \lambda_i \chi_{e_i}$, где $\Pi = \{e_i\}_1^L$ измеримое подразделение T. Тогда $\forall e \in \Sigma$:

$$\sum_\Pi \lambda_i \nu(e_i \cap e) = \sum_\Pi \lambda_i \left(\sum_K \mu_k(e_i \cap e)\omega_k \right) = \sum_K \left[\sum_\Pi \lambda_i \mu_k(e_i \cap e) \right] \omega_k.$$

Следовательно,

$$\left\| \sum_\Pi \lambda_i \nu(e_i \cap e) \right\|^2 = \sum_K \left| \sum_\Pi \lambda_i \mu_k(e_i \cap e) \right|^2. \tag{2}$$

Поскольку ν ограничена на S $\left\| \sum\limits_\Pi \lambda_i \nu(e_i \cap e) \right\| \leqslant \|\nu\| \cdot \|h\|$, следовательно, согласно (2), тем более $\left| \sum\limits_\Pi \lambda_i \mu_k(e_i \cap e) \right| \leqslant \|\nu\| \cdot \|h\|$ и, значит, меры μ_k ограничены и $\|\mu_k\| \leqslant \|\nu\|$. Следовательно, $\left| \sum\limits_\Pi \lambda_i \mu_k(e_i \cap e) \right| \leqslant \|\mu_k\| \cdot \|h\|$, а потому из (2) получаем $\left\| \sum\limits_\Pi \lambda_i \nu(e_i \cap e) \right\|^2 \leqslant \left(\sum\limits_K \|\mu_k\|^2 \right) \cdot \|h\|^2$, что завершает доказательство.

Меры μ_k называем в дальнейшем координатными мерами меры ν. Учитывая лемму 1, получаем

Следствие 1. *Если мера ν ограничена на S и $\nu \ll \mu$, то меры μ_k: $\Sigma \to \mathbf{R}$, $k \in K$, определяют на X неопределенные интегралы* $\left\{\int_e x(t)d\mu_k / e \in \Sigma\right\}_{x\in X}$[1].

Теорема 1. *Пусть $\nu : \Sigma \to H$ σ-аддитивна, $\|\nu\| < \infty$, $\nu \ll \mu$, $\nu(e) = \sum\limits_K \mu_k(e)\omega_k$, $e \in \Sigma$. Тогда координатные меры μ_k σ-аддитивны, ограничены на S и справедливо равенство*

$$\forall e \in \Sigma \; \forall x \in X : \int\limits_e x d\nu = \sum_K \left(\int\limits_e x(t)d\mu_k \right) \omega_k. \tag{3}$$

Доказательство. Ограниченность мер μ_k и их σ-аддитивность на S доказаны в лемме 1. Далее, согласно следствию 1 интегралы $\int_e x d\mu_k$ существуют (и конечны). Положим $\forall k \in K$, $\forall e \in \Sigma : \nu_k(e) = \mu_k(e)\omega_k$. Тогда $\nu_k : \Sigma \to H$ и $\nu = \sum\limits_K \nu_k$. Заметим, что $\forall h \in S$ $\forall e \in \Sigma : \int_e h d\nu_k = \left(\int_e h d\mu_k\right)\omega_k$. Поскольку это равенство верно для любого $h \in S$, оно верно и для любого $x \in X$. Применяя следствие 4 п. 4 работы [4], получим (3).

II.2 Теорема 2. 1. *Каковы бы ни были аддитивные меры μ_k: $\Sigma \to \mathbf{R}$, $k \in K$, удовлетворяющие условию $\forall e \in \Sigma : \sum\limits_K \mu_k^2(e) < \infty$, существует единственная аддитивная мера $\nu : \Sigma \to H$, для которой μ_k – координатные меры.*

2. *Если μ_k σ-аддитивны, $\mu_k = \mu_k^+ - \mu_k^-$ их Жордановы разложения и*

$$\sum_K [\mu_k^+(T)]^2 < \infty, \quad \sum_K [\mu_k^-(T)]^2 < \infty, \tag{4}$$

то меры

$$\nu^+(e) = \sum_K \mu_k^+(e)\omega_k, \quad \nu^-(e) = \sum_K \mu_k^-(e)\omega_k \tag{5}$$

и $\nu = \nu^+ - \nu^-$ – σ-аддитивны и $\nu(e) = \sum_K \mu_k(e)\omega_k$.

3. *Для того, чтобы меры ν^+ и ν^- были ограничены, достаточно, чтобы*

$$\sum_K \|\mu_k^+\|^2 < \infty, \quad \sum_K \|\mu_k^-\|^2 < \infty. \tag{6}$$

[1] Заметим, что поскольку эти интегралы принадлежат $\mathbf{R}$, они конечны.

Тогда
$$\|\nu\| \leqslant \sqrt{\sum_K \|\mu_k^+\|^2} + \sqrt{\sum_K \|\mu_k^-\|^2}. \tag{7}$$

4. *Если* $\mu_k \ll \mu$, $k \in K$, *то* $\nu \ll \mu$.

Доказательство. 1. Согласно теореме Рисса–Фишера из условий п. 1 теоремы следует существование и единственность функции $\nu(e) = \sum\limits_K \mu_k(e)\omega_k$. Аддитивность этой функции очевидна.

2. По только что доказанному из (4) следует (5), и остается доказать, что меры ν^+ и ν^- σ-аддитивны.

Пусть $\{e_n\}_1^\infty$ – измеримое подразделение множества e и $E_m = \bigcup\limits_{n=m+1}^{\infty} e_n$. Поскольку $\left\|\nu^+(e) - \sum\limits_{n=1}^{m} \nu^+(e_n)\right\| = \|\nu^+(E_m)\|$, требуется доказать, что
$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall m > n_0 : \|\nu^+(E_m)\| < \varepsilon. \tag{8}$$

Имеем
$$\forall m : \|\nu^+(E_m)\|^2 = \sum_K [\mu_k^+(E_m)]^2. \tag{9}$$

Зафиксируем любое m_0. В силу (4) из (9) следует, что $\sum\limits_K [\mu_k^+(E_{m_0})]^2 < \infty$. Следовательно, $\exists k_0 : \sum\limits_{k=k_0+1}^{\infty} [\mu_k^+(E_{m_0})]^2 < \varepsilon^2/2$. Посольку $E_m \downarrow \varnothing$ и $\mu_k^+(E_m) \geqslant 0$,
$$\forall m \geqslant m_0 : \sum_{k=k_0+1}^{\infty} [\mu_k^+(E_m)]^2 < \varepsilon^2/2. \tag{10}$$

Так как меры μ_k^+ σ-аддитивны, $\forall k \leqslant k_0$ $\exists m_k$ $\forall m \geqslant m_k$: $[\mu_k^+(E_m)]^2 < \varepsilon/2k_0$. Пусть $n_0 = \max(m_0, m_k, k = 1, \dots, k_0)$. Тогда $\forall m \geqslant n_0$: $\sum\limits_{k=1}^{k_0} [\mu_k^+(E_m)]^2 < \varepsilon^2/2$. Следовательно, учитывая (10), получаем: $\forall\varepsilon$ $\exists n_0$ $\forall m \geqslant n_0 : \sum\limits_K [\mu_k^+(E_m)]^2 < \varepsilon^2$. Вместе с (9) это дает (8) и σ-аддитивность ν^+ доказана. Аналогично докажем, что ν^-, а значит, и $\nu = \nu^+ - \nu^-$ σ-аддитивны.

3. Пусть $h(e) = \sum\limits_\Pi \lambda_i \chi_{e_i \cap e}$. Тогда, учитывая определение нормы векторной меры (см. п. I), имеем
$$\left\|\sum_\Pi \lambda_i \nu^+(e_i \cap e)\right\|^2 = \left\|\sum_\Pi \lambda_i \sum_K \mu_k^+(e_i \cap e)\omega_k\right\|^2 =$$

$$\sum_K \left| \sum_\Pi \lambda_i \mu_k^+(e_i \cap e) \right|^2 \leqslant \left(\sum_K \|\mu_k^+\|^2 \right) \|h\|^2.$$

Следовательно, $\|\nu^+\|^2 \leqslant \sum\limits_K \|\mu_k^+\|^2$, $\|\nu^-\|^2 \leqslant \sum\limits_K \|\mu_k^-\|^2$. Отсюда, в силу (6), $\|\nu^+\| < \infty$ и $\|\nu^-\| < \infty$. Далее имеем $\left\| \sum\limits_\Pi \lambda_i \nu(e_i \cap e) \right\| \leqslant \left\| \sum\limits_\Pi \lambda_i \nu^+(e_i \cap e) \right\| + \left\| \sum\limits_\Pi \lambda_i \nu^-(e_i \cap e) \right\| \leqslant (\|\nu^+\| + \|\nu^-\|)\|h\|$, откуда получаем (7).

4. Следует непосредственно из равенства $\nu(e) = \sum\limits_K \mu_k(e)\omega_k$.

II.3. Следствие 2. *Всякий линейный непрерывный оператор $f : X \to H$ однозначно разлагается в ряд*

$$\forall x \in X : f(x) = \sum_K f_k(x)\omega_k, \tag{11}$$

где

$$f_k(x) = \int_T x(t) d\mu_k, \quad \mu_k(e) = (\nu_f(e), \omega_k). \tag{12}$$

Каковы бы ни были меры $\mu_k : \Sigma \to \mathbf{R}$, $\mu_k \ll \mu$, для которых μ_k^+ и μ_k^- σ-аддитивны и удовлетворяют условиям (4) и (6), существует единственный линейный непрерывный оператор $f : X \to H$, для которого $\nu_f(e) = \nu^+(e) - \nu^-(e) = \sum\limits_K \mu_k^+(e)\omega_k - \sum\limits_K \mu_k^-(e)\omega_k$. При этом ν^+, ν^- и ν_f ограничены и справедливо неравенство (7).

Первая часть следствия получается из теоремы 1 при $e = T$; вторая получается непосредственно из теоремы 2 и предложения 2) п. I.

III. Обобщение теоремы Ф. Рисса о представлении линейных непрерывных функционалов

В этом пункте на основании результатов, полученных в п. II, дается обобщение теоремы Ф. Рисса о представлении линейных непрерывных функционалов на случай линейных операторов, действующих из X в H, и, в частности, на случай линейных преобразований пространства H.

III.1. Теорема 3. *Каков бы ни был линейный непрерывный оператор $f : X \to H$, существует единственная последовательность μ-интегрируемых функций $\{y_k(t)\}$, $t \in T$, для которой функции $x(t)y_k(t)$, где $x \in X$, μ-интегрируемы, причем*

$$\forall x \in X : f(x) = \sum_K \left(\int_T x(t) y_k(t) d\mu \right) \omega_k, \tag{1}$$

$$\nu_f(e) = \sum_K \mu_k(e)\omega_k, \quad \mu_k(e) = \int_e y_k(t) d\mu, \ e \in \Sigma. \tag{2}$$

Наоборот, если задана последовательность μ-интегрируемых функций $\{y_k(t)\}$, и если для $y_k^+ = y_k \wedge 0$, $y_k^- = -y_k \wedge 0$, $\mu_k^+(e) = \int_e y_k^+(t)d\mu$, $\mu_k^-(e) = \int_e y_k^-(t)d\mu$, $\mu_k(e) = \mu_k^+(e) - \mu_k^-(e)$ выполняются соотношения (4) *и* (6) *п.* II.2, *то существует единственный линейный непрерывный оператор $f : X \to H$, для которого справедливы равенства* (1) *и* (2).

Доказательство. Согласно следствию 2 для оператора f справедливы равенства (11) и (12) п. II.3. Согласно следствию 2, §1, гл. VI, [1], для функционала f_k существует единственная μ-интегрируемая функция $y_k(t)$, $t \in T$, для которой функции $x(t) \cdot y_k(t)$, $x \in X$, μ-интегрируемы и справедливо равенство

$$f_k(x) = \int_T x(t) y_k(t) d\mu. \tag{3}$$

При этом

$$\nu_{f_k}(e) = \int_e y_k(t) d\mu. \tag{4}$$

При $k \in K$ получаем последовательность $\{y_k(t)\}$ μ-интегрируемых функций, а, подставляя (3) в (11) п. II.3, получим (1). Далее из (11) п. II.3 при $x = \chi_e$ получим

$$\nu_f(e) = \sum_K \nu_{f_k}(e)\omega_k, \tag{5}$$

а из (12) п. II.3 следует $\nu_{f_k}(e) = \mu_k(e)$. Подставляя $\mu_k(e)$ вместо $\nu_{f_k}(e)$ в (5), получим первое из равенств (2), а, подставляя в (4), – второе из равенств (2).

Пусть выполнены условия второй части теоремы. Тогда, согласно теореме 2, мера $\nu(e) = \sum\limits_K \mu_k(e)\omega_k$ σ-аддитивна, ограничена и абсолютно непрерывна относительно μ. Согласно предложения 2) п. I существует единственный линейный непрерывный оператор $f : X \to H$, для которого $\nu_f = \nu$. Согласно уже доказанной первой части теоремы оператор f однозначно определяет последовательность функций $\{y_k^*(t)\}$, для которой справедливы равенства

$$\forall x \in X : f(x) = \sum_K \left(\int\limits_T x(t) y_k^*(t) d\mu \right) \omega_k, \tag{1'}$$

$$\nu_f(e) = \sum_K \mu_k^*(e)\omega_k, \quad \mu_k^*(e) = \int\limits_e y_k^*(t) d\mu, \ e \in \Sigma. \tag{2'}$$

Поскольку $\nu_f(e) = \sum\limits_K \mu_k(e)\omega_k$, сравнивая с $\nu_f(e) = \sum\limits_K \mu_k^*(e)\omega_k$, заключаем $\mu_k^*(e) = \mu_k(e)$. Поскольку $\mu_k(e) = \int\limits_e y_k(t) d\mu$, сравнивая с $\mu_k^*(e) = \int\limits_e y_k^*(t) d\mu$, заключаем, что $y_k^* \overset{\mu}{\approx} y_k$. Но тогда формулы (1′) и (2′) превращаются в формулы (1) и (2).

В случае $X = H = L^2(T, \Sigma, \mu)$ теорема 3 усиливается.

III.2. Теорема 4. *Всякое линейное непрерывное преобразование $f : H \to H$ однозначно определяет последовательность $\{y_k\}_K$ векторов из H, для которых справедливы равенства (1) и (2). Для того, чтобы последовательность векторов $\{y_k\}_K$ из H определяла линейное непрерывное преобразование пространства H, для которого было бы справедливо (1), необходимо и достаточно, чтобы*

$$\forall x \in H : \sum_K \left(\int\limits_T x(t) y_k(t) d\mu \right)^2 < \infty. \tag{6}$$

Всякая последовательность векторов $\{y_k\}$ из L^2, для которой $\sum\limits_K \|y_k\|^2 < \infty$, определяет линейное непрерывное преобразование f, для которого справедливо (1). При этом $\|f\|^2 \leqslant \sum\limits_K \|y_k\|^2$.

Доказательство. Если $f \in L(L^2)$ и справедливо (1), то

$$\forall x \in L^2 : \|f(x)\|^2 = \sum_K \left(\int_T x(t) y_k(t) d\mu \right)^2,$$

и, следовательно, эта сумма конечна.

Наоборот, пусть выполнено (6). Тогда для любого $x \in L^2$ ряд $\sum_K \left(\int_T x(t) y_k(t) d\mu\right) \omega_k$ сходится в L^2. Обозначим его сумму через $f(x)$. Согласно теореме Ф. Рисса и Э. Фишера для каждого $x \in L^2$, числа $\int\limits_T x(t) y_k(t) d\mu$ будут коэффициентами Фурье вектора $f(x)$ по базису Ω. В силу полноты базиса Ω при этом будет справедливо равенство (1). Таким образом, последовательность $\{y_k\}$ определяет преобразование f в L^2. Очевидно, что это преобразование линейно. Докажем, что оно непрерывно. Пусть $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n \omega_n$, $y_k = \sum\limits_{n=1}^{\infty} y_{kn} \omega_n$. Тогда, согласно обобщенной формулы замкнутости $\int_T x(t) y_k(t) d\mu = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n y_{kn}$. Поэтому равенство (1) можно записать в виде $f(x) = \sum\limits_K \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n y_{kn} \right) \omega_k$. Поскольку $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty$, а в силу условия (6) $\sum\limits_K \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n y_{kn} \right)^2 < \infty$, оператор f допускает матричное представление. Согласно теореме 1, гл. II, п. 29 [2], оператор f ограничен.

Пусть $\{y_k\}_K$ – любая последовательность из L^2, для которой $\sum\limits_K \|y_k\|^2 < \infty$. Тогда

$$\forall x \in L^2 : \sum_K \left(\int_T x(t) y_k(t) d\mu \right)^2 \leqslant \left(\sum_K \|y_k\|^2 \right) \cdot \|x\|^2 < \infty.$$

Следовательно, для этой последовательности $\{y_k\}$ выполнено условие (6) и, значит, $\{y_k\}$ определяет линейный непрерывный оператор в соответствие с (1). Наконец, из (1) следует

$$\|f\|^2 = \sup_{\|x\|=1} \sum_K \left(\int_T x(t) y_k(t) d\mu \right)^2 \leqslant \sum_K \|y_k\|^2.$$

IV. Применения к линейным интегральным уравнениям

IV.1. Пусть $\varphi \in H$. На основании предложений 1) и 2) п. I, заключаем, что всякое уравнение $f(x) = \varphi$, где $f : X \to H$ линейный непрерывный оператор, может быть записано в виде

$$\int\limits_T x(t)d\nu = \varphi, \tag{1}$$

в котором $\nu : \Sigma \to H$ σ-аддитивна, ограничена ($\|\nu\| < \infty$) и абсолютно непрерывна относительно μ. При этом $\forall e \in \Sigma : \nu(e) = f(\chi_e)$. Наоборот, всякое уравнение (1) с указанными условиями на меру ν является уравнением вида $f(x) = \varphi$, где $f : X \to H$ линейный непрерывный оператор и $f(\chi_e) = \nu(e)$. Таким образом, уравнение (1) является наиболее общим линейным непрерывным интегральным уравнением.

IV.2. Пусть $y_k(t)$, $k \in K$, плотности координатных мер μ_k векторной σ-аддитивной меры ν, $\|\nu\| < \infty$, $\nu \ll \mu$. Пусть $\varphi = \sum\limits_K \varphi_k \omega_k$. Рассмотрим систему уравнений

$$\int\limits_T x(t)y_k(t)d\mu_t = \varphi_k\,[1], \quad k \in K. \tag{2}$$

Теорема 5. *Уравнение* (1) *и система уравнений* (2) *эквивалентны.*

Доказательство. Согласно теореме 3 оператор $f(x) \equiv \int\limits_T x(t)d\nu$ разлагается в ряд (1) п. III.1. Поэтому уравнение (1) можно записать в виде $\sum\limits_K \left(\int\limits_T x(t)y_k(t)d\mu_t\right)\omega_k = \sum\limits_K \varphi_k\omega_k$. Это уравнение равносильно системе уравнений $\int\limits_T x(t)y_k(t)d\mu_t = \varphi_k$, $k \in K$.

Рассмотрим априори заданную систему (2) и зададимся вопросом, всегда ли она будет эквивалентна уравнению (1), в котором $\nu : \Sigma \to H$ – σ-аддитивна, ограничена и $\nu \ll \mu$. В случае, когда $X = H = L^2(T, \Sigma, \mu)$, ответ непосредственно вытекает из теоремы 4.

---

[1] $\mu_t(e) = \mu_\tau(e) = \mu(e)$, $e \in \Sigma$.

Следствие 3. *Для того, чтобы априори заданная система уравнений* (2) *была эквивалентна уравнению* (1) *с σ-аддитивной ограниченной абсолютно непрерывной мерой ν, необходимо и достаточно выполнение условия* (6) *теоремы* 4 *(п.* III.2*).*

Действительно, если выполнено условие (6) теоремы 4, то существует линейное непрерывное преобразование $f : L^2 \to L^2$ и, следовательно, мы можем рассмотреть уравнение (1), в котором $\varphi \in H$. Согласно теореме 4 это уравнение эквивалентно системе уравнений (2).

IV.3. Пусть $\Omega = \{\omega_k\}_1^\infty$, $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n\omega_n$, $y_k = \sum\limits_{n=1}^{\infty} y_{kn}\omega_n$, $\varphi = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_n\omega_n$, $x, y_k, \varphi \in H$. Рассмотрим наряду с системой (2) с условием

$$\forall x \in X : \sum_K \left(\int_T x(t) y_k(t) d\mu_t \right)^2 < \infty, \tag{3}$$

бесконечную СЛАУ в пространстве l^2

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_{kn} = \varphi_k, \quad k = 1, 2, \dots, \tag{4}$$

с условием

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_{kn} \right)^2 < \infty. \tag{5}$$

Теорема 6. *Система* (2) *с условием* (3) *и система* (4) *с условием* (5) *эквивалентны.*

Доказательство. Применяя к (2) обобщенную формулу замкнутости, получим (4), а применяя эту формулу к (3), получим (5). Наоборот, из (4) и (5) можем получить (2) и (3).

Следствие 4. *Уравнение* (1) *(с непрерывным оператором) и система* (4) *с условием* (5) *эквивалентны.*

IV.4. Поскольку всякое уравнение $Vx = \varphi$, в котором V – линейный непрерывный (в частности – дифференциальный) ограниченный оператор, является уравнением вида (1), становится необходимым развитие эффективных методов численного решения систем (2) с условием (3). Для этого, в первую очередь необходимо найти методы отыскания координат y_k, оператора $V = \{y_k\}_K$. Этот вопрос будет рассмотрен в следующей работе. В силу следствия 4 открывается возможность при приближенном решении уравнений $Vx = \varphi$ использовать разработанную теорию приближенного решения бесконечных СЛАУ ([10, 11]).

Литература

1. Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, *Функциональный анализ.* Изд. третье. М.: Наука, 1984, 750 с.
2. N. Dinculeanu, *Vector measures.* Berlin, 1966.
3. А. Г. Арешкина, Деп. ВИНИТИ, No. 6959-В 87, 28.09.87.
4. А. Г. Арешкина, *Интегралы от скалярных функций по векторной мере и линейные операторы.* Межвузовский сборник научных трудов ЛГПИ, 37–42 (1988).
5. R. G. Bartle, N. Dunford, J. T. Schwartz, *Weak compactness and vector measures.* Canadian J. Math., **7**, 289–305 (1965).
6. G. G. Gould, *Integration over vector valued measures.* London Math. Soc., third series, **XV**, p. 2, 193–225 (1965).
7. D. R. Levis, *Integration with respect to vector measures.* Pacific J. of Math., **33**, No. 1, 157–165 (1970).
8. Ch. Schwartz, *Integration with respect to vector measures.* Bull. Soc. roy Sci Liege, **45**, No. 3–4, 76–79 (1976).
9. Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман, *Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве.* М., Наука, 543 с. 1966.
10. Л. В. Канторович, В. П. Крылов, *Приближенные методы высшего анализа.* Издание четвертое, М.-Л., 1952.
11. Л. В. Канторович, *Функциональный анализ и прикладная математика.* УМН, III, в. 6, 1948.

Areshkin G. Ya. Integrals of scalar functions against a vector measure and their applications to some questions of functional analysis and linear integral equations.

We prove some assertions on the decomposition of indefinite integrals of scalar functions against a vector measure, as well as of continuous linear operators acting from a fundamental Banach space $X(T, \Sigma, \mu)$ to a Hilbert space H. Hence we deduce a representation theorem for continuous linear operators going from X to H. These results are applied to most general linear integral equations of the form $\int_T x(t) d\nu = \varphi$, $x \in X$, $\varphi \in H$, $\nu : \Sigma \to H$, $\nu \ll \mu$. Such equations are equivalent to certain infinite systems of scalar integral equations and to infinite systems of linear algebraic equations.

Военный инженерный
строительный университет

Поступило 12 января 1998 г.