Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 255, 1998 г.

Е. И. Бережной

ТЕОРЕМА ИСПРАВИМОСТИ ДЛЯ ФУНКЦИЙ С ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЛАДКОСТЬЮ

Известную теорему Н. Лузина о C-свойстве измеримой функции $f : [0,1] \to R$ можно переформулировать следующим образом: для всякого $\epsilon > 0$ найдется множество $I(\epsilon)$ с мерой больше $1-\epsilon$ такое, что равномерный модуль непрерывности функции f, вычисленный по точкам этого множества, стремится к нулю. В дальнейшем теорема Н. Лузина развивалась по двум руслам: одно из них – это теоремы исправимости, т.е. ищется функция g с хорошими свойствами, для которой $|t : q(t) \neq f(t)| < \epsilon$, а второе - оценки некоторых характеристик функции f на множествах меры больше $1-\epsilon$. К теоремам первого направления можно отнести теоремы типа Д. Меньшова [1], к теоремам второго типа относятся, в основном, многомерные теоремы [2–4]. Это связано с тем, что теоремы первого типа связаны с теоремами второго типа через теорему о продолжении, а теоремы о продолжении в R^n существенно сложнее одномерных.

Настоящая работа посвящена решению следующей задачи. Пусть фиксировано $\epsilon > 0$ и функция $f : [0,1] \to R$ с заданным k-м модулем непрерывности, вычисленным в симметричном пространстве X. Требуется указать множество $I(\epsilon)$ меры больше $1-\epsilon$ такое, что сужение f на множество $I(\epsilon)$ допускает неулучшаемую (относительно всех сужений на множества M с мерой большей $1-\epsilon$) оценку равномерного модуля непрерывности, и выписать эту оценку равномерного модуля непрерывности.

Полный ответ для этой задачи для $k = 1$ и пространств L^p в одномерном случае дал К. Осколков [5, 6]. В многомерном случае для $k = 1$ эта задача разобрана автором [2]. Отметим, что ранее для $k = 1$ некоторые многомерные результаты для L^p были получены Ю. Брудным и В. Колядой [3, 4].

Схема решения основной задачи достаточно традиционна для теорем исправимости. Сначала данная функция представляется в виде суммы ряда $\sum_1^\infty f_i$ гладких функций. Далее для каждой функции f_i рассматривается ее сужение на множество большой меры I_i такое, что на этом множестве функция имеет гарантированную гладкость. После этого искомое множество $I(\epsilon)$ берется как пересечение множеств I_i. Реализация этого подхода, предлагаемая в настоящей работе, основана на оценках специальных максимальных функций и позволила решить сразу задачу для модуля непрерывности произвольного порядка и широкого класса симметричных пространств. Основной результат работы представлен в теоремах 1 и 2. Отметим, что в случае $k = 1, X = L^p$ теорема 2 просто совпадает с теоремой К. Осколкова [5, 6]. Уместно отметить, что оценки равномерного модуля непрерывности f на $I(\epsilon)$ зависят только от фундаментальной функции симметричного пространства, в котором вычисляется исходный модуль непрерывности, и одинаковы для всех симметричных пространств с данной фундаментальной функцией. В конце работы построен пример (теорема 3), который показывает, что основная теорема не может быть усилена.

Пусть $I_0 = [0, 1]$ отрезок в R с обычной мерой Лебега.

Через U обозначим множество функций $\varphi : [0, 1] \to R_+$, каждая из которых не убывает, отношение $\varphi(t)/t$ не возрастает и $\lim_{t\to 0} \varphi(t) = 0$. Хорошо известно, что каждая функция из U эквивалентна своей наименьшей вогнутой мажоранте. Через $U(k)$, $k = 2, 3, \dots$, обозначим множество функций $\varphi : [0, 1] \to R_+$, каждая из которых не убывает, отношение $\varphi(t)/t^k$ не возрастает. Функции из $U(k)$ являются функциями типа k-го модуля непрерывности.

Пусть f измеримая функция на I_0. Функция распределения f определяется равенством

$$\lambda(f; t) = |\{s \in I_0 : |f(s)| > t\}|.$$

Невозрастающей перестановкой функции f называется невозрастающая на I_0 функция f^*, равноизмеримая с $|f(t)|$, т.е. $\lambda(f; t) \equiv \lambda(f^*; t)$. Перестановка f выражется через функцию распределения равенством

$$f^*(t) = \inf\{s > 0 : \lambda(f; s) < t\}.$$

Банахово пространство X, состоящее из измеримых функций на I_0, называется симметричным, если из справедливости при всех $t \geq 0$ неравенства $\lambda(g; t) \leq \lambda(f; t)$ и $f \in X$ следует, что $g \in X$ и $\|g|X\| \leq \|f|X\|$. Примерами симметричных пространств функций являются пространства Лебега L^p, Орлича L_N, Лоренца $\Lambda(\varphi)$, Марцинкевича $M(\varphi)$ (см., например [7]). Поскольку пространства Лоренца и Марцинкевича будут использованы ниже, приведем их определение. Пусть $\varphi \in U$. Пространство Лоренца (Марцинкевича) состоит из тех измеримых функций $f : I_0 \to R$, для которых конечна норма

$$\|f|\Lambda(\varphi)\| = \int\limits_0^1 f^*(s)d\varphi(s)$$

$$(\quad \|f|M(\varphi)\| = \sup_{D\in I_0} \frac{\varphi(|D|)}{|D|} \int\limits_D |f(s)|ds = \sup_{0<t\le 1} \frac{\varphi(t)}{t} \int\limits_0^t |f^*(s)|ds \quad).$$

Для симметричного пространства X через X' обозначим пространство интегральных функционалов на X с нормой

$$\|g|X'\| = \sup\{\int\limits_{I_0} f(t)g(t)dt : \|f|X\| \le 1\}.$$

Пространство X' также является симметричным пространством. Важную информацию о симметричном пространстве X несет его фундаментальная функция $\psi(X;t) = \|\chi(0,t)|X\|$ ($\chi(D)$ есть характеристическая функция множества D). Хорошо известна [7] связь между фундаментальными функциями пространств X и X' : $\psi(X';t) = t/\psi(X;t)$. Отметим, что для каждого симметричного пространства его фундаментальная функция $\psi(X;t)$ квазивогнута. Мы будем дополнительно предполагать, что $\lim_{t\to 0}\psi(X;t) = 0$, т.е. $\psi(X;t) \in U$. В качестве примера отметим, что $\psi(L^p;t) = t^{1/p}$, $\psi(\Lambda(\varphi);t) = \varphi(t)$, $\quad \psi(M(\varphi);t) = \varphi(t)$.

Отметим также, что всегда верно непрерывное вложение $X \subseteq L^1$. Пусть $f \in X$. Для каждого $\lambda > 0$ определим множество $D(f,\lambda) = \{t \in I_0 : |f(t)| > \lambda\}$. Тогда для любой $g \in X'$ с $\|g|X'\| \le 1$ верно неравенство

$$\|f|X\| \ge \int |f(t)||g(t)|dt \ge \int\limits_{D(f,\lambda)} \lambda\ |g(t)|\ dt \ge \int \lambda\ \chi(D(f,\lambda))\ |g(t)|\ dt.$$

Переходя к верхней грани по g, придем к неравенству

$$\psi(X;|D(f,\lambda)|) \le \frac{1}{\lambda}\ \|f|X\|. \qquad (1)$$

Ниже нам удобно считать, что каждая функция $f : I_0 \to R$ определена не только на I_0, но и доопределена на все R нулем.

Пусть функция f определена на I_0. Тогда для любого натурального k и любых $t \in I_0$ и $h > 0$ таких, что $t + kh \in I_0$, k-й разностью функции f в точке t с шагом h называется величина

$$\Delta_h^k(f;t) = \sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}C_k^i f(t+ih).$$

Если у функции f абсолютно непрерывна $(k-1)$-ая производная, то хорошо известно равенство [8]:

$$\Delta_h^k(f;t) = \int\limits_0^h ds_1 \int\limits_0^h ds_2 ... \int\limits_0^h f^{(k)}(t + s_1 + s_2 + ... + s_k)ds_k. \qquad (2)$$

Пусть X симметричное пространство. Для каждой $f : I_0 \to R$ определим модуль непрерывности

$$\omega_k(f, \delta; X) = \sup_{0<h\leq\delta} \|\Delta_h^k(f,t)|X\|.$$

Модуль непрерывности $\omega_k(f, \delta; X)$ обладает обычными свойствами:

1) $\omega_k(f, \delta; X)$ не убывает по δ;

2) $\omega_k(f, \delta_0 + \delta_1; X) \leq 2^k\{\omega_k(f, \delta_0; X) + \omega_k(f, \delta_1; X)\}$;

3) для $\lambda > 0$ выполнено неравенство $\omega_k(f, \lambda\delta; X) \leq (1 + \lambda)^k\omega_k(f, \delta; X)$.

Следуя Н. К. Бари и С. Б. Стечкину [8], с модулем непрерывности $\omega_k(f, \delta; X)$ свяжем новую функцию $\omega_k(f, \delta; X)^*$ равенством:

$$\omega_k(f, \delta; X)^* = \delta^k \sup_{s\geq\delta} \frac{\omega_k(f, s; X)}{s^k}.$$

Тогда справедливы соотношения

$$\omega_k(f, \delta; X) \leq \omega_k(f, \delta; X)^* \leq 2^k\omega_k(f, \delta; X),$$

$\omega_k(f, \delta; X)^*$ не убывает, а $\delta^{-k}\omega_k(f, \delta; X)^*$ не возрастает, т.е. $\omega_k(f, \delta; X)^* \in U(k)$. Ниже мы будем рассматривать только те f, для которых $\lim_{\delta\to 0} \omega_k(f, \delta; X) = 0$. Символом $\omega_k(f, \delta; L^\infty)$ обозначим равномерный модуль непрерывности.

Пусть $\varphi \in U(k)$. Как обычно, через H_X^φ обозначим множество функций, норма в котором задается равенством

$$\|f|H_X^\varphi\| = \|f|X\| + \sup_{0<\delta<1} \frac{\omega_k(f,\delta;X)}{\varphi(\delta)}.$$

Для наглядности мы ограничимся случаем $k = 2$. Небольшие изменения, которые нужно сделать в построениях работы при других k, мы поясним в конце работы. Символом c в работе обозначаются несущественные постоянные.

Пусть f суммируема на I_0. Введем максимальные функции

$$M(f,h)(t) = \sup\{\frac{1}{|J|}\int\limits_J |f(s)|ds : t \in J \subseteq I_0, |J| = h\},$$

$$\widetilde{M(f)}(t) = \sup\{\frac{1}{|J|}\int\limits_J M(f,|J|)(s)ds : t \in J \subseteq I_0\},$$

$$M(f)(t) = \sup\{\frac{1}{|J|}\int\limits_J |f(s)|ds : t \in J \subseteq I_0\},$$

(J произвольный подинтервал I_0).

Функция $M(f)(t)$ есть обычная максимальная функция Харди–Литлвуда, функция $M(f,h)(t)$ есть максимальная функция Харди–Литлвуда, вычисленная по интервалам фиксированной длины, функция $\widetilde{M(f)}(t)$ тесно связана с функцией $M(M(f))(t)$, но не тождественна последней. Более того, верна следующая важная

Лемма 1. *Пусть $\lambda > 0$ фиксировано и задана функция $f \geqslant 0$, $f \in L^{1,loc}$. Положим $D(\widetilde{Mf},\lambda) = \{t \in I_0 : \widetilde{M(f)}(t) > \lambda\}$. Тогда для каждого $t \in I_0$ справедливо неравенство*

$$\widetilde{M(f)}(t) \leqslant 2M(f)(t) \tag{3}$$

и, следовательно, верно соотношение

$$|D(\widetilde{Mf},\lambda)| \leqslant \frac{c_0}{\lambda} \int\limits_{D(\widetilde{Mf},\lambda)} f(s)ds, \tag{4}$$

причем константа c_0 не зависит от f.

Доказательство. Зафиксируем $t \in I_0$. Пусть I некоторый подинтервал $I_0, h = |I|$ и $t \in I$. Если теперь $s \in I$, то для любого $\epsilon > 0$ найдется интервал $J(\epsilon)$ с $h = |J(\epsilon)|, s \in J(\epsilon)$, для которого

$$M(f,h)(s) \leqslant \frac{1}{h}\int\limits_{J(\epsilon)} f(\tau)d\tau + \epsilon.$$

Замечая, что $J(\epsilon) \cup I$ также является интервалом с $|J(\epsilon)\cup I| \leqslant 2h$ и $t \in J(\epsilon)\cup I$, получим

$$M(f,h)(s) \leqslant \frac{1}{h}\int\limits_{J(\epsilon)} f(\tau)d\tau + \epsilon \leqslant \frac{1}{h}\int\limits_{J(\epsilon)\cup I} f(\tau)d\tau + \epsilon \leqslant$$

$$\frac{2}{|J(\epsilon)\cup I|}\int\limits_{J(\epsilon)\cup I} f(\tau)d\tau + \epsilon \leqslant 2M(f)(t) + \epsilon,$$

что и доказывает неравенство (3).

Неравенство (4) сразу следует из (3) и хорошо известного неравенства слабого типа для максимальной функции Харди–Литлвуда [9].

Лемма доказана. •

Из неравенства (4) немедленно получим неравенство

$$|D(\widetilde{M}f,\lambda)| \leq \frac{c_0}{\lambda}\|f\chi(D(\widetilde{M}f,\lambda))|X\| \ \ \|\chi(D(\widetilde{M}f,\lambda))|X'\|$$

или

$$\psi(X;|D(\widetilde{M}f,\lambda)|) \leq \frac{c_0}{\lambda}\|f\chi(D(\widetilde{M}f,\lambda))|X\|. \tag{5}$$

Зафиксируем $\delta > 0$. Для функции $f : I_0 \to R$ положим

$$f_\delta(t) = \frac{1}{\delta^2}\int\limits_0^\delta ds_1 \int\limits_0^\delta \{\Delta^2_{\frac{s_1+s_2}{2}}(f;t) - f(t)\}ds_2 =$$

$$\frac{1}{\delta^2}\int\limits_0^\delta ds_1 \int\limits_0^\delta \{f(t+s_1+s_2) - 2f(t+\frac{s_1}{2}+\frac{s_2}{2})\}ds_2.$$

Лемма 2. *Пусть $\gamma > 0$ фиксировано. Тогда для функции $f_\delta(t)$ найдется множество $V(\gamma)$ такое, что выполнены условия:*

$$\psi(X; |V(\gamma)|) \le 3\frac{c_0}{\gamma}\frac{\omega_2(f,\delta;X)}{\delta^2}, \tag{6}$$

для любого $t \in I_0 \backslash V(\gamma)$, для любого $h > 0$ (в частности, для $t, t+h, t+2h \in I_0 \backslash V(\gamma)$) верно неравенство

$$|\Delta_h^2(f_\delta;t)| < \gamma h^2 \tag{7}$$

(c_0 константа из неравенства (5)).

Доказательство. Из равенства (2) и определения максимальных функций следует важное неравенство

$$h^{-2}|\Delta_h^2(f_\delta;t)| \le \frac{1}{h}\int\limits_0^h ds_1 \frac{1}{h}\int\limits_0^h |f_\delta''(t+s_1+s_2)|ds_2 \le$$

$$\frac{1}{h}\int\limits_0^h ds_1 M(f_\delta'',h)(t+s_1) \le \widetilde{Mf_\delta''}(t), \tag{8}$$

а из равенства

$$f_\delta''(t) = \frac{1}{\delta^2}(\Delta_\delta^2(f;t) - 2\Delta_{\frac{\delta}{2}}^2(f;t))$$

получим оценку

$$\|f_\delta''(t)|X\| \le 3\frac{\omega_2(f,\delta;X)}{\delta^2}. \tag{9}$$

Положим $V(\gamma) = D(\widetilde{Mf_\delta''},\gamma) = \{t \in I_0 : \widetilde{Mf_\delta''}(t) > \gamma\}$. Тогда из (5), (8), (9) следует, что верно неравенство (6) . Неравенство (7) следует из (8) и определения множества $V(\gamma)$.

Лемма доказана. •

Лемма 3. *Пусть фиксировано $\alpha > 0$. Тогда для функции $g(t) = f_\delta(t) - f_\sigma(t)$ найдется множество $W(\alpha)$ такое, что выполнены условия:*

$$\psi(X; |W(\alpha)|) \le \frac{1}{\alpha}\{\omega_2(f,\delta;X) + \omega_2(f,\sigma;X)\}, \tag{10}$$

для любых $t, t+h, t+2h \in I_0 \backslash W(\alpha)$ верно неравенство

$$|\Delta_h^2(g;t)| \le 4\alpha. \tag{11}$$

Доказательство. Для функции $g(t)$ справедливо следующее неравенство

$$|f_\delta(t) - f_\sigma(t)| \le |f_\delta(t) + f(t)| + |-f(t) - f_\sigma(t)| =$$

$$|\frac{1}{\delta^2}\int_0^\delta ds_1 \int_0^\delta \Delta^2_{\frac{s_1+s_2}{2}}(f;t)ds_2| + |\frac{1}{\sigma^2}\int_0^\sigma ds_1 \int_0^\sigma \Delta^2_{\frac{s_1+s_2}{2}}(f;t)ds_2|,$$

и поэтому

$$\|g|X\| = \|f_\delta(t) - f_\sigma(t)|X\| \le \omega_2(f,\delta;X) + \omega_2(f,\sigma;X). \tag{12}$$

Положим $W(\alpha) = D(g,\alpha) = \{t : |g(t)| > \alpha\}$. Тогда из (1) и (12) получим (10). Неравенство же (11) следует из определения множества $W(\alpha)$.

Лемма доказана. •

Теперь мы переходим к основной теореме.

Зафиксируем $\epsilon > 0$, функцию f, симметричное пространство X и модуль непрерывности $\omega_2(f,\delta;X)$, причем мы будем считать, что $\omega_2(f,\delta;X)$ принадлежит $U(2)$, иначе вместо модуля $\omega_2(f,\delta;X)$ нужно взять эквивалентный модуль $\omega_2^*(f,\delta;X)$ и дальше действовать с ним. Выберем теперь две монотонных последовательности положительных чисел $\{\delta_i\}$ и $\{\epsilon_i\}$ так, чтобы выполнялись условия:

$$\lim_{i\to\infty} \delta_i = 0, \tag{13}$$

$$\sum_1^\infty \epsilon_i < \epsilon, \tag{14}$$

причем выбор $\{\delta_i\}$, $\{\epsilon_i\}$ будем осуществлять так, чтобы наряду с (13) и (14) выполнялось соотношение

$$\sum_1^\infty \frac{\omega_2(f,\delta_i;X)}{\psi(X;\epsilon_i)} < \infty. \tag{15}$$

Условие (15) означает, что $\omega_2(f,\delta_i;X)$ достаточно быстро, а $\psi(X;\epsilon_i)$ достаточно медленно стремятся к нулю (напомним, что

$\psi(X;t)$ есть фундаментальная функция пространства X). С последовательностями $\{\delta_i\}$, $\{\epsilon_i\}$ и модулем непрерывности $\omega_2(f,h;X)$ свяжем новую функцию

$$\Omega_2(f,h;X) = \inf_k \{h^2 \sum_1^k \frac{\omega_2(f,\delta_i;X)}{\delta_i^2 \psi(X;\epsilon_i)} + \sum_k^\infty \frac{\omega_2(f,\delta_i;X)}{\psi(X;\epsilon_i)}\}. \tag{16}$$

Нетрудно проверить, что $\Omega_2(f,h;X) \in U(2)$. Теперь у нас все готово для доказательства основной теоремы, но прежде константу c_0, фигурирующую в лемме 2 и играющую важную роль в теоремах 1 и 2, мы зафиксируем.

Теорема 1. *Пусть X симметричное пространство, фундаментальная функция которого $\psi(X;t) = \psi(t)$ строго монотонна. Пусть последовательности $\{\delta_i\}$, $\{\epsilon_i\}$ удовлетворяют условиям* (13)–(15).

Тогда существует множество $J(\epsilon)$ такое, что выполнены соотношения:

$$|J(\epsilon)| < \epsilon; \tag{17}$$

если $t, t+h, t+2h \in I_0 \backslash J(\epsilon)$, то

$$|\Delta_h^2(f;t)| \le C\Omega_2(f,h;X), \tag{18}$$

где C – абсолютная константа. Можно положить $C = \max\{12c_0, 16\}$.

Доказательство. Положим

$$f(t) = -f_{\delta_1}(t) - \sum_1^\infty \{f_{\delta_{i+1}}(t) - f_{\delta_i}(t)\}. \tag{19}$$

Тогда из соотношений (12) и (15) следует, что ряд, стоящий в правой части (19), сходится в X к f. Положим $g_i(t) = f_{\delta_{i+1}}(t) - f_{\delta_i}(t)$. Для функций g_i согласно (12) верна оценка

$$\|g_i|X\| \le \omega_2(f,\delta_{i+1};X) + \omega_2(f,\delta_i;X) \le 2\ \omega_2(f,\delta_i;X). \tag{20}$$

Выберем числа α_i и γ_i так, чтобы выполнялись соотношения

$$\alpha_i = 4\ \frac{\omega_2(f,\delta_i;X)}{\psi(X;\epsilon_i)}; \qquad \gamma_i = 6c_0\ \ \frac{\omega_2(f,\delta_i;X)}{\delta_i^2\psi(X;\epsilon_i)}. \tag{21}$$

По α_i для функции g_i согласно лемме 3 введем множества $W(\alpha_i)$, а по γ_i для функции f_{δ_i} согласно лемме 2 введем множества $V(\gamma_i)$ и положим

$$J(\epsilon) = \{\cup_1^\infty V(\gamma_i)\} \cup \{\cup_1^\infty W(\alpha_i)\}.$$

Проверим, что множество $J(\epsilon)$ удовлетворяет всем условиям теоремы. Во-первых, из леммы 3, выбора чисел α_i в (21) и соотношения (20) следует, что

$$\psi(X;|W(\alpha_i)|) \le \frac{2}{\alpha_i}\omega_2(f,\delta_i;X) = \frac{\psi(X;\epsilon_i)}{2},$$

а из леммы 2, выбора чисел γ_i в (21) следует, что

$$\psi(X;|V(\gamma_i)|) \le \frac{3c_0}{\gamma_i}\frac{\omega_2(f,\delta_i;X)}{\delta_i^2} = \frac{\psi(X;\epsilon_i)}{2}.$$

Из того, что $\psi(X;t)$ квазивогнута, следует, что она полуаддитивна. Поэтому

$$\psi(X;|V(\gamma_i)|+|W(\alpha_i)|) \le \psi(X;|V(\gamma_i)|)+\psi(X;|W(\alpha_i)|) \le \psi(X;\epsilon_i).$$

Из того, что $\psi(X;t)$ строго монотонна, следует, что верны неравенства $|V(\gamma_i)|+|W(\alpha_i)| \le \epsilon_i$ и, следовательно,

$$|J(\epsilon)| \le \sum |V(\gamma_i)|+|W(\alpha_i)| \le \sum \epsilon_i < \epsilon.$$

Таким образом, условие (17) выполнено.

Проверим теперь соотношение (18). Пусть $t, t+h, t+2h \in I_0\backslash J(\epsilon)$. Тогда для любого k верна оценка

$$|\Delta_h^2(f;t)| \le 2\ \sum_1^k |\Delta_h^2(f_{\delta_i};t)| + \sum_k^\infty |\Delta_h^2(g_i;t)|.$$

Поскольку $t, t+h, t+2h \in I_0\backslash J(\epsilon) \subset I_0\backslash V(\gamma_i)$, то согласно (7) получим

$$|\Delta_h^2(f_{\delta_i};t)| < h^2\gamma_i = h^2 6c_0\frac{\omega_2(f,\delta_i;X)}{\delta_i^2\psi(X;\epsilon_i)}. \tag{22}$$

Поскольку $t, t+h, t+2h \in I_0\backslash J(\epsilon) \subset I_0\backslash W(\alpha_i)$, то согласно (11) получим

$$|\Delta_h^2(g_i;t)| \le 4\alpha_i = 16\ \frac{\omega_2(f,\delta_i;X)}{\psi(X;\epsilon_i)}. \tag{23}$$

Поэтому из (22) и (23) следует неравенство

$$|\Delta_h^2(f;t)| \le 12\ c_0\ h^2\sum_1^k\ \frac{\omega_2(f,\delta_i;X)}{\delta_i^2\psi(X;\epsilon_i)} + 16\sum_k^\infty\ \frac{\omega_2(f,\delta_i;X)}{\psi(X;\epsilon_i)}. \tag{24}$$

Если учесть, что левая часть в (24) не зависит от k, а также явный вид констант в (24), прийдем к (18).

Теорема доказана. •

Обсудим теперь возможности описания "наименьшего" модуля непрерывности $\Omega_2(f, h; X)$ в (16). Если никакой дополнительной информации о $\omega_2(f, \delta; X)$ нет, то применим подход К. Осколкова [5, 6].

Пусть $\omega_2(f, \delta; X)$ наряду с $\lim_{h\to 0} \omega_2(f, h; X) = 0$ удовлетворяет дополнительному условию

$$\lim_{h\to 0} \frac{\omega_2(f, h; X)}{h^2} = \infty. \tag{25}$$

Для последовательности $\{\epsilon_i\}$, удовлетворяющей (14) и дополнительному соотношению

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\epsilon_{i+1}}{\epsilon_i} = 1, \tag{26}$$

положим

$$c_1 = \sup_i \frac{\psi(X; \epsilon_i)}{\psi(X; \epsilon_{i+1})}.$$

Так как $\psi(X; t)$ квазивогнута, то

$$\frac{\psi(X; \epsilon_{i+1})}{\epsilon_{i+1}} \leqslant \frac{\psi(X; \epsilon_i)}{\epsilon_i}$$

и поэтому $c_1 < \infty$.

Положим $\delta_1 = 0.5$ и пусть точки $\delta_2, ..., \delta_n$ определены.

Определим теперь точку δ_{n+1} равенством

$$\delta_{n+1} = \sup\{\delta > 0 : \frac{\omega_2(f, \delta; X)}{\delta^2} \geq 100 \quad \frac{\omega_2(f, \delta_n; X)}{\delta_n^2}$$

и

$$\omega_2(f, \delta; X) \leq \quad \frac{1}{100 c_1} \quad \omega_2(f, \delta_n; X)\}. \tag{27}$$

Теперь мы покажем, что модуль $\Omega_2(f, h; X)$ допускает для $h \in [\delta_{k+1}, \delta_k]$ оценку

$$\Omega_2(f, h; X) \leq 4 \frac{\omega_2(f, \delta_k; X)}{\psi(X; \epsilon_k)}. \tag{28}$$

Действительно, при всех n верны неравенства

$$\begin{gathered}\frac{\omega_2(f,\delta_{n+1};X)}{\delta_{n+1}^2} \geq 100 \quad \frac{\omega_2(f,\delta_n;X)}{\delta_n^2}, \\ \frac{\omega_2(f,\delta_{n+1};X)}{\psi(X;\epsilon_{n+1})} \leq \frac{1}{100} \quad \frac{\omega_2(f,\delta_n;X)}{\psi(X;\epsilon_n)}.\end{gathered} \tag{29}$$

Поэтому из (29) следует, что

$$\sum_1^k \frac{\omega_2(f,\delta_i;X)}{\psi(X;\epsilon_i) \quad \delta_i^2} \leq \frac{1}{\psi(X;\epsilon_k)} \quad \sum_1^k \frac{\omega_2(f,\delta_i;X)}{\delta_i^2} < 2 \quad \frac{\omega_2(f,\delta_k;X)}{\psi(X;\epsilon_k) \quad \delta_k^2}$$

и

$$\sum_k^\infty \frac{\omega_2(f,\delta_i;X)}{\psi(X;\epsilon_i)} < 2 \quad \frac{\omega_2(f,\delta_k;X)}{\psi(X;\epsilon_k)},$$

и, следовательно, для $h \in [\delta_{k+1},\delta_k]$ выполнено (28).

Ниже последовательность $\{\delta_k\}$, определенную равенством (27), будем называть K-последовательностью для модуля непрерывности $\omega_2(f,\delta;X)$. Полезно отметить, что K-последовательность $\{\delta_k\}$ для модуля непрерывности $\omega_2(f,\delta;X)$ убывает не медленнее геометрической прогрессии.

С использованием K-последовательности теорему 1 можно переформулировать в следующем виде.

Теорема 2. *Пусть X симметричное пространство, фундаментальная функция которого $\psi(X;t) = \psi(t)$ строго монотонна. Пусть последовательность $\{\epsilon_i\}$ удовлетворяет условиям* (14) *и* (26)*, $\omega_2(f,\delta;X)$ удовлетворяет условию* (25)*, и $\{\delta_k\}$ есть K-последовательность для $\omega_2(f,\delta;X)$.*

Тогда существует множество $J(\epsilon)$ такое, что выполнены соотношения:

$$|J(\epsilon)| < \epsilon;$$

если $t, t+h, t+2h \in I_0 \backslash J(\epsilon)$ и $h \in [\delta_{k+1},\delta_k]$, то

$$|\Delta_h^2(f;t)| \leq C\{\frac{\omega_2(f,h;X)}{\psi(X;\epsilon_k)}\},$$

где можно положить $C = 16\max\{3c_0, 4\}$.

Теорема 2 показывает, что для всех пространств H_X^φ , построенных по симметричному пространству X с данной фундаментальной функцией, оценка равномерного модуля непрерывности одинаково ухудшается, то есть $\omega_2(f,h;L^\infty)$ увеличивается по сравнению с $\omega_2(f,h;X)$ на один и тот же множитель. В этом смысле оценки равномерного модуля непрерывности у функций из H_X^φ зависят лишь от фундаментальной функции симметричного пространства X .

Сейчас мы покажем неусиляемость теоремы 2, причем основной контрпример будет дан для периодического случая.

Лемма 4. *Пусть $\Lambda(\varphi)$, $M(\varphi)$ есть пространство Лоренца и пространство Марцинкевича, построенные по функции $\varphi \in U$. Пусть задана тройка чисел $(a_k,\ b_k,\ n_k)$, для которой $0 < a_k$, $0 < b_k < 1$, $n_k > 3, n_k \in N$. Определим число $s_k = b_k\ 2^{-n_k}$. Для $t \in R$ положим*

$$g_k(t) = \operatorname{sign}\{\sin(\frac{2\pi}{b_k}2^{n_k-1}t)\},$$

$$f_k''(t) = \begin{cases} a_k\ g_k(t+0.5\ s_k), & \text{при } t \in [0,b_k], \\ 0, & \text{при } t \in R\backslash[0,b_k]\ , \end{cases} \tag{30}$$

$$f_k(t) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^\tau f_k''(\tau_1)d\tau_1.$$

Тогда при $0 < \delta < \dfrac{b_k}{4}$ верны неравенства

$$\omega_2(f_k,\delta;\Lambda(\varphi)) \le 2a_k \min\{s_k^2,\delta^2\}\varphi(b_k), \tag{31}$$

$$\frac{1}{8}a_k \min\{(\frac{s_k}{4})^2,\delta^2\}\varphi(b_k) \le \omega_2(f_k,\delta;M(\varphi)). \tag{32}$$

Если X симметричное пространство с фундаментальной функцией $\varphi(t)$, то с некоторой постоянной c, независящей от тройки (a_k,b_k,n_k), верны неравенства

$$c^{-1}\ a_k \min\{s_k^2,\delta^2\}\varphi(b_k) \le\ \omega_2(f_k,\delta;X) \le c\ a_k \min\{s_k^2,\delta^2\}\varphi(b_k). \tag{33}$$

Доказательство. Нетрудно проверить, что функция $f_k''(t)$ пропорциональна сдвинутой функции Радемахера, функция $f_k'(s) = \int_0^s f_k''(\tau)d\tau$ есть ломаная с вершинами в точках $(0;0), (\frac{s_k}{2};\ a_k\frac{s_k}{2}), ...,$ $(\frac{s_k}{2}+is_k; (-1)^i a_k\frac{s_k}{2}), ..., (\frac{s_k}{2}+(2^{n_k}-1)s_k; -a_k\frac{s_k}{2})$, $(b_k;0)$, а для функции $f_k(t)$ верны следующие равенства

$$f_k(2is_k) = 0 \qquad i = 0,1,...,2^{n_k-1},$$

и, следовательно, $f_k(t)=0$ при $t\in R\backslash[0,b_k]$. Из геометрических соображений получим равенство

$$\max_t |f_k(t)| = (\frac{s_k}{2})^2 a_k, \tag{34}$$

из которого следует неравенство

$$|\Delta_h^2(f_k;t)| \le a_k {s_k}^2.$$

А из (2) и (30) следует неравенство

$$|\Delta_h^2(f_k;t)| \le a_k h^2. \tag{35}$$

Поэтому

$$|\Delta_h^2(f_k;t)| \le a_k \min\{s_k^2, h^2\}.$$

Если $h<\frac{b_k}{4}$, то $\Delta_h^2(f_k;t)=0$ при $t\notin[-\frac{b_k}{2}, b_k+\frac{b_k}{2}]$. Отсюда сразу следует неравенство (31).

Пусть теперь $h\in(0,0.25s_k)$. Если теперь $t\in[0.5s_k, 0.5s_k+0.25s_k]$, то из соотношения

$$|\Delta_h^2(f_k;t)| = |\int_0^h d\tau_1 \int_0^h f_k''(t+\tau_1+\tau_2)d\tau_2| = a_k h^2$$

получим

$$|t\in[0.5s_k, 0.5s_k+s_k] : |\Delta_h^2(f_k;t)| \ge a_k h^2| \ge \frac{s_k}{4}.$$

Ровно такая же оценка справедлива и для других интервалов $[0.5s_k+is_k, 0.5s_k+(i+1)s_k]$. Поэтому при $0<h<\frac{s_k}{4}$ верно неравенство

$$|t\in[0,b_k] : |\Delta_h^2(f_k;t)| \ge a_k h^2| \ge \frac{s_k}{4}(2^{n_k}-1) \ge \frac{b_k}{8},$$

откуда при $0<\delta\le\frac{s_k}{4}$ получим

$$\omega_2(f_k,\delta;M(\varphi)) \ge a_k\delta^2\ \varphi(\frac{b_k}{8}) \ge \frac{1}{8}a_k\delta^2\ \varphi(b_k).$$

Из монотонности $\omega_2(f_k,\delta;M(\varphi))$ по δ и последнего неравенства следует (32). Неравенство же (33) следует из теоремы вложения Е. М. Семенова [7]: если фундаментальная функция симметричного пространства X есть $\varphi(t)$, то справедливы непрерывные вложения $\Lambda(\varphi)\subseteq\ X\ \subseteq M(\varphi)$.

Лемма доказана. •

Теперь мы можем доказать следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть X симметричное пространство, $\varphi \in U$ его фундаментальная функция. Пусть $v \in U(2)$, $\lim_{h\to 0} v(h) = 0$, $\lim_{h\to 0} \dfrac{v(h)}{h^2} = \infty$, и H_X^v пространство функций, удовлетворяющих условию Липшица. Пусть для последовательности $\{0.5 > b_i > 0\}$ выполнены соотношения:*

$$b_i \geq b_{i+1}; \quad \lim_{i\to\infty} b_i = 0; \quad \lim_{i\to\infty} \frac{b_i}{b_{i+1}} = 1; \quad \sum_1^\infty b_i = \infty. \qquad (36)$$

Пусть $\{\delta_k\}$ есть K-последовательность для $v(h)$, определенная равенством (27) при

$$c_1 = \sup_i \frac{\varphi(b_i)}{\varphi(b_{i+1})}.$$

Тогда найдется $f \in H_X^v$ такая, что для любого множества M с $|M| > 0$ выполнено соотношение:

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{\varphi(b_k)\sup\{|\Delta_h^2(f;t)| : t, t+h, t+2h \in M, h < \delta_k\}}{v(\delta_k)} > 0. \qquad (37)$$

Доказательство. Сразу же отметим, что при $h \in [0, 0.5]$ выполнено неравенство

$$\sum_1^\infty v(\delta_k)\min\{\frac{h^2}{\delta_k^2}, 1\} \leq c\ v(h). \qquad (38)$$

Это следует из того, что $\{\delta_k\}$ есть K-последовательность для $v \in U(2)$.

Доказательство (38) можно найти в [6] или получить также, как доказательство (28) .

Для каждого k положим

$$a_k = \frac{v(\delta_k)}{\delta_k^2 \varphi(b_k)}.$$

Из того, что $\{\delta_k\}$ есть K-последовательность, следуют неравенства

$$a_{k+1} \geqslant 100 a_k, \quad \delta_k^2 a_k \geqslant 100 \delta_{k+1}^2 a_{k+1}. \qquad (39)$$

По b_k выберем n_k так, чтобы выполнялись неравенства

$$\delta_k < s_k = b_k 2^{-n_k} \leq 2\delta_k \qquad (40)$$

и, следовательно, верно неравенство

$$s_k^2 a_k \geqslant 25 s_{k+1}^2 a_{k+1}. \tag{41}$$

Из того, что $\{\delta_k\}$ есть K-последовательность, следует, что она убывает не медленнее геометрической прогрессии и, следовательно, $\sum \delta_k < \infty$. Поэтому из (36) и (40) следует, что $\lim_{k\to\infty} n_k = \infty$. Чтобы не перегружать доказательство обозначениями, мы будем считать, что при всех k верны неравенства $n_k > 3$. Теперь мы для каждого k по тройке a_k, b_k, n_k построим согласно лемме 4 функции $f_k(t)$. Положим $d_1 = 0, d_k = \sum_1^{k-1} b_i$ $(k = 2, 3, 4, ...)$. Для всех $t \in R_+$ образуем функцию $g(t) = \sum_1^\infty f_k(t - d_k)$ и свернем полуось R_+ в окружность единичной длины, полагая

$$g_k(t) = \sum_{i=0}^{\infty} f_k(i + t - d_k), \quad f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} g(i + t) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(t).$$

Отметим, что носитель каждой функции $f_k(t-d_k)$ лежит в интервале (d_k, d_{k+1}) длины $b_k < 0.5$. Поэтому из (33), (34), (38), (40) и (41) следует, что верны неравенства

$$|f(t)| \le \sum_1^\infty \max_t |g_k(t)| \le \sum_1^\infty \frac{s_k^2 a_k}{4} < \infty,$$

$$\omega_2(f, \delta; X) \le \sum_0^\infty \omega_2(g_k, \delta; X) \le c \sum_0^\infty a_k s_k^2 \min\{1, \frac{\delta^2}{s_k^2}\}\varphi(b_k) \le$$

$$c \sum_0^\infty v(\delta_k) \min\{1, \frac{\delta^2}{\delta_k^2}\} \le cv(\delta).$$

Таким образом, $f \in H_X^v$.

Покажем, что выполнено неравенство (37). Зафиксируем множество M с $|M| > 0$. Мы можем считать, что все точки M есть точки плотности. Кроме того, в силу (36) каждая точка M принадлежит бесконечному числу носителей функций g_k. В силу этих причин и явного вида функций g_k следует, что для любого $n \in N$ найдутся $k = k(n) > n$, $h \in [\frac{s_k^2}{20}, \frac{s_k^2}{16}]$ и три точки $t, t+h, t+2h \in M$ такие, что $|\Delta_h^2(g_k; t)| \ge a_k h^2$ (точки

$t, t+h, t+2h \in M$, вообще говоря, зависят от k). Тогда из (34), (35), (39), (40), (41) и условия на h следует неравенство

$$|\Delta_h^2(f;t)| \geq |\Delta_h^2(g_k;t)| - \sum_1^{k-1} |\Delta_h^2(g_i;t)| - \sum_{k+1}^{\infty} |\Delta_h^2(g_i;t)| \geq$$

$$h^2 a_k - \sum_1^{k-1} h^2 a_i - \sum_{k+1}^{\infty} 4 \max_t |g_i(t)| \geq h^2 a_k - \sum_1^{k-1} h^2 a_i - \sum_{k+1}^{\infty} a_i s_i^2 \geq$$

$$h^2 a_k (1 - \frac{1}{99}) \quad - \frac{25}{24} a_{k+1} s_{k+1}^2 \geq \frac{1}{20} a_k s_k^2 (1 - \frac{1}{99}) - \frac{a_k s_k^2}{24} \geq$$

$$0.01 a_k s_k^2 \geq 0.01 \frac{v(\delta_k)\ s_k^2}{\delta_k^2\ \varphi(b_k)} \geq 0.01 \frac{v(\delta_k)}{\varphi(b_k)},$$

из которого и следует (37).

Теорема доказана. •

Проиллюстрируем приведенные теоремы примером.

Пусть $v(h) = h^\alpha \quad (0 < \alpha < 2)$. Положим $\epsilon_i = c\ i^{-(1+\gamma)}$ с $\gamma > 0$. В этой ситуации К - последовательность легко считается и представляет собой геометрическую прогрессию. Пусть $f \in H_X^v$. Тогда из теоремы 2 получим, что найдется множество меры больше $1-\epsilon$, на котором равномерный модуль непрерывности второго порядка $\omega_2(f, \delta; L^\infty)$ допускает оценку

$$\omega_2(f, \delta; L^\infty) \leq c\ \frac{h^\alpha}{\psi(X; (\ln h^{-1})^{-(1+\gamma)})},$$

если же положить $\epsilon_i = c\ i^{-1} (\ln i)^{-(1+\gamma)}$ с $\gamma > 0$, то из теоремы 2 следует, что найдется множество меры больше $1 - \epsilon$, на котором равномерный модуль непрерывности второго порядка $\omega_2(f, \delta; L^\infty)$ допускает оценку

$$\omega_2(f, \delta; L^\infty) \leq c\ \frac{h^\alpha}{\psi(X; (\ln h^{-1})^{-1} (\ln(\ln h^{-1}))^{-(1+\gamma)})}.$$

С другой стороны, полагая $b_i = \ i^{-1}$, из теоремы 3 получим, что найдется $f \in H_X^v$, для которой равномерный модуль непрерывности второго порядка $\omega_2(f, \delta; L^\infty)$ на любом множестве положительной меры допускает оценку

$$\overline{\lim_{h \to 0}} \frac{\omega_2(f, h; L^\infty) \psi(X; (\ln h^{-1})^{-1})}{h^\alpha} > 0,$$

если положить $b_i = \ i^{-1}(\ln i)^{-1}$ и применить теорему 3, то найдется $f_1 \in H_X^v$, для которой равномерный модуль непрерывности второго порядка $\omega_2(f_1, \delta; L^\infty)$ на любом множестве положительной меры допускает оценку

$$\overline{\lim_{h\to 0}} \frac{\omega_2(f,h;L^\infty)\psi(X;(\ln h^{-1})^{-1}\ (\ln\ln h^{-1})^{-1})}{h^\alpha} > 0$$

и т.д.

Таким образом, "наилучшего" модуля непрерывности, до которого можно "исправить" функцию в рассматриваемой ситуации, нет.

Замечание 1. Теоремы 1 и 2 имеют прямой и полный аналог для $k > 2$. Для этого для $k > 2$ достаточно заменить определение функции $f_\delta(t)$ на следующее

$$f_\delta(t) = \frac{1}{\delta^k}\int_0^\delta ds_1 \int_0^\delta ds_2 ... \int_0^\delta \{\Delta^k_{s_1+s_2+\ldots+s_k}(f;t) - (-1)^k f(t)\} ds_k,$$

модифицировать оператор максимальной функции $\widetilde{Mf}$ и следить за знаком в формуле (19).

Замечание 2. Одно из предположений на симметричное пространство X заключалось в том, чтобы его фундаментальная функция была строго монотонной. Это предположение несущественно, а именно, на X существует эквивалентная симметричная норма $\|f|X\|_1$ такая, что новая фундаментальная функция будет строго монотонной. Явный вид этой нормы приведен в замечании 2 работы [2]. Таким образом, теоремы 1, 2 справедливы и без предположения о строгой монотонности фундаментальной функции симметричного пространства X.

Замечание 3. Определение K- последовательности в формуле (27) зависит от константы c_1 и, следовательно, от последовательности $\{\epsilon_i\}$. Можно определить единую для всех последовательностей $\{\epsilon_i\}$ K-последовательность, полагая в формуле (27) $c_1 = 1$. В этом случае в формулировке теоремы 2 вместо константы $C = \max\{3c_0, 4\}$ появится новая конечная константа, зависящая соответственно от последовательности $\{\epsilon_i\}$. Ее явный вид очень громоздкий. Теорема 3 останется без изменений.

Литература

1. А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*. Т. 1, 2, Мир, М., 1965.
2. Е. И. Бережной, *Оценки равномерного модуля непрерывности функций из симметричных пространств*. Известия РАН **60**, No. 2 (1996), 3–20.
3. Ю. А. Брудный, *Пространства, определяемые с помощью локальных приближений*. Труды ММО **24** (1971), 69–132.
4. В. И. Коляда, *Оценки максимальных функций, связанных с локальной гладкостью*. Докл. АН СССР **293**, No. 3 (1987), 534–537.
5. К. И. Осколков, *Равномерный модуль непрерывности суммируемых функций на множествах положительной меры*. Докл. АН СССР **229**, No. 2 (1976), 304–306.
6. П. Л. Ульянов, *О работах Н.Н.Лузина по метрической теории функций*. УМН **40**, вып. 3 (1985), 15–70.
7. С. Г. Крейн, Ю. И. Петунин, Е. М. Семенов, *Интерполяция линейных операторов*. Наука, М., 1977.
8. В. К. Дзядык, *Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами*. Наука, М., 1977.
9. И. Стейн, *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций*. Мир, М., 1973.

Berezhnoi E. I. A correction theorem for functions with integral smoothness.

A theorem similar to the correction theorem of K. Oskolkov is proved. Namely, for a function with a given kth modulus of continuity calculated in a symmetric space X, for every $\epsilon > 0$ a set is presented whose measure is at least $1-\epsilon$ and on which a sharp quantitative estimate of the uniform kth modulus of continuity of this function is given. It is shown that this estimate depends only on ϵ and on the fundamental function of the symmetric space.

Ярославский
государственный университет
smirn@gw.yspu.yar.ru

Поступило 17 августа 1997 г.