Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 255, 1998 г.

О. Л. Виноградов

ТОЧНАЯ ПОСТОЯННАЯ В НЕРАВЕНСТВЕ ТИПА ДЖЕКСОНА ДЛЯ ПРИБЛИЖЕНИЯ ЛИНЕЙНЫМИ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

1. Пусть H_n – множество тригонометрических многочленов порядка не выше n, C – пространство 2π-периодических непрерывных вещественнозначных функций f с нормой

$$\|f\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|, \qquad \omega(f,h) = \sup_{x\in\mathbb{R},|t|\leqslant h} |f(x+t)-f(x)|$$

– модуль непрерывности первого порядка функции $f \in C$ с шагом h, $\mathcal{L}_n^+$ – множество линейных положительных операторов $U : C \to H_n$ (т.е. таких, что $U(f) \geqslant 0$ для всех $f \geqslant 0$), $C[0,1]$ и $L_2[0,1]$ – пространства непрерывных и суммируемых с квадратом на $[0,1]$ функций, соответственно, $(\varphi,\psi) = \int\limits_0^1 \varphi\psi$ – скалярное произведение функций из $L_2[0,1]$, $S = \left\{\varphi \in L_2[0,1] : \int\limits_0^1 \varphi^2 = 1\right\}$ – единичная сфера пространства $L_2[0,1]$, $[x]$ – целая часть числа x, по определению $\sum\limits_{k=0}^{n}{}' a_k = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, $\sum\limits_{k=m}^{n} a_k = 0$ при $m > n$.

При $h > 0$, $U : C \to C$ полагаем $\lambda(U,h) = \sup\limits_{f\in C} \frac{\|f-U(f)\|}{\omega(f,h)}$ ($\frac{0}{0}$ считается равным нулю). Величины $\lambda(U,h)$ называют точными постоянными в неравенствах

$$\|f - U(f)\| \leqslant \lambda(U,h)\omega(f,h).$$

Известно, что (см., например, [1]) если оператор U имеет вид

$$U(f,x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)K(t)\,dt, \tag{1}$$

Работа поддержана ФЦП "Интеграция", рег. номер 326.53.

где ядро $K \geqslant 0$, четно, $\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} K = 1$, то

$$\lambda(U,h) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\left(1+\left[\frac{t}{h}\right]\right)K(t)\,dt.$$

Неравенства вида $\|f - U_n(f)\| \leqslant M\omega\left(f, \frac{\gamma\pi}{n+1}\right)$, где $n \in \mathbb{Z}_+$, $U_n : C \to H_n$, $\gamma > 0$, называют неравенствами типа Джексона. Представляет интерес изучение величин

$$\lambda_n(\gamma) = \inf_{U_n\in\mathcal{L}_n^+} \lambda\left(U_n, \frac{\gamma\pi}{n+1}\right), \qquad \lambda(\gamma) = \sup_{n\in\mathbb{Z}_+} \lambda_n(\gamma)$$

и методов приближения, реализующих инфимум.

Исследованием точных постоянных в неравенствах типа Джексона для приближения различными положительными операторами занимались многие математики. Так, в [1] найдено, что $\sup\limits_{n\in\mathbb{Z}_+} \lambda\left(U_n, \frac{\pi}{n+1}\right) = \frac{3}{2}$, где U_n – операторы Джексона. В [2] вычислено, что $\sup\limits_{n\in\mathbb{Z}_+} \lambda\left(U_n, \frac{\pi}{n+1}\right) \leqslant 1,3424$ для операторов Коровкина, а в [3] – для операторов Бомана–Коровкина. В [4] построена последовательность положительных операторов U_n, для которой $\sup\limits_{n\in\mathbb{Z}_+} \lambda\left(U_n, \frac{\pi}{n+1}\right) \leqslant 1,33701$.

Можно показать, что при нахождении величин $\lambda_n(\gamma)$ инфимум можно брать по множеству Λ_n^+ операторов U_n вида (1) с ядром

$$K_n(t) = {\sum_{k=0}^{n}}' \rho_k \cos kt \geqslant 0, \qquad \rho_0 = 1. \tag{2}$$

Лемма 1. $\inf\limits_{U_n\in\mathcal{L}_n^+} \lambda\left(U_n, \frac{\gamma\pi}{n+1}\right) = \inf\limits_{U_n\in\Lambda_n^+} \lambda\left(U_n, \frac{\gamma\pi}{n+1}\right)$.

То, что можно ограничиться операторами свертки, доказано в [5], а то, что при этом достаточно рассматривать лишь четные ядра – в [6].

Известна теорема Л. Фейера–М. Рисса (см., например, [7, с.92]) о том, что всякий тригонометрический многочлен вида (2) представляется в виде

$$K_n(t) = \frac{1}{2}\left|\sum_{k=0}^{n} x_k e^{ikt}\right|^2, \qquad \text{где } x = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad \sum_{k=0}^{n} x_k^2 = 1, \tag{3}$$

и обратно, всякий многочлен вида (3) представляется в виде (2). Используя это представление, А. Н. Давидчик [8] получил, что $\inf\limits_{U_n \in \Lambda_n^+} \lambda\left(U_n, \frac{\gamma\pi}{n+1}\right)$ равен минимуму квадратичной формы

$$(A^{(n)}x, x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(1 + \left[\frac{(n+1)t}{\pi}\right]\right)\left|\sum_{k=0}^{n} x_k e^{ikt}\right|^2 dt$$

на единичной сфере S^n пространства $\mathbb{R}^{n+1}$. В свою очередь, этот минимум равен наименьшему собственному числу матрицы $A^{(n)}$ и достигается на соответствующем собственном векторе. Аналогичная теорема справедлива и для произвольного $\gamma > 0$.

Теорема 1. *Пусть $n \in \mathbb{Z}_+$, $\gamma > 0$. Тогда величина $\lambda_n(\gamma)$ равна минимуму квадратичной формы*

$$(A_\gamma^{(n)}x, x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(1 + \left[\frac{(n+1)t}{\gamma\pi}\right]\right)\left|\sum_{k=0}^{n} x_k e^{ikt}\right|^2 dt$$

на S^n, т.е. наименьшему собственному числу матрицы $A_\gamma^{(n)}$. Оператор U_n, реализующий инфимум, задается формулой

$$U_n(f, \tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau + t)\left|\sum_{k=0}^{n} x_k^{(n)} e^{ikt}\right|^2 dt,$$

где $x^{(n)} = x^{(n)}(\gamma) = (x_k^{(n)})_{k=0}^{n}$ – единичный собственный вектор матрицы $A_\gamma^{(n)}$, отвечающий собственному числу $\lambda_n(\gamma)$.

Матрица $A_\gamma^{(n)}$ симметрична, теплицева:

$$(A_\gamma^{(n)}x, x) = \sum_{k,j=0}^{n} a_{k-j} x_k x_j,$$

$$\text{где}\quad a_\nu = a_\nu^{(n)}(\gamma) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \left(1 + \left[\frac{(n+1)t}{\gamma\pi}\right]\right)\cos\nu t\,dt.$$

Вычисление коэффициентов $a_\nu^{(n)}(\gamma)$ (при $\gamma = 1$ они вычислены в [8]; см. также [3]) дает:

$$\begin{aligned} a_0^{(n)}(\gamma) &= \left(\left[\frac{n+1}{\gamma}\right]+1\right)\left(1-\left[\frac{n+1}{\gamma}\right]\frac{\gamma}{2(n+1)}\right), \\ a_\nu^{(n)}(\gamma) &= -\frac{1}{\pi\nu}\left(\frac{1}{2}\sin\left[\frac{n+1}{\gamma}\right]\frac{\nu\gamma\pi}{n+1}+\right. \\ &\qquad \left. + \sin^2\left[\frac{n+1}{\gamma}\right]\frac{\nu\gamma\pi}{2(n+1)}\operatorname{ctg}\frac{\nu\gamma\pi}{2(n+1)}\right) \text{ при } |\nu| = \overline{1,n}. \end{aligned}$$

Если $\frac{1}{\gamma} \in \mathbb{N}$, то формулы значительно упрощаются:

$$\begin{aligned} a_0^{(n)}(\gamma) &= \frac{n+1}{2\gamma} + \frac{1}{2}, \\ a_\nu^{(n)}(\gamma) &= -\frac{1}{\pi\nu}\sin^2\frac{\nu\pi}{2}\operatorname{ctg}\frac{\nu\gamma\pi}{2(n+1)} \text{ при } |\nu| = \overline{1,n}. \end{aligned}$$

Далее в этом пункте для краткости будем писать $A = A_\gamma^{(n)}$, $x = x^{(n)}(\gamma)$, $x_k = x_k^{(n)}(\gamma)$, $\lambda = \lambda_n(\gamma)$, $a_\nu = a_\nu^{(n)}(\gamma)$. Докажем, что при $\gamma \in (0,1]$ и нечетных $n = 2m-1$ коэффициенты a_ν и вектор x обладают следующими свойствами. (Требование нечетности n в ряде случаев излишне, но этого вполне достаточно для дальнейшего.)

А.1. $a_\nu \leqslant 0$ при нечетных ν и $a_\nu \geqslant 0$ при четных ν.

При $\nu = 0$ это очевидно. Пусть $\nu = \overline{1,n}$. Так как $\left[\frac{n+1}{\gamma}\right]\frac{\gamma}{n+1} = 1 - \frac{\theta\gamma}{n+1}$, где $\theta \in [0,1)$, то

$$a_\nu = -\frac{1}{\pi\nu}\left(\frac{(-1)^{\nu-1}}{2}\sin\frac{\nu\theta\gamma\pi}{n+1} + \sin^2\frac{\nu\pi}{2}\left(1-\frac{\theta\gamma}{n+1}\right)\operatorname{ctg}\frac{\nu\gamma\pi}{2(n+1)}\right).$$

Следовательно, при нечетных ν

$$a_\nu = -\frac{1}{\pi\nu}\left(\frac{1}{2}\sin\frac{\nu\theta\gamma\pi}{n+1} + \cos^2\frac{\nu\theta\gamma\pi}{2(n+1)}\operatorname{ctg}\frac{\nu\gamma\pi}{2(n+1)}\right) \leqslant 0, \tag{4}$$

а при четных ν

$$\begin{aligned} a_\nu &= \frac{1}{\pi\nu}\left(\frac{1}{2}\sin\frac{\nu\theta\gamma\pi}{n+1} - \sin^2\frac{\nu\theta\gamma\pi}{2(n+1)}\operatorname{ctg}\frac{\nu\gamma\pi}{2(n+1)}\right) = \\ &= \frac{1}{\pi\nu}\sin^2\frac{\nu\theta\gamma\pi}{2(n+1)}\left(\operatorname{ctg}\frac{\nu\theta\gamma\pi}{2(n+1)} - \operatorname{ctg}\frac{\nu\gamma\pi}{2(n+1)}\right) \geqslant 0. \end{aligned} \tag{5}$$

А.2. При всех $\nu = \overline{1, n-2}$ будет $a_\nu \leqslant a_{\nu+2}$.

Положим $y = \frac{\nu\gamma\pi}{2(n+1)} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\tau = 1 - 2\theta \in [-1, 1]$. Для нечетных ν А.2 следует из убывания функций $\frac{\sin 2y}{y}$ и $\frac{\cos^2 \theta y \operatorname{ctg} y}{y}$ на $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$. При четных ν находим

$$\frac{4(n+1)}{\gamma} a_\nu = \frac{\sin 2\theta y - 2\sin^2 \theta y \operatorname{ctg} y}{y} = \frac{\cos \tau y - \cos y}{y \sin y} = g(\tau, y),$$

$$y^2 \sin^2 y\, g'_y(\tau, y) = y \sin y(\sin y - \tau \sin \tau y) - (\sin y + y \cos y)(\cos \tau y - \cos y),$$

$$y^2 \sin^2 y\, g''_{y\tau}(\tau, y) = -y \sin y(\sin \tau y + \tau y \cos \tau y) + y(\sin y + y \cos y) \sin \tau y =$$
$$= y^2(-\tau \sin y \cos \tau y + \cos y \sin \tau y) \geqslant 0,$$

если $\tau \in [-1, 0]$. Значит, в силу четности по τ, $g'_y(\tau, y) \geqslant g'_y(-1, y) = 0$. Следовательно, g возрастает по y, откуда и вытекает требуемое неравенство.

А.3. Если ν четно, а μ нечетно ($\nu, \mu = \overline{1, n}$), то $a_\nu + a_\mu \leqslant 0$.

В силу А.2 это равносильно неравенствам $a_\nu + a_{\nu+1} \leqslant 0$ ($\nu = \overline{1, n-1}$, четно), которые следуют из (4) для $a_{\nu+1}$, первого равенства (5) для a_ν и установленного при доказательстве А.2 возрастания функции g.

А.4. Пусть $d_0 = \frac{1}{2}$,

$$d_\nu = \begin{cases} -\frac{2}{\pi^2 \nu^2}, & \text{если } |\nu| \in \mathbb{N} \text{ нечетно}, \\ 0, & \text{если } |\nu| \in \mathbb{N} \text{ четно}. \end{cases}$$

Тогда $a_\nu \geqslant \frac{n+1}{\gamma} d_\nu$ при всех $\nu = \overline{0, n}$.

В самом деле, при $\nu = 0$ это очевидно, при четных $\nu = \overline{2, n}$ доказано в А.1. При нечетных ν доказываемое неравенство сводится к

$$h(\theta, y) = \frac{1}{2} \sin 2\theta y + \cos^2 \theta y \operatorname{ctg} y \leqslant \frac{1}{y}.$$

Дифференцируя, находим

$$h'_\theta(\theta, y) = y \sin 2\theta y(\operatorname{ctg} 2\theta y - \operatorname{ctg} y);$$

максимум $h(\theta, y)$ по θ достигается при $\theta = \frac{1}{2}$;

$$h(\theta, y) \leqslant h\left(\frac{1}{2}, y\right) = \frac{1}{2} \sin y + \cos^2 \frac{y}{2} \operatorname{ctg} y = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{y}{2} < \frac{1}{y}.$$

Отметим еще, что при $\frac{1}{\gamma} \in \mathbb{N}$ свойства А.1–А.4 совершенно очевидны.

X.1. Среди векторов $x \in S^n$, доставляющих минимум (Ax, x), найдется такой, что $x_k = x_{n-k}$ $(k = \overline{0, n})$.

Действительно, если $y_k = x_{n-k}$ $(k = \overline{0, n})$, то $y \in S^n$ и $(Ax, x) = (Ay, y)$. Значит, вектор y также доставляет минимум форме (Ax, x) и является собственным, соответствующим λ. А тогда и вектор $z = x + y$ – собственный с тем же λ, при этом $z_k = z_{n-k}$. Поэтому далее можно считать, что $x_k = x_{n-k}$ $(k = \overline{0, n})$.

X.2. Все вектора x неотрицательны: $x_k \geqslant 0$.

Это следует из того, что

$$(Ax, x) = \sum_{k,j=0}^{2m-1} a_{k-j} x_k x_j = 2 \sum_{k,j=0}^{m-1} (a_{k-j} + a_{2m-1-k-j}) x_k x_j$$

и того, что в силу свойства A.3 все внедиагональные элементы матрицы $a_{k-j} + a_{2m-1-k-j}$ неположительны. Значит, минимум достигается на векторе с координатами одинакового знака.

X.3. x_k симметрично убывают: $x_0 = x_{2m-1} \leqslant x_1 = x_{2m-2} \leqslant \dots \leqslant x_{m-1} = x_m$.

То, что среди всех перестановок неотрицательного вектора x минимум (Ax, x) достигается на симметрично убывающей перестановке, доказано в [9, с.324–328]. Как следует из доказательства, для этого достаточно выполнения свойства A.2.

X.4. Координаты всех векторов x удовлетворяют неравенству $x_k \leqslant \frac{M}{\sqrt{n+1}}$, где постоянная M не зависит от n.

В силу X.3 достаточно доказать X.4 при $k = m - 1$. Положим $b_j = b_{2m-1-j} = \sum\limits_{r=m-j}^{m-1} \frac{1}{r}$ $(j = \overline{-1, m-1})$, $c_k = \sum\limits_{j=0}^{2m-1} b_j d_{j-k}$, $s_l = \sum\limits_{k=l}^{m-1} c_k$. Оценим снизу s_l:

$$s_l = \sum_{j=0}^{2m-1} b_j \sum_{k=l}^{m-1} d_{j-k} = \sum_{j=0}^{m-1} b_j \sum_{k=l}^{m-1} (d_{j-k} + d_{2m-1-j-k}) = \sum_{j=0}^{m-1} b_j T_{lj},$$

$$T_{lj} = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi^2} \sum\limits_{\nu=1}^{[\frac{j-l+1}{2}]} \frac{1}{(2\nu-1)^2} - \frac{2}{\pi^2} \sum\limits_{\nu=1}^{m-l-[\frac{j-l+1}{2}]} \frac{1}{(2\nu-1)^2}, & \text{если } j = \overline{l, m-1}, \\ -\frac{2}{\pi^2} \sum\limits_{\nu=[\frac{l-j}{2}]+1}^{m-l-[\frac{l-j}{2}]} \frac{1}{(2\nu-1)^2}, & \text{если } j = \overline{0, l-1}. \end{cases}$$

Учитывая, что $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{(2\nu-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$ и

$$\sum_{\nu=p+1}^{\infty}\frac{1}{(2\nu-1)^2}\geqslant\int\limits_{p+1}^{\infty}\frac{dx}{(2x-1)^2}=\frac{1}{2(2p+1)},$$

для T_{lj} при $j=\overline{l,m-1}$ получаем оценку

$$T_{lj}\geqslant\frac{2}{\pi^2}\sum_{\nu=[\frac{j-l+1}{2}]+1}^{\infty}\frac{1}{(2\nu-1)^2}\geqslant\frac{1}{\pi^2\left(2[\frac{j-l+1}{2}]+1\right)}\geqslant\frac{1}{\pi^2(j-l+2)}.$$

Разобьем s_l на три суммы:

$$\Sigma_1=\sum_{j=l}^{m-1}(b_j-b_{l-1})T_{lj},\quad \Sigma_2=b_{l-1}\sum_{j=0}^{m-1}T_{lj},\quad \Sigma_3=\sum_{j=0}^{l-1}(b_j-b_{l-1})T_{lj}.$$

Сумма Σ_3, очевидно, неотрицательна. Сумма Σ_2 также неотрицательна, потому что в нее входят $m-l$ слагаемых, равных $\frac{1}{2}$, и не более, чем $2(m-l)$ экземпляров каждого слагаемого вида $-\frac{2}{\pi^2}\frac{1}{(2\nu-1)^2}$. Для Σ_1 при $l=\overline{1,m-1}$, обозначая $\mu=m-l\in\mathbb{N}$, сдвигая индекс суммирования и применяя неравенство Чебышева, имеем

$$\Sigma_1\geqslant\frac{1}{\pi^2}\sum_{j=l}^{m-1}\sum_{r=m-j}^{m-l}\frac{1}{r}\frac{1}{j-l+2}=$$
$$=\frac{1}{\pi^2}\sum_{j=l}^{\mu+l-1}\sum_{r=\mu+l-j}^{\mu}\frac{1}{r}\frac{1}{j-l+2}=\frac{1}{\pi^2}\sum_{j=1}^{\mu}\sum_{r=\mu-j+1}^{\mu}\frac{1}{r}\frac{1}{j+1}\geqslant$$
$$\geqslant\frac{1}{\pi^2}\frac{1}{\mu}\left(\sum_{j=1}^{\mu}\sum_{r=\mu-j+1}^{\mu}\frac{1}{r}\right)\left(\sum_{j=1}^{\mu}\frac{1}{j+1}\right)=\frac{1}{\pi^2}\sum_{j=1}^{\mu}\frac{1}{j+1}\geqslant\frac{1}{2\pi^2}.$$

Аналогично при $l=0$ и $m\geqslant 2$

$$\Sigma_1\geqslant\frac{1}{\pi^2}\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{r=m-j}^{m-1}\frac{1}{r}\frac{1}{j+2}\geqslant\frac{1}{3\pi^2}.$$

Таким образом, при всех $m\geqslant 2$ и $l=\overline{0,m-1}$ будет

$$s_l=\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3\geqslant\frac{1}{3\pi^2}.$$

Теперь, применяя преобразование Абеля и пользуясь симметрией и возрастанием x_l, находим

$$\sum_{l=0}^{2m-1} c_l x_l = 2\sum_{l=0}^{m-1} c_l x_l = 2\sum_{l=0}^{m-1}(s_l - s_{l+1})x_l =$$

$$= 2s_0x_0 + 2\sum_{l=1}^{m-1} s_l(x_l - x_{l-1}) \geqslant \frac{2}{3\pi^2}\left(x_0 + \sum_{l=1}^{m-1}(x_l - x_{l-1})\right) = \frac{2}{3\pi^2}x_{m-1}.$$

Заметим еще, что

$$\frac{1}{2m}\sum_{j=0}^{2m-1} b_j^2 = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m-1}\left(\sum_{r=m-j}^{m-1}\frac{1}{r}\right)^2 \leqslant \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m-1}\left(\int\limits_{m-j-1/2}^{m-1/2}\frac{dx}{x}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m-1}\ln^2\frac{m-1/2}{m-j-1/2} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m-1}\ln^2\frac{m-1/2}{j-1/2} \leqslant \int\limits_0^1 \ln^2 x\,dx = 2.$$

Окончательно, сопоставим полученные неравенства, используем свойство А.4 и неравенство Коши–Буняковского и вспомним, что x – единичный собственный вектор матрицы A, отвечающий собственному числу λ:

$$x_{m-1} \leqslant \frac{3\pi^2}{2}\sum_{l=0}^{2m-1}\sum_{j=0}^{2m-1} b_j d_{j-l}x_l \leqslant \frac{3\gamma\pi^2}{4m}\sum_{j=0}^{2m-1} b_j \sum_{l=0}^{2m-1} a_{j-l}x_l \leqslant$$

$$\leqslant \frac{3\gamma\pi^2}{2\sqrt{2m}}\sqrt{\frac{1}{2m}\sum_{j=0}^{2m-1} b_j^2}\sqrt{\sum_{j=0}^{2m-1}\left(\sum_{l=0}^{2m-1} a_{j-l}x_l\right)^2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{3\gamma\pi^2}{2\sqrt{m}}\sqrt{(Ax, Ax)} = \frac{3\gamma\pi^2\lambda}{2\sqrt{m}}.$$

Свойство X.4 доказано.

А. Н. Давидчик [8], подсчитав $\lambda_n(1)$ при $n \leqslant 50$, получил оценку $\lambda(1) \geqslant 1,30$. В той же работе он сформулировал следующую теорему: пусть функция $\varphi \in S$ такова, что $\varphi(1-x) = \varphi(x)$ ($x \in [0,1]$), $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ и для некоторого $\varepsilon > 0$ интеграл

$\int\limits_0^\varepsilon \frac{1-\rho(x)}{x^2}\,dx$ сходится, где $\rho(x) = \int\limits_0^{1-x} \varphi(y)\varphi(x+y)\,dy$; последовательность операторов $U_n = U_{n,\varphi}$ задается ядрами

$$K_n(t) = \left(2\sum_{j=0}^{n}\varphi^2\left(\frac{j}{n}\right)\right)^{-1}\left|\sum_{k=0}^{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)e^{ikt}\right|^2. \qquad (6)$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\lambda\left(U_{n,\varphi},\frac{\pi}{n}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi^2} + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{x} - \operatorname{ctg} x\right)\frac{dx}{x} + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{1-\rho(x)}{x}\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2}\,dx.$$

2. Далее мы получим, что при $\gamma \in (0,1]$ величина $\lambda(\gamma)$ равна инфимуму на S квадратичного функционала

$$(B_\gamma\varphi,\varphi) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty\left(1+\left[\frac{t}{\gamma\pi}\right]\right)\left|\int\limits_0^1\varphi(x)e^{itx}\,dx\right|^2 dt$$

(конечного, правда, не на всем $L_2[0,1]$). Положим

$$\mu(\gamma) = \inf_{\varphi\in S}(B_\gamma\varphi,\varphi).$$

Лемма 2. *Пусть* $\Omega_n = \Big\{\rho \in C[0,1] : \rho(0) = 1, \rho(1) = 0,$ $\sum\limits_{k=0}^{n}{}'\rho\left(\frac{k}{n+1}\right)\cos kt \geqslant 0$ *при всех* $t\in\mathbb{R}\Big\}$, $\Omega = \Big\{\rho\in C[0,1] : \rho(0) = 1,$ $\rho(1) = 0, \int\limits_0^1\rho(x)\cos tx\,dx \geqslant 0$ *при всех* $t \in \mathbb{R}, \int\limits_0^\infty\int\limits_0^1\rho(x)\cos tx\,dx\,dt <$ $\infty\Big\}$. *Тогда при всех* $n\in\mathbb{Z}_+$ *справедливо включение* $\Omega\subset\Omega_n$.

Доказательство. Возьмем $\rho\in\Omega$. Как известно [10, с.170], для всех четных функций $f\in C$

$$\int\limits_0^\pi f(t)\sum_{k=0}^{n}{}'\rho\left(\frac{k}{n+1}\right)\cos kt\,dt = \int\limits_0^\infty f\left(\frac{t}{n+1}\right)\int\limits_0^1\rho(x)\cos tx\,dx\,dt. \quad (7)$$

Следовательно, для всех неотрицательных f будет

$$\int_0^\pi f(t) \sideset{}{'}\sum_{k=0}^{n} \rho\left(\frac{k}{n+1}\right) \cos kt\, dt \geqslant 0,$$

а значит, и ядро $\sideset{}{'}\sum_{k=0}^{n} \rho\left(\frac{k}{n+1}\right) \cos kt \geqslant 0$, т.е. $\rho \in \Omega_n$. Лемма доказана.

Теорема 2. *При всех* $\gamma > 0$ *будет* $\lambda(\gamma) \leqslant \mu(\gamma)$, *а при* $\gamma \in (0,1]$ *справедливо равенство* $\lambda(\gamma) = \mu(\gamma)$.

Доказательство. 1. Сначала докажем, что при всех $n \in \mathbb{Z}_+$ будет $\lambda_n(\gamma) \leqslant \mu(\gamma)$ и, таким образом, $\lambda(\gamma) \leqslant \mu(\gamma)$. В силу леммы 1 при нахождении $\lambda_n(\gamma)$ можно ограничиться операторами из Λ_n^+. При этом, не умаляя общности, можно считать, что $K_n(t) = \sideset{}{'}\sum_{k=0}^{n} \rho\left(\frac{k}{n+1}\right) \cos kt$, где $\rho \in \Omega_n$. Используя равенство (7) и лемму 2, имеем:

$$\lambda_n(\gamma) = \inf_{\rho \in \Omega_n} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(1 + \left[\frac{(n+1)t}{\gamma\pi}\right]\right) \sideset{}{'}\sum_{k=0}^{n} \rho\left(\frac{k}{n+1}\right) \cos kt\, dt =$$

$$= \inf_{\rho \in \Omega_n} \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f_n(t) \int_0^1 \rho(x) \cos tx\, dx\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \inf_{\rho \in \Omega} \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left(1 + \left[\frac{t}{\gamma\pi}\right]\right) \int_0^1 \rho(x) \cos tx\, dx\, dt$$

($f_n(t)$ – четная $2(n+1)\pi$-периодическая функция, равная $1 + \left[\frac{t}{\gamma\pi}\right]$ на отрезке $[0, (n+1)\pi]$). При этом последний инфимум можно брать по множеству функций ρ, не обязательно удовлетворяющих условию $\int_0^\infty \int_0^1 \rho(x) \cos tx\, dx\, dt < \infty$. Для всякой функции φ, принадлежащей $S \cap C[0,1]$, будет

$$\frac{1}{2} \left| \int_0^1 \varphi(x) e^{itx}\, dx \right|^2 = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \varphi(x)\varphi(y) \cos t(x-y)\, dx\, dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1\int\limits_{-y}^{1-y}\varphi(x+y)\varphi(y)\cos tx\,dx\,dy = \frac{1}{2}\int\limits_0^1\int\limits_{-y}^{0}\varphi(x+y)\varphi(y)\cos tx\,dx\,dy +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^1\int\limits_{0}^{1-y}\varphi(x+y)\varphi(y)\cos tx\,dx\,dy = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^0\int\limits_{-x}^{1}\varphi(x+y)\varphi(y)\,dy\cos tx\,dx +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^1\int\limits_{0}^{1-x}\varphi(x+y)\varphi(y)\,dy\cos tx\,dx = \int\limits_0^1\rho(x)\cos tx\,dx,$$

где $\rho(x) = \int\limits_0^{1-x}\varphi(x+y)\varphi(y)\,dy$, $\rho\in C[0,1]$, $\rho(1)=0$, $\rho(0)=\int\limits_0^1\varphi^2 = 1$. Значит, ввиду плотности $C[0,1]$ в $L_2[0,1]$

$$\lambda_n(\gamma) \leqslant \inf_{\varphi\in S\cap C[0,1]}(B_\gamma\varphi,\varphi) = \inf_{\varphi\in S}(B_\gamma\varphi,\varphi) = \mu(\gamma).$$

2. Теперь докажем противоположное неравенство $\lambda(\gamma)\geqslant\mu(\gamma)$ при $\gamma\in(0,1]$. Определим оператор $B_\gamma^{(n)}$ равенством

$$(B_\gamma^{(n)}\varphi,\varphi) = \frac{n+1}{\pi}\int\limits_0^\pi\left(1+\left[\frac{(n+1)t}{\gamma\pi}\right]\right)\left|\sum_{k=0}^n\left(\int\limits_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}}\varphi\right)e^{ikt}\right|^2 dt.$$

Положим $\varphi_n(u)=\sqrt{n+1}\,x_k^{(n)}$ при $u\in\left(\frac{k}{n+1},\frac{k+1}{n+1}\right)$, $k=\overline{0,n}$. Тогда

$$\int\limits_0^1\varphi_n^2 = \sum_{k=0}^n\int\limits_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}}\varphi_n^2 = (n+1)\sum_{k=0}^n\left(\int\limits_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}}\varphi_n\right)^2 = \sum_{k=0}^n x_k^2 = 1,$$

т.е. $\varphi_n\in S$. Кроме того, $(B_\gamma^{(n)}\varphi_n,\varphi_n) = (A_\gamma^{(n)}x^{(n)},x^{(n)}) = \lambda_n(\gamma)$.

Множество $E=\{\varphi_{2m-1}\}_{m=2}^\infty$ относительно компактно в $L_2[0,1]$. Это следует из свойств X.1–X.4 и теоремы М. Рисса (см., например, [11, с.320–321]; цитирую в частном случае пространства $L_2[0,1]$): для того, чтобы множество $E\subset L_2[0,1]$ было относительно компактным, необходимо и достаточно, чтобы

1) E было ограничено,

2) сдвинутые функции сходились к данной равномерно относительно $\varphi \in E$, т.е. $\int\limits_0^1 |\varphi(u+\tau)-\varphi(u)|^2\,du \underset{\tau\to 0}{\longrightarrow} 0$ равномерно относительно $\varphi \in E$ ($\varphi(u)=0$ при $u \notin [0,1]$). Выполнение условия 1) очевидно: $\varphi_n \in S$. Условие 2) проверяется так: для всех $\varphi \in E$ и $\tau \in (0,1/2)$

$$\int\limits_0^1 |\varphi(u+\tau)-\varphi(u)|^2\,du \leqslant M\int\limits_0^1 |\varphi(u+\tau)-\varphi(u)|\,du =$$

$$= M\left(\int\limits_0^{1/2-\tau}(\varphi(u+\tau)-\varphi(u))\,du+ + \int\limits_{1/2-\tau}^{1/2}|\varphi(u+\tau)-\varphi(u)|\,du+\right.$$

$$\left. + \int\limits_{1/2}^{1-\tau}(\varphi(u)-\varphi(u+\tau))\,du + \int\limits_{1-\tau}^{1}\varphi(u)\,du\right) =$$

$$= M\left(\int\limits_{1/2-\tau}^{1/2+\tau}\varphi + \int\limits_{1/2-\tau}^{1/2}|\varphi(u+\tau)-\varphi(u)|\,du - \int\limits_0^{\tau}\varphi\right) \leqslant 3M^2\tau \underset{\tau\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

и аналогично при $\tau < 0$. Значит, из последовательности $\{\varphi_{2m-1}\}$ можно выделить подпоследовательность $\{\varphi_{n_j}\}$, сходящуюся в $L_2[0,1]$ к некоторой функции $\varphi \in S$.

Делая замену переменной в интеграле, запишем

$$(B_\gamma^{(n)}\varphi_n,\varphi_n) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{(n+1)\pi}\left(1+\left[\frac{t}{\gamma\pi}\right]\right)\left|\sum_{k=0}^{n}\left(\int\limits_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}}\varphi_n\right)e^{i\frac{k}{n+1}t}\right|^2 dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty}G_n(t)\,dt,$$

$$G_n(t) = \begin{cases} \left(1+\left[\frac{t}{\gamma\pi}\right]\right)\left|\sum\limits_{k=0}^{n}\left(\int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}}\varphi_n\right)e^{i\frac{k}{n+1}t}\right|^2 & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant (n+1)\pi,\\ 0 & \text{при } t > (n+1)\pi. \end{cases}$$

Так как при всех t выполняется соотношение

$$\sum_{k=0}^{n_j}\left(\int\limits_{\frac{k}{n_j+1}}^{\frac{k+1}{n_j+1}}\varphi_{n_j}\right)e^{i\frac{k}{n_j+1}t} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \int\limits_0^1 \varphi(x)e^{itx}\,dx,$$

то последовательность G_{n_j} поточечно сходится к функции $G(t) = \left(1+\left[\frac{t}{\gamma\pi}\right]\right)\left|\int\limits_0^1 \varphi(x)e^{itx}\,dx\right|^2$, а $(B_\gamma\varphi,\varphi) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty G(t)\,dt$. Тогда по теореме Фату $\varlimsup\limits_{j\to\infty}(B_\gamma^{(n_j)}\varphi_{n_j},\varphi_{n_j}) \geqslant (B_\gamma\varphi,\varphi)$. Значит, $\lambda(\gamma) \geqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty}\lambda_n(\gamma) \geqslant \mu(\gamma)$. Теорема доказана.

Замечание 1. При доказательстве теоремы 2 установлено, что при $\gamma\in(0,1]$ $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\lambda_n(\gamma) = \mu(\gamma)$. Вопрос о существовании $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n(\gamma)$ остается открытым. А. Н. Давидчик [2] приводит оценку $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n(1)\geqslant 1,198\ldots$, но из его доказательства (вида $\lambda_n(1)\geqslant$ $\geqslant B_n$, $\lim\limits_{n\to\infty}B_n = 1,198\ldots$) следует лишь неравенство $\varliminf\limits_{n\to\infty}\lambda_n(1)\geqslant$ $1,198\ldots$, но не существование $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n(1)$. Весьма вероятно, что последовательность $\{\lambda_n(\gamma)\}$ возрастает.

Замечание 2. Скорее всего, условие $\gamma\leqslant 1$ во второй части теоремы излишне и равенство $\lambda(\gamma)=\mu(\gamma)$ должно иметь место при всех $\gamma>0$. К сожалению, доказательство теоремы опирается на специфические свойства матриц $A_\gamma^{(n)}$ и их собственных векторов, а их удалось установить лишь при $\gamma\in(0,1]$.

Замечание 3. Оценки сверху для величин, аналогичных $\lambda_n(\gamma)$, переносятся с пространства C на случай пространства $\mathfrak{M}\subset C$ с полунормой P, удовлетворяющей условиям: а) для всех $f\in\mathfrak{M}$ и $x\in\mathbb{R}$ будет $f(x+\cdot)\in\mathfrak{M}$ и $P(f(x+\cdot)) = P(f)$ и б) найдется такое $M>0$, что $P(f)\leqslant M\|f\|$ для всех $f\in\mathfrak{M}$.

3. К тому же квадратичному функционалу приводит и задача о приближении на вещественной оси целыми функциями конечной степени. В этом пункте $C_{\mathbb{R}}$ – пространство ограниченных равномерно непрерывных на $\mathbb{R}$ вещественнозначных функций, $\mathbb{B}_\sigma$ – множество ограниченных на $\mathbb{R}$ целых функций степени не выше $\sigma>0$, Λ_σ^+ – множество операторов $U_\sigma : C_{\mathbb{R}}\to\mathbb{B}_\sigma$ вида

$$U_\sigma(f,x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x+t)K_\sigma(t)\,dt,$$

где K_σ – четная неотрицательная функция степени не выше σ и

$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K_\sigma = 1$ (в силу неравенств между нормами целых функций конечной степени [12, с. 248] это влечет $K_\sigma \in \mathbb{B}_\sigma$); множество таких функций обозначим через $\mathbb{B}_\sigma^+$. Положим

$$\ell(U_\sigma, h) = \sup_{f\in C_{\mathbb{R}}} \frac{\|f - U_\sigma(f)\|}{\omega(f,h)}, \qquad \ell_\sigma(\gamma) = \inf_{U_\sigma\in\Lambda_\sigma^+} \ell\left(U_\sigma, \frac{\gamma\pi}{\sigma}\right).$$

Теорема 3. *При всех $\gamma > 0$ и $\sigma > 0$ будет $\ell_\sigma(\gamma) = \mu(\gamma)$.*

Доказательство. Как указано в [3],

$$\ell(U_\sigma, h) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \left(1 + \left[\frac{t}{h}\right]\right) K_\sigma(t)\,dt.$$

Полагая $h = \frac{\gamma\pi}{\sigma}$ и делая замену $\sigma t = \tau$, находим

$$\ell\left(U_\sigma, \frac{\gamma\pi}{\sigma}\right) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \left(1 + \left[\frac{\tau}{\gamma\pi}\right]\right) \frac{1}{\sigma} K_\sigma\left(\frac{\tau}{\sigma}\right) d\tau.$$

Очевидно, функция $\frac{1}{\sigma}K_\sigma\left(\frac{\cdot}{\sigma}\right) \in \mathbb{B}_1^+$, и обратно, для всякой функции $K_1 \in \mathbb{B}_1^+$ функция $\sigma K_1(\sigma\cdot) \in \mathbb{B}_\sigma^+$. Отсюда $\ell_\sigma(\gamma)$ не зависит от σ и равно $\ell_1(\gamma)$. Так как для всякой функции $\varphi \in S$ функция $K_1(t) = \frac{1}{2}\left|\int\limits_0^1 \varphi(x)e^{itx}\,dx\right|^2$ принадлежит $\mathbb{B}_1^+$, то $\ell_1(\gamma) \leqslant \mu(\gamma)$. С другой стороны, всякая функция $K_1 \in \mathbb{B}_1^+$ является квадратом модуля некоторой функции $g \in \mathbb{B}_{1/2}$ [12, с. 259]. По теореме Пэли–Винера найдется такая функция $\psi \in L_2[-1/2, 1/2]$, что

$$g(t) = \int\limits_{-1/2}^{1/2} \psi(x)e^{itx}\,dx = e^{-it/2}\int\limits_0^1 \psi(x - 1/2)e^{itx}\,dx.$$

Таким образом, $K_1(t) = \frac{1}{2}\left|\int\limits_0^1 \varphi(x)e^{itx}\,dx\right|^2$ $(\varphi(x) = \sqrt{2}\psi(x - 1/2))$. При этом по теореме Планшереля $\int\limits_0^1 \varphi^2 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K_1 = 1$. Значит, $\ell_1(\gamma) \geqslant \mu(\gamma)$. Теорема доказана.

Отметим, что к минимизации квадратичного функционала сводилась задача о приближении положительными операторами функций классов Зигмунда

$$Z_\alpha=\{f\in C: |f(x+t)-2f(x)+f(x-t)|\leqslant 2t^\alpha \text{ при всех } x\in\mathbb{R} \text{ и } t>0\},$$

$$0<\alpha\leqslant 2.$$

Правда, там задача ставилась несколько по другому. Обозначим

$$\zeta(U_n,\alpha)=(n+1)^\alpha \sup_{f\in Z_\alpha}\|f-U_n(f)\|.$$

В работах [13–15] показано, что если последовательность операторов $U_n=U_{n,\varphi}$ определяется ядрами из формулы (6), и функция φ удовлетворяет некоторым условиям, то

$$\lim_{n\to\infty}\zeta(U_{n,\varphi},\alpha)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty t^\alpha\left|\int\limits_0^1\varphi(x)e^{itx}\,dx\right|^2 dt=(W_\alpha\varphi,\varphi)$$

(эта форма записи из [15]). Х. М. Коган [16–18] минимизировал $(W_\alpha\varphi,\varphi)$ по φ, а в [19] подробно исследовал оператор W_1.

Дальнейшая задача состоит в изучении функционала $(B_\gamma\varphi,\varphi)$ и, конкретно, спектральных свойств оператора B_γ. В качестве области определения оператора B_γ разумно выбрать плотное в $L_2[0,1]$ множество $\mathring{L}{}_2^{(1)}\bigl(\sqrt{x(1-x)};0,1\bigr)$ абсолютно непрерывных на $[0,1]$ функций φ, таких что $\varphi(0)=\varphi(1)=0$ и $\int\limits_0^1\sqrt{x(1-x)}\varphi'^2(x)\,dx<\infty$. Можно доказать, что спектр оператора B_γ дискретен, оператор B_γ имеет единственную положительную на $(0,1)$ собственную функцию $\varphi_\gamma\in\mathring{L}{}_2^{(1)}\bigl(\sqrt{x(1-x)};0,1\bigr)$, $\varphi_\gamma(1-x)=\varphi_\gamma(x)$. Отвечающее ей собственное число $\lambda(\gamma)$ положительное, простое и наименьшее. Согласно вариационному принципу

$$\lambda(\gamma)=\min_{\varphi\in\mathring{L}{}_2^{(1)}\left(\sqrt{x(1-x)};0,1\right)\cap S}(B_\gamma\varphi,\varphi)=(B_\gamma\varphi_\gamma,\varphi_\gamma).$$

Подробное исследование оператора B_γ будет проведено в отдельной работе.

Замечание 4. Пусть $\rho_\gamma(x) = \int\limits_0^{1-x} \varphi_\gamma(x+y)\varphi_\gamma(y)\,dy$, операторы V_n задаются ядрами (2) с коэффициентами $\rho_k = \rho_\gamma\left(\frac{k}{n+1}\right)$. Тогда из равенства

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\left(1+\left[\frac{(n+1)t}{\gamma\pi}\right]\right)\sum_{k=0}^{n}{}'\rho_\gamma\left(\frac{k}{n+1}\right)\cos kt\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty} f_n(t)\left|\int\limits_0^1 \varphi_\gamma(x)e^{itx}\,dx\right|^2 dt$$

(f_n из доказательства теоремы 2) следует, что $\sup\limits_{n\in\mathbb{Z}_+}\lambda\left(V_n, \frac{\gamma\pi}{n+1}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\lambda\left(V_n, \frac{\gamma\pi}{n+1}\right) = \lambda(\gamma)$.

Замечание 5. Величины $\lambda(\gamma)$ могут быть подсчитаны с любой степенью точности каким-либо из стандартных методов вычисления собственных чисел интегральных операторов. Метод Ритца дает для $\lambda(\gamma)$ оценку сверху; для оценки снизу можно использовать значения $\lambda_n(\gamma)$. Подсчет показывает, что $\lambda(1) = 1,312\ldots$

Литература

1. Wang Xing-hua, *The exact constant of approximation of continuous functions by the Jackson singular integral.* — Chinese Math. **5**, No. 2 (1964), 254–260.
2. А. Н. Давидчик, *Приближение непрерывных функций линейными положительными операторами.* — Исследования по современным проблемам суммирования и приближения функций и их приложениям, вып.6 (1975), 48–51, Днепропетровск.
3. В. В. Жук, Г. И. Натансон, *К вопросу приближения функций посредством положительных операторов.* — Ученые записки Тартуского гос. ун-та. Труды по математике и механике. Функциональный анализ и приложения **19**, **вып. 430** (1977), 58–69, Тарту.
4. Н. И. Мерлина, *К вопросу приближения непрерывных периодических функций линейными положительными методами аппроксимации.* — Управление, надежность, навигация, вып.3 (1976), 153–157, Саранск.
5. В. В. Жук, Г. И.Натансон, *О приближении дифференцируемых периодических функций линейными методами.* — Вестник Ленингр. ун-та, сер.1, вып.4 (No. 19) (1977), 16–21.
6. О. Л. Виноградов, *Некоторые точные неравенства для второго модуля непрерывности периодических функций и функций, продолженных с отрезка.* — Зап. науч. семин. ПОМИ **232** (1996), 33–49.

7. Г. Полиа, Г. Сеге, *Задачи и теоремы из анализа. Т.2.* М., 1978.
8. А. Н. Давидчик, *Приближение периодических функций линейными положительными операторами.* — Исследования по современным проблемам суммирования и приближения функций и их приложениям (1982), 187–193, Днепропетровск.
9. Г. Г. Харди, Д. Е. Литтлвуд, Г. Полиа, *Неравенства.* М., 1948.
10. В. В. Жук, Г. И. Натансон, *Тригонометрические ряды Фурье и элементы теории аппроксимации.* Л., 1983.
11. Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, *Функциональный анализ.* М., 1977.
12. А. Ф. Тиман, *Теория приближения функций действительного переменного.* М., 1960.
3. Л. И. Баусов, *Порядок приближения функций класса Z_α линейными положительными полиномиальными операторами.* — Успехи математических наук **17, вып. 1 (103)** (1962), 149–155.
14. Л. И. Баусов, *О порядке приближения функций класса Z_α линейными положительными операторами.* — Математические заметки **4, No. 2** (1968), 201–210.
15. В. А. Баскаков, *О порядке приближения дифференцируемых функций некоторыми линейными положительными операторами.* — Математический сборник **76 (118), No. 3** (1968), 344–361.
16. Х. М. Коган, *Об одной вариационной задаче теории приближений.* — Журнал вычислительной математики и математической физики **2, No. 1** (1962), 151–154.
17. Х. М. Коган, *О порядке приближения функций класса Z_α линейными положительными полиномиальными операторами.* — Исследования по современным проблемам конструктивной теории функций (1965), 157–162, Баку.
18. Х. М. Коган, *Расчет точных двусторонних оценок первого собственного значения сингулярного интегро-дифференциального оператора.* — Вопросы точности и эффективности вычислительных алгоритмов (труды симпозиума), вып.3 (1969), 86–97, Киев.
19. Х. М. Коган, *Об одном сингулярном интегро-дифференциальном уравнении.* — Дифференциальные уравнения **3, No. 2** (1967), 278–293.

Vinogradov O. L. The sharp constant in Jackson-type inequality for approximation by linear positive operators.

In what follows, C is the space of 2π-periodic continuous real-valued functions with uniform norm, $\omega(f,h)=\sup\limits_{|t|\leqslant h,x\in\mathbb{R}}|f(x+t)-f(x)|$ is the first modulus of continuity of function $f\in C$ with step h, H_n is the set of trigonometric polynomials of order not greater than n, $\mathcal{L}_n^+$ is the set of linear positive operators $U_n: C\to H_n$ (i.e. such that $U_n(f)\geqslant 0$ for every $f\geqslant 0$), $L_2[\,0,1]$ is the space of square integrable on $[\,0,1]$ functions,

$$\lambda_n(\gamma)=\inf_{U_n\in\mathcal{L}_n^+}\sup_{f\in C}\frac{\|f-U_n(f)\|}{\omega(f,\frac{\gamma\pi}{n+1})},\qquad \lambda(\gamma)=\sup_{n\in\mathbb{Z}_+}\lambda_n(\gamma).$$

It is proved that $\lambda_n(\gamma)$ coincides with the smallest eigenvalue of some matrix of order $n+1$. The principal result of the paper is the following: for every $\gamma > 0$ $\lambda(\gamma)$ doesn't outnumber and for $\gamma \in (0,1]$ is equal to the minimum of square functional

$$(B_\gamma \varphi, \varphi) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\infty \left(1 + \left[\frac{t}{\gamma\pi}\right]\right) \left| \int\limits_0^1 \varphi(x) e^{itx}\, dx \right|^2 dt$$

on the unit sphere of $L_2[\,0,1]$. Then it is calculated that $\lambda(1) = 1,312\ldots$

С.-Петербургский
государственный университет
olvin@ math.lgu.spb.su

Поступило 17 марта 1997 г.