Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 255, 1998 г.

Е. С. Дубцов

ПРАВИЛЬНЫЕ УНИТАРНО ИНВАРИАНТНЫЕ ПРОСТРАНСТВА НА КОМПЛЕКСНОЙ СФЕРЕ

1. Введение

Отправной точкой для настоящей работы является следующее понятие.

Определение ([1]). *Предположим, что K – это компактное Хаусдорфово пространство, $C(K)$ обозначает пространство всех (комплекснозначных) непрерывных функций на K, $M(K)$ – пространство всех (комплексных) регулярных борелевских мер на K. Пусть $X \subset C(K)$ – замкнутое подпространство и μ – положительная мера на $M(K)$. Тройка (X, K, μ) называется правильной, если существует $\tau > 0$, такое что неравенство*

$$\sup\left\{\int\limits_K |f|^2\,d\mu :\ f \in X,\ |f| < \varphi\right\} \geqslant \tau \int\limits_K \varphi^2\,d\mu \tag{1.1}$$

выполняется для всех $\varphi \in C(K)$, $\varphi > 0$. Это записывается как $(X, K, \mu) \in (R)$.

Правильные тройки на комплексной сфере (т.е. случай $K = S_n = \{\zeta \in \mathbb{C}^n : |\zeta| = 1\}$) вызывают особый интерес. В частности, эта техника доставляет наглядное решение задачи о внутренних функциях в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$ (а также в областях с более сложной геометрией). В настоящей работе правильные тройки исследуются с точки зрения *спектральной* теории функций.

Задача. Пусть $\mu \in M(S)$ – положительная мера и подпространство $X \subset C(S)$ унитарно инвариантно. Является ли тройка (X, S, μ) правильной?

Исследование частично поддержано грантом DGICYT (Centre de Recerca Matemàtica, IEC, Барселона) и грантом РФФИ 96-01-00693.

Поскольку унитарно инвариантным подпространствам пространства $C(S)$ взаимно однозначно соответствуют подмножества $\Omega \subset \mathbb{Z}_+^2$ (такое Ω называют спектром), то мы просто говорим, что правильна тройка (Ω, S, μ). В частности, в работе получены следующие результаты.

Достаточные условия.
1) $(\Omega, S, \mu) \in (R)$, если Ω содержит сколь угодно широкие полосы, параллельные диагонали $\{(p,p) : p \in \mathbb{Z}_+\}$. Например, множество $\{(p,q) : q \leqslant p \leqslant \alpha q\} \subset \mathbb{Z}_+^2$ является правильным при $\alpha > 1$.
2) Зафиксируем $k \in \mathbb{Z}_+$. $(\Omega, S, \mu) \in (R)$, если Ω содержит сколь угодно длинные интервалы горизонтального луча $\Omega(k) = \{(p,k) : p \in \mathbb{Z}_+\}$. В частности, луч $\Omega(k)$ правилен.

Условие о “произвольно длинных интервалах” не случайно. Действительно, пусть σ обозначает меру Лебега на S; $\sigma(S) = 1$.

Необходимое условие. Предположим, что $(\Omega, S, \sigma) \in (R)$. Тогда множества $\{\{(p_1, q_1), (p_2, q_2)\} : p_1 + q_2 - p_2 - q_1 = k\}$ бесконечны для всех $k \in \mathbb{Z}_+$.

Утверждения о правильности троек связаны с компактностью определённых операторов Ганкеля и дают интересную информацию для интерполяционных задач (см. ниже). Отметим также, что правильность тройки (Ω, S, σ) влечёт существование *сингулярной* меры со спектром в $\Omega \cup \overline{\Omega}$, где $\overline{\Omega} = \{(p,q) \in \mathbb{Z}_+^2 : (q,p) \in \Omega\}$.

Абстрактная теория правильных троек развита в [1] (дальнейшие результаты даны в [2] и [3]). Важность рассматриваемого свойства иллюстрируется также следующим равносильным свойством (эквивалентность доказана в [1]).

Определение. $(X, K, \mu) \in (R2)$, *если для произвольных* $\varphi \in C(K)$, $\varphi > 0$, $\varepsilon > 0$ *существует функция* $f \in X$, *такая что* $|f| \leqslant \varphi$ *на* K *и* $\mu\{|f| \neq \varphi\} < \varepsilon$.

Обозначения. Открытый единичный шар в $\mathbb{C}^n$ обозначается B_n или B (как правило, размерность n зафиксирована, поэтому в дальнейшем индекс n часто опускается), таким образом, $S = \partial B$ и $\overline{B} = S \cup B$. $M_+(S) = \{\mu \in M(S) : \mu$ положительна$\}$.

Если $n = 1$, то B, S, σ обычно заменяются на $\mathbb{D}$, $\mathbb{T}$ и m.

$\mathcal{U} = \mathcal{U}(n)$ – (компактная) группа всех унитарных операторов на $\mathbb{C}^n$. $H(B)$ обозначает класс всех голоморфных функций $f : B \to \mathbb{C}$. $A(B) = H(B) \cap C(\overline{B})$ – алгебра голоморфных функций непрерывных вплоть до границы.

Для исследования функций и мер, заданных на сфере, используется классический интеграл Пуассона. Именно, для $\mu \in M(S)$

$$P[\mu](z) = \int\limits_S P(z,\zeta)\,d\mu(\zeta) = \int\limits_S \frac{1-|z|^2}{|z-\zeta|^{2n}}\,d\mu(\zeta) \qquad (z \in B, \zeta \in S)$$

– интеграл Пуассона меры μ.

Об унитарно инвариантных пространствах на комплексной сфере. Пространство $X \subset L^0(S)$ называется *унитарно инвариантным*, если $f \circ U \in X$ для всех $f \in X$ и $U \in \mathcal{U}$. Монография [4] (глава 12) содержит всю необходимую информацию о таких объектах. "Элементарными" $\mathcal{U}$-инвариантными пространствами являются $H(p,q)$.

Определение. *Зафиксируем размерность n. Для неотрицательных целых чисел p и q обозначим через $H(p,q)$ векторное пространство всех гармонических однородных многочленов в $\mathbb{C}^n$ полной степени $p+q$, степени p по переменным $z_1,\dots,z_n$ и степени q по $\overline{z}_1,\dots,\overline{z}_n$. Тот же символ используется для сужения $H(p,q)$ на S.*

Отметим, что голоморфные полиномы соответствуют случаю $q=0$ и антиголоморфные – случаю $p=0$. При $n=1$ эти два варианта исчерпывают все возможности: $H(p,0)=\mathbb{C}z^p$, $H(0,q)=\mathbb{C}\overline{z}^q$ и $H(p,q)=\{0\}$ при $pq\neq 0$.

Следующие факты гармонического анализа на S хорошо известны. Пространство $H(p,q)$ не имеет нетривиальных $\mathcal{U}$-инвариантных подпространств и $L^2(S) = \oplus_{(p,q)\in\mathbb{Z}_+^2} H(p,q)$. Если $X = L^p(S)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ или $X = C(S)$, а $Y \subset X$ – $\mathcal{U}$-инвариантное подпространство, то существует множество $\Omega \subset \mathbb{Z}_+^2$, такое что $Y = X_\Omega \stackrel{\mathrm{def}}{=} \operatorname{span}_X\{H(p,q) : (p,q) \in \Omega\}$.

Часто мы будем использовать следующий результат об умножении $H(p,q)$-пространств. Пусть $H(p,q)\cdot H(r,s)$ обозначает множество всех $f \in C(S)$, таких что $f = \sum_{j=1}^N g_j h_j$ для некоторых $g_j \in H(p,q)$, $h_j \in H(r,s)$.

Теорема 1.1 (правило умножения, см. [4], 12.4.4)**.** *Пусть $n \geqslant 2$, тогда*

$$H(p,q)\cdot H(r,s) \subset \sum_{j=0}^{J} H(p+r-j, q+s-j),$$

где $J = \min(p,s) + \min(q,r)$. *Более того, если* $n \geqslant 3$, *то имеет место равенство.*

Обозначим через K_{pq} ортогональный проектор из $L^2(S)$ на $H(p,q)$. Тогда для каждой точки $z \in S$ существует единственная функция $K_{pq}(\cdot, z) \in H(p,q)$ (воспроизводящее ядро), такая что

$$(K_{pq}f)(z) = \langle f, K_{pq}(\cdot, z)\rangle_{L^2(S)} = \int\limits_S K_{pq}(z,\zeta) f(\zeta)\, d\sigma(\zeta).$$

Спектр меры $\mu \in M(S)$ определяется как

$$\mathrm{spec}\,(\mu) = \{(p,q) \in \mathbb{Z}_+^2 : K_{pq}\mu \neq 0\}.$$

Для описания спектров удобно представлять множество $\mathbb{Z}_+^2$ как первый квадрант целочисленной решётки на плоскости. Если $f \in L^1(S)$, то мы отождествляем функцию f и меру $f\sigma \in M(S)$. В частности, если $X = L^p(S)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ или $X = C(S)$, то $X_\Omega = \{f \in X : \mathrm{spec}\,(f) \subset \Omega\}$.

Пространства голоморфных функций – классические и важные примеры $\mathcal{U}$-инвариантных пространств. Положим $A(S) = \{f \in C(S) : \exists\ g \in A(B),$ т.ч. $f = g|_S\}$, тогда $A(S)$ – унитарно инвариантная алгебра и $A(S) = C_{\Omega(0)}(S)$.

Свойство $(A(S), S, \sigma) \in (R)$ установлено в [1]. Более того, имеет место следующая теорема (по определению $\Omega \in (LI_0)$, если для каждого $M \in \mathbb{Z}_+$ найдётся $m \in \mathbb{Z}_+$, такое что $(m+j, 0) \in \Omega$ для всех $0 \leqslant j \leqslant M$).

Теорема 1.2 (А. Б. Александров [1]). *Предположим, что* $\Omega \in (LI_0)$. *Тогда* $(C_\Omega(S), S, \mu) \in (R)$ *для всех* $\mu \in M_+(S)$.

Как указано выше, мы будем доказывать правильность троек $(C_\Omega(S), S, \mu)$ для различных $\Omega \subset \mathbb{Z}_+^2$. Так как σ и $X = C_\Omega(S)$ $\mathcal{U}$-инвариантны, то имеет место импликация $(X, S, \sigma) \in (R) \Rightarrow (X, S, \mu) \in (R)$ для всех положительных мер $\mu \in M(S)$ ([1], предложение 17). Поэтому наше внимание будет ограничено случаем $\mu = \sigma$. Если $(C_\Omega(S), S, \sigma) \in (R)$, то будет использоваться краткая запись $\Omega \in (R)$.

Организация статьи. В начале §2 рассмотрена модельная ситуация $K = \mathbb{T}^n$. Точнее, если $\Lambda \subset \mathbb{Z}^n$ и Λ содержит произвольно большие кубы, то спектр Λ правилен. Поскольку мономы (характеры) z^α, $\alpha \in \mathbb{Z}^n$, унимодулярны на $\mathbb{T}^n$, доказательство проходит без затруднений. В случае сферы необходимо найти замену для мономов z^α. Напомним, что Рыль и Войтащик построили такие заменяющие полиномы в голоморфном случае.

Теорема 1.3 (Рыль и Войтащик [5]). *Существуют* $P_j \in H(j,0)$, $j \in \mathbb{Z}_+$, *такие что* $\|P_j\|_2 \geqslant 2^{-n}\|P_j\|_\infty$.

Для установления правильности спектров, содержащих широкие полосы, используются многочлены с подобным свойством и спектром в диагональном луче с номером m, $m \in \mathbb{Z}$. Также в §2 явно построены полиномы RW-типа $P_j \in H(j,k)$, $j \in \mathbb{Z}_+$, k фиксировано.

Функции со спектром на горизонтальных (вертикальных) лучах исследуются в §3. Специальное внимание уделено соответствующим Ω-спектральным операторам Ганкеля. В §4 показано, что свойства (RW) (существование полиномов RW-типа) и (CH) (компактность Ω-спектральных операторов Ганкеля) влекут правильность. Явные примеры получаются применением результатов из §§2,3.

Применения правильных троек при изучении интерполяционных множеств представлены в §5. Особое внимание уделено множествам плюригармонической интерполяции. В заключительном §6 обсуждаются примеры "больших" неправильных спектров и спектры, для которых CH-свойство не выполнено.

Замечание. Часть результатов из §§3,4 была анонсирована в [6].

2. Правильность и свойство Рыля-Войтащика

Правильные тройки и унимодулярные полиномы. Сначала мы отклонимся от основной линии и рассмотрим модельный случай *группы* $\mathbb{T}^n$. Меру Хаара на $\mathbb{T}^n$ обозначим через m_n. Для $\Lambda \subset \mathbb{Z}^n$ определим $C_\Lambda(\mathbb{T}^n) = \{f \in C(\mathbb{T}^n) : \operatorname{spec}(f) \subset \Lambda\}$. Положим Куб$(\alpha, r) = \{\beta \in \mathbb{Z}^n : |\alpha_j - \beta_j| < r$ для всех $1 \leqslant j \leqslant n\}$, $\alpha \in \mathbb{Z}^n$, $r > 0$.

Определение. *Будем говорить, что* $\Lambda \subset \mathbb{Z}^n$ *содержит большие кубы, если для всякого* $N \in \mathbb{N}$ *найдётся точка* $\alpha \in \mathbb{Z}^n$, *такая что* *Куб*$(\alpha, N) \subset \Lambda$.

Следующее утверждение является частным случаем предложения 16 из [1].

Предложение 2.1. *Если множество Λ содержит большие кубы, то $(C_\Lambda(\mathbb{T}^n), \mathbb{T}^n, m_n) \in (R)$.*

Доказательство. Требуется установить свойство (1.1). Не умаляя общности можно предположить, что φ – положительный *многочлен*, а потому $\operatorname{spec}(\varphi) \subset \text{Куб}\,(0, N)$ для некоторого $N \in \mathbb{N}$. Свойство больших кубов даёт $\text{Куб}\,(\alpha, N) \subset \Lambda$. Положим $f = \frac{1}{2}\varphi z^\alpha$, тогда $|f| < \varphi$, $\operatorname{spec}(f) \subset \text{Куб}\,(\alpha, N) \subset \Lambda$ (поэтому $f \in C_\Lambda(\mathbb{T}^n)$) и $\|f\|_2^2 = \frac{1}{4}\|\varphi\|_2^2$. $\square$

Свойство $\|z^\alpha\|_2 = \|z^\alpha\|_\infty$ было решающим в предыдущем рассуждении. Поэтому интересно отметить, что равенство $\|P\|_2 = \|P\|_\infty$ для многочлена P на S_n, $n \geqslant 2$, влечёт $P \equiv \text{const}$. Действительно, пусть $B_\mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^m$ обозначает вещественный единичный шар, $S_\mathbb{R}^{m-1} = \partial B_\mathbb{R}^m$. Нам потребуется лемма в размерности один.

Лемма 2.2. *Пусть P – многочлен, $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$, $P(S_\mathbb{R}^1) \subset \mathbb{T}$ и $P(x_1, x_2) \neq 0$ для всех $(x_1, x_2) \in B_\mathbb{R}^2$. Тогда $P \equiv \lambda$ на $S_\mathbb{R}^1$, $|\lambda| = 1$.*

Доказательство.

Шаг 1. *Существуют $k \in \mathbb{Z}$ и $\lambda \in \mathbb{T}$, такие что $P(x_1, x_2) = \lambda(x_1 + ix_2)^k$ для всех $(x_1, x_2) \in S_\mathbb{R}^1$.*

Положим $\zeta = x_1 + ix_2$ ($S_\mathbb{R}^1$ и $\mathbb{T}$ отождествлены). Пусть $P(\zeta) = \sum_{k_1 \leqslant k \leqslant k_2} a_k \zeta^k$ для $\zeta \in \mathbb{T}$, $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$. Предположим, что $k_1 \neq k_2$ и $a_{k_1} a_{k_2} \neq 0$, тогда для $(k_1 - k_2)$-ого коэффициента Фурье имеем $(P\overline{P})\hat{}(k_1 - k_2) = a_{k_1} a_{k_2}$. С другой стороны $(P\overline{P})\hat{}(k_1 - k_2) = 0$, так как $P(\zeta)\overline{P}(\zeta) \equiv 1$. Противоречие.

Шаг 2. *Если $P(x_1, x_2) = (x_1 + ix_2)^k$, $(x_1, x_2) \in S_\mathbb{R}^1$, то $k = 0$.*

Пусть $k \neq 0$, тогда $P(S_\mathbb{R}^1) = \mathbb{T}$. Рассмотрим гомотопию γ_τ, $\tau \in [0, 1]$ с $\gamma_0(t) = \{e^{it}, t \in [0, 2\pi)\}$ и $\gamma_1(t) = \{1\}$. Тогда $\beta_\tau = P \circ \gamma_\tau$ – гомотопия с $\beta_0(t) = \{e^{ikt}, t \in [0, 2\pi)\}$ и $\beta_1(t) = \{1\}$. Следовательно, существует $\tau \in (0, 1)$, такое что $0 \in \beta_\tau[0, 1]$; иными словами, $P(x_1, x_2) = 0$ для некоторой точки $(x_1, x_2) \in B_\mathbb{R}^2$, противоречие. $\square$

Предложение 2.3. *Пусть $P : \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$ является многочленом, $m \geqslant 3$, тогда из $|P| = \text{const}$ на $S_\mathbb{R}^{m-1}$ следует $P = \text{const}$ на $S_\mathbb{R}^{m-1}$.*

Доказательство. Пусть $|P| = 1$ на $S_\mathbb{R}^{m-1}$. Выберем сечение D шара $B_\mathbb{R}^m$ вещественной плоскостью $\mathbb{R}^2$ так близко к границе $S_\mathbb{R}^{m-1}$, что $P(x) \neq 0$ для всех $x \in D$ (это возможно, так как $|P| = 1$

на $S_{\mathbb{R}}^{m-1}$ и P непрерывен). Заметим, что $D \subset \mathbb{R}^2$ есть круг и $P(\partial D) \subset \mathbb{T}$, поэтому лемма 2.2 показывает, что $P \equiv \mathrm{const}$ на ∂D. Следовательно, локально P есть константа и $P \equiv \mathrm{const}$ на $S_{\mathbb{R}}^{m-1}$. □

Поэтому становится важной более слабая оценка $\|P\|_2 \geqslant \tau\|P\|_\infty$, $0 < \tau < 1$. Точнее, интересен следующий вопрос. Пусть $\Omega \subset \mathbb{Z}_+^2$. Существует ли такое $0 < \tau < 1$, что

$$\inf_{(p,q)\in\Omega} \sup_{f\in H(p,q)} \left\{ \frac{\|f\|_2}{\|f\|_\infty} : f \not\equiv 0 \right\} \geqslant \tau? \tag{2.1}$$

Для $\Omega = \{(p,0) : p \in \mathbb{Z}_+\}$ теорема 1.3 даёт положительный ответ. С другой стороны, если $\Omega = \{(p,p) : p \in \mathbb{Z}_+\}$, то вопрос (2.1) остаётся открытым (см. [7], глава 1, 3.6). Тем не менее, можно установить правильность некоторых объединений диагональных лучей.

Спектр, параллельный диагонали. Мы будем изучать правильность спектров, содержащих полосы, параллельные “диагонали” $\{(p,p) : p \in \mathbb{Z}_+\}$.

Сначала рассмотрим лучи. Для $k \in \mathbb{Z}$ и $N \in \mathbb{Z}_+$ положим $D(k,N) = \{(p,q) \in \mathbb{Z}_+^2 : p - q = k \text{ и } \min(p,q) \geqslant N\}$, $D(k) = D(k,0)$. Отметим, что $f \in C_{D(k)}(S) \Leftrightarrow f \in C(S)$ и $f(\lambda\zeta) = \lambda^k f(\zeta)$ для всех $\zeta \in S$ и $\lambda \in \mathbb{T}$ (в частности, $f \in C_{D(0)}(S) \Leftrightarrow f \in C(S)$ и функция f $\mathbb{T}$-инвариантна). Действительно, если $f(\lambda\zeta) = \lambda^k f(\zeta)$ и $k \neq p - q$, то

$$\int\limits_S f(\zeta) K_{pq}(z,\zeta)\, d\sigma(\zeta) = \int\limits_S \left(\int\limits_{\mathbb{T}} f(\lambda\zeta) K_{pq}(z,\lambda\zeta)\, dm(\lambda) \right) d\sigma(\zeta)$$
$$= \int\limits_S \left(\int\limits_{\mathbb{T}} \lambda^{k+q-p}\, dm(\lambda) \right) f(\zeta) K_{pq}(z,\zeta)\, d\sigma(\zeta) = 0.$$

Обратная импликация верна по определению пространства $H(p,q)$, $p - q = k$. Таким образом, $D(k,N) \notin (R)$. Однако некоторые “слабые” RW-многочлены всё же существуют.

Лемма 2.4 (хорошо известная). *Пусть $f, g \in C_{\mathbb{R}}(S)$. Тогда найдётся оператор $U \in \mathcal{U}$, такой что*

$$\int\limits_S f \cdot (g \circ U)\, d\sigma = \int\limits_S f\, d\sigma \cdot \int\limits_S g\, d\sigma.$$

Доказательство. Так как группа $\mathcal{U}$ связна, то достаточно проинтегрировать по $\mathcal{U}$ и применить теорему Фубини. $\square$

Лемма 2.5. *Пусть $n \geqslant 2$, $k \in \mathbb{Z}$ и $N \in \mathbb{Z}_+$. Тогда существует многочлен $P = P(k, N)$, такой что* $\operatorname{spec}(P) \subset D(k, N)$ *и* $\operatorname{const}(n)\|P\|_2 \geqslant \|P\|_\infty = 1$.

Доказательство. Пусть $k = 0$. Обозначим через $\pi_n : S_n \to \mathbb{C}P^{n-1}$ каноническую проекцию на проективное пространство. Для $g \in C_{D(0)}(S_n)$ соответствующий π-образ $\hat{g}$ корректно определён равенством $\hat{g}(\pi\zeta) = g(\zeta)$, $\zeta \in S_n$ (таким образом, имеется взаимно однозначное соответствие между $C_{D(0)}(S_n)$ и $C(\mathbb{C}P^{n-1})$).

Пусть $N \in \mathbb{Z}_+$ и $C_N(\mathbb{C}P^{n-1})$ соответствует пространству $C_{D(0,N)}(S_n)$.

Положим $\hat{\sigma} = \pi_n(\sigma)$, тогда тройка $(C(\mathbb{C}P^{n-1}), \mathbb{C}P^{n-1}, \hat{\sigma})$, очевидно, правильна. Так как $C_N(\mathbb{C}P^{n-1}) \subset C(\mathbb{C}P^{n-1})$ есть подпространство конечной коразмерности, то $(C_N(\mathbb{C}P^{n-1}), \mathbb{C}P^{n-1}, \hat{\sigma}) \in (R)$ (см. [1]). Напомним, что $(R) \Leftrightarrow (R2)$, поэтому найдётся многочлен $\hat{P} \in C_N(\mathbb{C}P^{n-1})$, такой что $2\|\hat{P}\|_2 \geqslant \|\hat{P}\|_\infty = 1$. Пусть P соответствует многочлену $\hat{P}$, тогда $2\|P\|_2 \geqslant \|P\|_\infty = 1$ также.

В общем случае $k \in \mathbb{Z}_+$ (не умаляя общности) и $N \in \mathbb{Z}_+$. Выберем многочлен P_0, такой что $\operatorname{spec}(P_0) \subset D(0, N + k)$ и $2\|P_0\|_2 \geqslant \|P_0\|_\infty = 1$. Пусть $R_k \in H(k, 0)$ является RW-полиномом (т.е. $\operatorname{const}(n)\|R_k\|_2 \geqslant \|R_k\|_\infty = 1$, см. теорему 1.3) и $\|P_0 \cdot (R_k \circ U_k)\|_2 = \|P_0\|_2\|R_k\|_2$ ($U_k \in \mathcal{U}$ – использована лемма 2.4), тогда $\operatorname{spec}(P_0 \cdot (R_k \circ U_k)) \subset D(k, N)$ в силу теоремы 1.1. Для завершения аргумента положим $P = P_0 \cdot (R_k \circ U_k)$. $\square$

Для $(p, q) \in \mathbb{Z}_+^2$ соответствующая полоса ширины $L \in \mathbb{Z}_+$ определяется равенством $\Pi(p, q, L) = \{(k, m) \in \mathbb{Z}_+^2 : p - q \leqslant k - m \leqslant p - q + L$ и $q \leqslant m\}$ (отметим, что $\Pi(p, q, 0)$ есть луч).

Определение. *Множество $\Omega \subset \mathbb{Z}_+^2$ содержит широкие полосы, если для всякого $M \in \mathbb{Z}_+$ существует точка $(p, q) \in \mathbb{Z}_+^2$, такая что $\Pi(p, q, M) \subset \Omega$.*

Теорема 1.1 доставляет правило умножения для полос.

Лемма 2.6. *Пусть $\varphi \in C(S)$, $L \in \mathbb{Z}_+$ и* $\operatorname{spec}(\varphi) \subset \{(p, q) \in \mathbb{Z}_+^2 : p + q \leqslant L\}$. *Пусть $(r, s) \in \mathbb{Z}_+^2$, $P \in C(S)$ и* $\operatorname{spec}(P) \subset \{(r + L + t, s + t) : t \geqslant L\}$. *Тогда* $\operatorname{spec}(\varphi P) \subset \Pi(r, s, 2L)$.

Доказательство. Так как $p+q \leqslant L$ и $t \geqslant L$, то $(r+L+t+p, s+t+q) \in \Pi(r + L, s + L, 2L)$. С другой стороны, $J = \min(p, s + t) + \min(q, r +$

$L+t) \leqslant p+q \leqslant L$, откуда $(r+L+t+p-j, s+t+q-j) \in \Pi(r,s,2L)$ для всех $0 \leqslant j \leqslant J$. Теперь применим теорему 1.1. □

Теорема 2.7. *Если Ω содержит широкие полосы, то $\Omega \in (R)$.*

Доказательство. Мы действуем как в предложении 2.1 и предполагаем, что φ является положительным *многочленом*, а потому $\operatorname{spec}(\varphi) \subset \{(p,q) \in \mathbb{Z}_+^2 : p+q \leqslant L\}$ для некоторого $L \in \mathbb{Z}_+$.

Свойство широких полос даёт такую точку $(k,m) \in \mathbb{Z}_+^2$, что $\Pi(k,m,2L) \subset \Omega$. Лемма 2.5 доставляет многочлен P, такой что $\operatorname{spec}(P) \subset \Pi(k+2L, m+L, 0)$ и $C\|P\|_2 \geqslant \|P\|_\infty = 1$. Выберем по лемме 2.4 такой оператор $U \in \mathcal{U}$, что $\|(P \circ U)\varphi\|_2 = \|P\|_2 \|\varphi\|_2$.

Теперь определим $f = \frac{1}{2}(P \circ U)\varphi$. Тогда $|f| < \varphi$, $\|f\|_2 \geqslant (1/2C)\|\varphi\|_2$ и по лемме 2.6 $\operatorname{spec}(f) \subset \Pi(k,m,2L)$, т.е. $f \in C_\Omega(S)$. □

Пример 2.8. *Пусть $0 < \alpha < 1$ и $\Delta(1,\alpha) = \{(p,q) \in \mathbb{Z}_+^2 : p \geqslant q \geqslant \alpha p\}$, тогда $\Delta(1,\alpha) \in (R)$. Более того, пусть $\Lambda \subset \mathbb{Z}_+$ содержит произвольно длинные интервалы (т.е. для всякого $N \in \mathbb{Z}_+$ найдётся такое $m \in \mathbb{Z}_+$, что $m+j \in \Lambda$ для всех $0 \leqslant j \leqslant N$), тогда спектр*

$$\Delta(1,\alpha) \cap \{(p,q) \in \mathbb{Z}_+^2 : p-q \in \Lambda\} \quad \textit{является правильным.}$$

RW-многочлены на горизонтальных лучах. Мы возвращаемся к вопросу (2.1) в случае горизонтального луча. Именно, при $k \in \mathbb{Z}_+$ рассмотрим спектр $\Omega = \Omega(k) = \{(p,k) : p \in \mathbb{Z}_+\}$.

Сначала напомним методы для построения соответствующих голоморфных многочленов (т.е. для $k=0$). Доказательство в [5] основано на теории конечномерных банаховых пространств, в [5] очерчен и второй способ с использованием функций Радемахера. (см. также [8], §2). Полиномы Рудина-Шапиро применены в явной конструкции в [9] (для $n=2$). Некоторые усиления результатов из [5] представлены в [10].

В [7] показано, что абстрактный RW-метод работает для $\Omega(k)$ и при $k>0$. Мы дадим конструктивное доказательство соответствующего факта.

Предложение 2.9. *Пусть $k \in \mathbb{Z}_+$ и $n \geqslant 2$. Тогда существуют константа $c(k,n) > 0$ и многочлены $W_p \in H(p,k)$, такие что для всех $p \in \mathbb{Z}_+$ имеем*

(a) $|W_p(\zeta)| \leqslant 1$ *для всех* $\zeta \in S$,

(b) $\|W_p\|_{L^2(\sigma)} \geqslant c(n,k)$.

Доказательство. Для $\zeta, \eta \in S$ положим $d^2(\zeta,\eta) = 1 - |\langle \zeta, \eta \rangle|^2$ и $E_\delta(\eta) = \{\zeta \in S : d(\zeta,\eta) < \delta\}$ $(0 < \delta \leqslant 1)$. Напомним, что d удовлетворяет неравенству треугольника и $\sigma(E_\delta) = \delta^{2n-2}$.

Зафиксируем $k \in \mathbb{Z}_+$ и предположим (не умаляя общности), что $p \geqslant k+n-1$. В дальнейшем p также фиксировано. Определим $f(z) = f_{pk}(z) := (2p)^{k/2} z_1^p \overline{z}_2^k$.

Отметим, что $|f(z)|$ достигает своего максимума на множестве $|z_1|^2 = p/(p+k)$, более того, если $\varepsilon^2 \geqslant p/(p+k)$, то

$$\max\{|f(z)| : z \in S \setminus E_\varepsilon(e_1)\} = (2p)^{k/2}(1-\varepsilon^2)^{p/2}\varepsilon^k.$$

Положим $\delta^2 = 1/2p$. Пусть $B \in \mathbb{N}$ столь велико, что

$$\sum_{m=B}^{\infty} (m+1)^{k+2n-2} \exp(-m^2/4) < 1/3 \qquad \text{и} \quad B > (2k)^{1/2}.$$

В силу 1.4.9 из [4], имеем

$$\int_S |f|^2\, d\sigma = (2p)^k \frac{(n-1)!\; p!\; k!}{(n-1+p+k)!} \geqslant \frac{1}{(2p)^{n-1}} = \delta^{2n-2}.$$

С другой стороны $B^2\delta^2 > k/p \geqslant k/(p+k)$, поэтому

$$\begin{aligned}
\int_{S\setminus E_{B\delta}(e_1)} |f|^2\, d\sigma &\leqslant \sum_{m \geqslant B} \sigma\left(E_{(m+1)\delta}\right) \cdot \max\{|f(z)| : z \in S \setminus E_{m\delta}(e_1)\} \\
&\leqslant \sum_{m\geqslant B} (m+1)^{2n-2}\delta^{2n-2}(1-m^2\delta^2)^{p/2} m^k \delta^k (2p)^{k/2} \\
&\leqslant \delta^{2n-2} \sum_{m=B}^{\infty} (m+1)^{k+2n-2} \exp(-p\delta^2 m^2/2) \cdot (2p\delta^2)^{k/2} \\
&= \delta^{2n-2} \sum_{m=B}^{\infty} (m+1)^{k+2n-2} \exp(-m^2/4) \leqslant \frac{\delta^{2n-2}}{3}.
\end{aligned}$$

В сумме получаем

$$\int_{E_{B\delta}(e_1)} |f|^2\, d\sigma \geqslant \frac{2}{3}\delta^{2n-2}, \qquad \|f\|_{L^2(E_{B\delta}(e_1))} > \frac{2}{3}\delta^{n-1}.$$

Пусть теперь $A \in \mathbb{N}$ столь велико, что

$$B^{k+n-1} \sum_{m=A}^{\infty} (m+2)^{k+2n-2} \exp(-m^2 B^2/4) < 1/3.$$

Выберем такие точки $\{\eta_j\}_{j=1}^M \subset S$, что $E_{AB\delta}(\eta_j)$ не имеют попарных пересечений и одновременно $\bigcup_{j=1}^M E_{2AB\delta}(\eta_j) \supset S$. Последнее включение влечёт оценки

$$M(2AB\delta)^{2n-2} = M\sigma(E_{2AB\delta}) \geqslant 1, \qquad M \geqslant (2AB\delta)^{2-2n}.$$

Зафиксируем такие операторы $U_j \in \mathcal{U}$, что $U_j(\eta_j) = e_1$ и определим

$$g_j = f \circ U_j, \qquad h = \sum_{j=1}^M g_j.$$

Тогда выполнено

$$\|h\|^2_{L^2(\sigma)} \geqslant \sum_{j=1}^M \int\limits_{E_{B\delta}(\eta_j)} |h|^2 \, d\sigma, \tag{2.2}$$

$$\|h\|_{L^2(E_{B\delta}(\eta_j))} \geqslant \|g_j\|_{L^2(E_{B\delta}(\eta_j))} - \left\| \sum_{i \neq j} g_i \right\|_{L^2(E_{B\delta}(\eta_j))}, \tag{2.3}$$

$$\|g_j\|_{L^2(E_{B\delta}(\eta_j))} = \|f\|_{L^2(E_{B\delta}(e_1))} > \frac{2}{3}\delta^{n-1}. \tag{2.4}$$

Зафиксируем $j_0 \in [1, M]$ и $\zeta \in E_{B\delta}(\eta_{j_0})$. Для $m \in \mathbb{Z}_+$ определим

$$H_m = \{\eta_i : mB\delta \leqslant d(\zeta, \eta_i) \leqslant (m+1)B\delta, \quad i \neq j_0\}.$$

По выбору точек $\{\eta_j\}_{j=1}^M$ имеем $H_m = \varnothing$ для $m < A$. С другой стороны, если $\eta_i \in H_m$, то

$$|g_i(\zeta)| \leqslant (mB\delta)^k (2p)^{k/2} \exp(-m^2 B^2/4).$$

Теперь оценим $|H_m|$ (количество элементов в H_m). Так как множества $E_{B\delta}(\eta_i)$ попарно дизъюнктны и $E_{B\delta(\eta_i)} \subset E_{(m+2)B\delta}(\zeta)$, то получаем $|H_m| \leqslant (m+2)^{2n-2}$. Откуда

$$\sum_{i \neq j_0} |g_i(\zeta)| \leqslant \sum_{m=A}^{\infty} (m+2)^{k+2n-2} B^k \exp(-m^2 B^2/4) < \frac{1}{3B^{n-1}},$$

$$\left\| \sum_{i \neq j_0} g_i \right\|_{L^2\left(E_{B\delta}(\eta_{j_0})\right)} \leqslant \sigma^{1/2}(E_{B\delta}) \frac{1}{3B^{n-1}} = \frac{\delta^{n-1}}{3}.$$

В силу (2.3) и (2.4) имеем

$$\|h\|_{L^2\left(E_{B\delta}(\eta_{j_0})\right)} \geqslant \frac{\delta^{n-1}}{3}.$$

Наконец, (2.2) доставляет

$$\|h\|_2^2 \geqslant M\frac{\delta^{2n-2}}{9} \geqslant \frac{1}{9(2AB)^{2n-2}}.$$

Отметим, что константы A и B зависят только от k, n. Поэтому достаточно равномерно оценить модуль $|h(\zeta)|$, $\zeta \in S$. Пусть $\zeta \in S$, тогда неравенство $d(\zeta, \eta_j) \leqslant B\delta$ имеет место не более, чем для одного индекса $j \in [1, M]$. Поскольку множества $E_{AB\delta}(\eta_j)$ дизъюнктны, полученные выше оценки дают

$$\begin{aligned} |h(\zeta)| &\leqslant \sum_{j=1}^{M} |g_j(\zeta)| \\ &\leqslant (2p)^{k/2}\left(\frac{p}{p+k}\right)^{p/2}\left(\frac{k}{p+k}\right)^{k/2} + \sum_{m=A}^{\infty}\frac{(m+2)^{k+2n-2}B^k}{\exp(m^2B^2/4)} \\ &\leqslant \Sigma(k) < +\infty. \end{aligned}$$

Мы получаем (a) и (b) после нормировки $W_p = h_p/\Sigma(k)$. □

3. Функции со спектром на горизонтальных лучах

В §2 были исследованы некоторые объединения диагональных лучей, теперь мы рассматриваем горизонтальные лучи. В дальнейшем предполагается, что $k, m \in \mathbb{Z}_+$ и $k \geqslant m$. Положим $\Omega(k,m) = \{(p,q) \in \mathbb{Z}_+^2 : k \geqslant q \geqslant m\}$. В настоящем разделе будут получены предварительные результаты о функциях со спектром в $\Omega(k,m)$ (приложения к вопросам правильности даны в §4).

Пространства A_{km} и H^p_{km}. Определим

$$\begin{aligned} &A_{km}(S) = C_{\Omega(k,m)}(S), \quad A_k(S) = A_{kk}(S), \\ &H^p_{km}(S) = L^p_{\Omega(k,m)}(S), \quad H^p_k(S) = H^p_{kk}(S) \quad (1 \leqslant p < \infty). \end{aligned}$$

Положим также $H^p_{km}(B) = \{P[f] : f \in H^p_{km}(S)\}$ (здесь $P[f]$ – интеграл Пуассона), определение пространства $A_{km}(B)$ аналогично.

Если $k = m = 0$, то рассматриваемые пространства совпадают с классами Харди $H^p(B)$ и шаровой алгеброй $A(B)$. Для пространств $H^p_{km}(B)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ имеется описание в духе классического $H^p(B)$-определения. Именно, обозначим через $h_\Omega(B)$ $(\Omega \subset \mathbb{Z}^2_+)$ пространство таких функций u, что

$$u(z) = \sum_{(p,q)\in\Omega} u_{pq}(z) \quad (z \in B), \tag{3.1}$$

где $u_{pq} \in H(p,q)$ и ряд (3.1) сходится равномерно на компактных подмножествах шара (т.о. функция u гармонична). Пусть $1 \leqslant p < \infty$, тогда $h^p_\Omega(B)$ – это множество таких $u \in h_\Omega(B)$, что

$$\sup_{0<r<1} \left(\int_S |u(r\zeta)|^p \, d\sigma(\zeta) \right)^{1/p} < +\infty. \tag{3.2}$$

Хорошо известно, что при $p > 1$ условие (3.2) влечёт существование такой функции $f \in L^p(S)$, что $u = P[f]$. Заметим, что $\|u_r - f\|_p \to 0$ при $r \to 1-$, поэтому $\operatorname{spec}(f) \subset \Omega$. Откуда $h^p_\Omega(B) = L^p_\Omega(B)$, $p > 1$. Если $p = 1$, то (3.2) доставляет $u = P[\mu]$ для некоторой меры $\mu \in M(S)$. Как и выше, имеем $\operatorname{spec}(\mu) \subset \Omega$. Теперь напомним (см. [11]), что условие $\operatorname{spec}(\mu) \subset \Omega(k,m)$ влечёт $\mu \ll \sigma$, откуда $h^1_{\Omega(k,m)}(B) = H^1_{km}(B)$.

Отметим, что в размерности один (т.е. $n = 1$) имеем $A_{k0}(\mathbb{T}) = \overline{z}^k A(\mathbb{T})$, а пространства $A_{km}(\mathbb{T})$ имеют конечную размерность для всех $m > 0$. Если $n \geqslant 2$, то пространства $A_{k0}(B)$ также тесно связаны с алгеброй $A(B)$. Например, имеется естественное описание этих пространств в терминах $\overline{\partial}$-производной. Действительно, если $f \in A_{k0}(B)$, то $\overline{\partial}^{k+1} f = 0$ в B (по определению последнее равенство означает, что $\overline{D}_{j_1}\overline{D}_{j_2}\ldots\overline{D}_{j_{k+1}} f = 0$ для всех последовательностей $\{j_s\}_{s=1}^{k+1}$, где $1 \leqslant j_s \leqslant n$). Если f – многочлен, то мы немедленно имеем это утверждение; общий случай получается после полиномиальной аппроксимации. С другой стороны, обратное верно даже для негармонических функций.

Предложение 3.1. *Пусть* $f \in C(\overline{B}) \cap C^{k+1}(B)$ *и* $\overline{\partial}^{k+1} f = 0$ *в* B. *Тогда* $f|_S \in A_{k0}(S)$ *и соответственно* $\overline{\partial}^{k+1} P[f|_S] = 0$ *в* B.

Доказательство. Так как $f_r \to f$ в пространстве $C(S)$ при $r \to 1-$, то утверждение предложения достаточно проверить для

f_r, $0 < r < 1$. Воспользуемся касательными операторами Коши-Римана

$$L_{ij} = z_i \overline{D}_j - z_j \overline{D}_i, \quad 1 \leqslant i < j \leqslant n.$$

Пусть $q \geqslant 1$, $u \in H(p,q)$, $u \neq 0$. Хорошо известно (см. [4], 18.3.3), что тогда $L_{ij} u \in H(p+1, q-1)$ для всех i, j, а также $L_{ij} u \neq 0$ для некоторых i и j.

Положим $f_{pq} = K_{pq}[f_r]$. Пусть $f_{pq} \neq 0$ для некоторого $q > k$, тогда найдутся последовательности i_s, j_s $(1 \leqslant s \leqslant k+1)$, такие что $L_{i_1 j_1} \ldots L_{i_{k+1} j_{k+1}} f_{pq} \neq 0$, откуда $L_{i_1 j_1} \ldots L_{i_{k+1} j_{k+1}} f_r \neq 0$ также. С другой стороны, равенство $\overline{\partial}^{k+1} f = 0$ влечёт $L_{i_1 j_1} \ldots L_{i_{k+1} j_{k+1}} f_r(\zeta) = 0$ для $\zeta \in S$, противоречие.

Так как $K_{pq}[f_r] = 0$ для всех $q > k$, то $f_r \in A_{k0}(S)$, поэтому $f|_S \in A_{k0}(S)$, откуда $P[f|_S] \in A_{k0}(B)$ и $\overline{\partial}^{k+1} P[f|_S] = 0$. □

Следствие 3.2. *Пусть $f \in A_{k0}(S)$, $g \in A_{m0}(S)$. Тогда $fg \in A_{(k+m)0}(S)$. В частности, $A_{k0}(S)$ является $\mathcal{U}$-инвариантным модулем над алгеброй $A(S)$.*

Доказательство 1. Так как $\overline{\partial}^{k+m+1}(P[f] \cdot P[g]) = 0$ в шаре, то утверждение следует из предложения 3.1.

Доказательство 2. Применим теорему 1.1. □

Воспроизводящие ядра для пространств $H^2_k(B)$. Для $\Omega \subset \mathbb{Z}^2_+$ обозначим через $K_\Omega(\zeta, z)$ воспроизводящее ядро для пространства $L^2_\Omega(B)$. По определению это означает, что $K_\Omega(\cdot, z) \in L^2_\Omega(S)$ для всех $z \in B$ и

$$f(z) = \langle f, K_\Omega(\cdot, z) \rangle_{L^2(S)}$$

для всех $f \in L^2_\Omega(B)$ и $z \in B$, т.е.

$$f(z) = \int\limits_S f(\zeta)\, \overline{K_\Omega(\zeta, z)}\, d\sigma(\zeta) = \int\limits_S K_\Omega(z, \zeta)\, f(\zeta)\, d\sigma(\zeta). \tag{3.3}$$

Если множество Ω состоит из единственной точки (p,q), то будет использоваться прежнее обозначение $K_{pq}(z,\zeta)$ (см. §1); в этом случае формула (3.3) верна также при $z \in S$.

Напомним, что $\Omega(k) = \{(p,k) \in \mathbb{Z}^2_+\}$ для $k \in \mathbb{Z}_+$. Множество $\Omega(k)$ соответствует пространству $H^2_k(B)$ (в прежних обозначениях), $C_k(z,\zeta)$ будет обозначать воспроизводящее ядро для этого пространства. Отметим, что $C_0(z,\zeta) = C(z,\zeta)$ – это классическое воспроизводящее ядро для класса Харди $H^2(B)$, его называют ядром Коши (или Коши-Сегё). Верна следующая явная формула

$$C(z,\zeta) = (1 - \langle z,\zeta\rangle)^{-n} \qquad (z \in B,\ \zeta \in S).$$

Наша первая цель – показать, что сингулярности ядер $|C_k(z,\zeta)|$ и $|C(z,\zeta)|$ весьма схожи. Прежде всего, напомним некоторые свойства ядер $K_{pq}(z,\zeta)$ и пространств $H(p,q)$. Пусть $D(p,q,n)$ обозначает размерность пространства $H(p,q)$. Комбинаторное рассуждение показывает (см. [7]), что

$$D(p,q,n) = \binom{p+n-2}{p}\binom{q+n-2}{q}\frac{p+q+n-1}{n-1} \qquad (n \geqslant 2). \quad (3.4)$$

При $\zeta \in S,\ z \in B$, выполняется оценка (см. [7])

$$|K_{pq}(z,\zeta)| \leqslant |z|^{p+q} D(p,q,n). \quad (3.5)$$

Свойства (3.4) и (3.5) дают следующую естественную формулу для Ω-спектрального воспроизводящего ядра (мы опускаем стандартное рассуждение).

Лемма 3.3. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{Z}_+^2$, тогда*

$$K_\Omega(z,\zeta) = \sum_{(p,q)\in\Omega} K_{pq}(z,\zeta), \qquad z \in B,\ \zeta \in S.$$

Последняя лемма, явные формулы для $K_{pq}(z,\zeta)$ и суммирование нескольких геометрических прогрессий дают формулы для ядер $C_k(z,\zeta)$. Действительно, при $p \geqslant q$ имеем (см. [7], глава 1, 3.2)

$$K_{pq}(z,\zeta) = D(p,q,n)\langle z,\zeta\rangle^{p-q}\mathcal{P}_q^{p-q,n-2}\left(\frac{|\langle z,\zeta\rangle|^2}{|z|^2}\right)\cdot |z|^{2q},$$

где $z \in B,\ \zeta \in S$ и $\mathcal{P}_m^{\alpha,\beta}$ (с $\alpha,\beta > -1$) обозначает многочлен степени m ортогональный в $L^2([0,1],\, x^\alpha(1-x)^\beta\, dx)$ всем многочленам меньшей степени и нормированный условием $\mathcal{P}_m^{\alpha,\beta}(1) = 1$ (иными словами, $\mathcal{P}_m^{\alpha,\beta}$ есть полином Якоби (см. [12])).

Например (см. [6]),

$$C_1(z,\zeta) = n\frac{\langle\zeta,z\rangle - |z|^2}{(1-\langle z,\zeta\rangle)^{n+1}} - \frac{|z|^2}{(1-\langle z,\zeta\rangle)^n}.$$

В частности,

$$|C_1(z,\zeta)| \leqslant \frac{n+1}{|1-\langle z,\zeta\rangle|^n} = (n+1)|C(z,\zeta)| \quad \text{для всех } z \in B,\ \zeta \in S.$$

Последняя оценка оказывается решающей и верна для всех $k \in \mathbb{Z}_+$.

Теорема 3.4. *Предположим, что $n \geqslant 2$, $k \in \mathbb{Z}_+$ и $C_k(z,\zeta)$ есть воспроизводящее ядро для пространства $H^2_k(B_n)$. Тогда*

$$C_k(z,\zeta) = \sum_{m=0}^{k} P_m\left(z,\overline{z},\langle z,\zeta\rangle,\langle \zeta,z\rangle\right) \frac{\left(\langle \zeta,z\rangle - |z|^2\right)^m}{\left(1-\langle z,\zeta\rangle\right)^{n+m}},$$

для некоторых полиномов P_m. В частности,

$$|C_k(z,\zeta)| \leqslant \operatorname{const}(k,n)\,|C(z,\zeta)| \quad \text{для всех } z \in B,\ \zeta \in S.$$

Доказательство. Мы опускаем рутинные вычисления, основанные на свойствах полиномов Якоби. $\square$

Операторы Тёплица и Ганкеля. Теперь мы готовы изучить интегральные операторы, порождённые ядрами $C_k(z,\zeta)$. Отметим, что формула (3.3) автоматически верна для $f \in L^1_\Omega(B)$. Поэтому для $f \in L^1(S)$ определим

$$K_\Omega[f](z) = \int\limits_S K_\Omega(z,\zeta) f(\zeta)\, d\sigma(\zeta) \quad (z \in B).$$

Будем называть $K_\Omega[f]$ Ω-преобразованием Коши функции f. Оператор K_Ω, заданный на $L^2(S)$ указанной формулой, есть ортогональный проектор на L^2_Ω. Как обычно, мы используем обозначение $C_k[f]$ в случае множества $\Omega(k)$.

Замечание. Безусловно, формула, данная в теореме 3.4, показывает, что оператор C_k имеет сильный тип (p,p), $1 < p < \infty$, слабый $(1,1)$ тип и т.д.

Поскольку мера σ $\mathcal{U}$-инвариантна и $K_\Omega(Uz,\zeta) = K_\Omega(z,U^{-1}\zeta)$ $(U \in \mathcal{U})$, то преобразование Коши коммутирует с действием унитарной группы $\mathcal{U}$.

Лемма 3.5. *Пусть* $f \in L^1(S)$, $\Omega \subset \mathbb{Z}_+^2$ *и* $U \in \mathcal{U}$. *Тогда* $K_\Omega[f \circ U] = (K_\Omega[f]) \circ U$.

Оператором Тёплица (точнее, аналогом классического оператора Тёплица) с символом $\varphi \in C(S)$ будем называть оператор $T_{\Omega,\varphi} : L^2(S) \to L^2_\Omega(B)$, определённый равенством $T_{\Omega,\varphi}[f](z) = K_\Omega[\varphi f](z)$, $z \in B$.

Ω-спектральный оператор Ганкеля $V_{\Omega,\varphi} : L^2(S) \to L^2(S)$ (также аналог классического) действует по формуле

$$V_{\Omega,\varphi}[f](\zeta) = \varphi(\zeta)K_\Omega[f](\zeta) - T_{\Omega,\varphi}[f](\zeta) \quad (\zeta \in S).$$

Для $\Omega = \Omega(k)$ используются обозначения $T_{k,\varphi}$ и $V_{k,\varphi}$.

При изучении оператора Ганкеля удобно продолжить символ φ до функции непрерывной на $\overline{B}$, определить функцию f в шаре посредством интеграла Пуассона и рассматривать функцию $V_{\Omega,\varphi}[f](z)$ при $z \in \overline{B}$. Отметим, что значения $V_{\Omega,\varphi}[f](\zeta)$, $\zeta \in S$ не зависят от способа продолжения для φ.

В дальнейшем следующая теорема будет важным инструментом.

Теорема 3.6. *Пусть* $\varphi \in C^1(S)$, $k \in \mathbb{Z}_+$. *Тогда*

(*a*) $T_{k,\varphi}(A_k(S)) \subset A_k(B)$.

(*b*) $V_{k,\varphi}(C(S)) \subset C(S)$ *и оператор* $V_{k,\varphi} : C(S) \to C(S)$ *компактен.*

(*c*) *Утверждения* (*a*) *и* (*b*) *верны для пространств и операторов, соответствующих множеству* $\mathbb{Z}_+^2 \setminus \Omega(k)$.

Доказательство. Не умаляя общности предположим, что символ φ продолжен до функции из $C^1(\overline{B})$. Напомним, что

$$V_{k,\varphi}[f](z) = \int\limits_S [\varphi(z) - \varphi(\zeta)]C_k(z,\zeta)f(\zeta)\,d\sigma(\zeta) \qquad (z \in B).$$

Положим $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$. Так как $\varphi \in C^1(\overline{B})$, то в силу теоремы 3.4 для всех $r \in [0,1)$ имеем

$$\begin{aligned} |\varphi(re_1) - \varphi(\zeta)|\,|C_k(re_1,\zeta)| &\leqslant \text{const}\,\frac{|re_1 - \zeta|}{|1 - \langle re_1, \zeta\rangle|^n} \\ &\leqslant \text{const}\,|1 - \zeta_1|^{1/2-n}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Заметим, что $|1-\zeta_1|^{1/2-n} \in L^1(S)$, поэтому использование леммы 3.5 показывает, что функция $V_{k,\varphi}[f](z)$ равномерно непрерывна при $z \in B$. Следовательно, эта функция продолжима по непрерывности на $\overline{B}$. Первая часть утверждения (*b*) доказана.

Так как $\varphi f \in C(\overline{B})$ и $T_{k,\varphi}[f] = \varphi f - V_{k,\varphi}[f]$ (для $f \in A_k(S)$), то верно утверждение (a). С другой стороны, оценка (3.6) показывает, что семейство $\{V_{k,\varphi}[f] : \|f\|_\infty \leqslant 1\}$ равностепенно непрерывно и равномерно ограничено. Теперь теорема Арцела-Асколи доставляет (b).

Тождество $V_{\mathbb{Z}_+^2 \setminus \Omega(k),\varphi} + V_{\Omega(k),\varphi} = V_{\mathbb{Z}_+^2,\varphi} \equiv 0$ влечёт (c). □

Замечание. Теорема 3.6 имеет место и при меньших ограничениях на символ φ. Так, достаточно предполагать, что функция φ удовлетворяет условию Дини (см. [4], 6.5.4; необходимо вновь применить теорему 3.4 и лемму 3.5).

4. Правильность и компактные операторы Ганкеля

Напомним, что спектр $\Omega(0) = \{(p,0) : p \in \mathbb{Z}_+\}$ правилен (теорема 1.2). В настоящем разделе показано, что лучи $\Omega(k) = \{(p,k) : p \in \mathbb{Z}_+\}$, $k \in \mathbb{Z}_+$ также правильны. Это будет следовать из одного общего утверждения и результатов из §§2,3. Зафиксируем спектр $\Omega \subset \mathbb{Z}_+^2$. Следующие два ограничения на Ω играют решающую роль.

(RW)-свойство. *(Существование многочленов RW-типа, ср. с теоремой 1.3 и §2.) Существует константа $c = c(\Omega) > 0$ и последовательность многочленов $\{R_j\}_{j=0}^\infty$, такие что $R_j \in H(p_j,q_j) \subset C_\Omega(S)$, $\max(p_j,q_j) \geqslant j$ и*

$$c\|R_j\|_{L^2(\sigma)} \geqslant \|R_j\|_{L^\infty(\sigma)} = 1.$$

Замечание. Можно рассматривать модификацию приведённого свойства, когда $\operatorname{spec}(R_j)$ – это не единственная точка, а подмножество в Ω (ср. с леммой 2.5).

(CH)-свойство. *(Компактность Ω-спектрального оператора Ганкеля.) Ω-спектральный оператор Ганкеля $V_{\Omega,\varphi}$ компактно действует из $C_\Omega(S)$ в $C(S)$ для каждого многочлена $\varphi \in C(S)$.*

При выполнении свойств (RW) и (CH) можно установить правильность тройки $(C_\Omega(S), S, \sigma)$, используя метод из [1]. Как обычно, нам потребует лемма об умножении. Для $(r,s) \in \mathbb{Z}_+^2$ и $L \in \mathbb{Z}_+$ положим

$$\operatorname{Sq}(r,s,L) = \{(p,q) \in \mathbb{Z}_+^2 : |p-r| + |q-s| < L\}$$

(квадрат с центром (r,s)). Отметим, что $\operatorname{Sq}(r,s,0) = \varnothing$.

Лемма 4.1. *Пусть* $\varphi \in C(S)$, $L \in \mathbb{N}$, $\operatorname{spec}(\varphi) \subset \operatorname{Sq}(0,0,L)$ *и* $\psi \in H(r,s)$. *Тогда* $\operatorname{spec}(\varphi \cdot \psi) \subset \operatorname{Sq}(r,s,L)$.

Теорема 4.2. *Пусть* $\Omega \in (RW)$ *и* $\Omega \in (CH)$. *Пусть* $\{(p_j, q_j)\}_{j=0}^{\infty}$ *– последовательность из* RW*-свойства,* $L_j \in \mathbb{Z}_+$ *и* $\sup\{L_j : j \in \mathbb{Z}_+\} = \infty$. *Тогда*

$$\Omega \cap \left(\bigcup_{j \in \mathbb{Z}_+} \operatorname{Sq}(p_j, q_j, L_j) \right) \in (R).$$

В частности, $\Omega \in (RW) \cap (CH) \Rightarrow \Omega \in (R)$.

Доказательство. Для данного многочлена $\varphi \in C(S)$, $\varphi > 0$, необходимо проверить свойство (1.1). Пусть $\operatorname{spec}(\varphi) \subset \operatorname{Sq}(0,0,L)$ для некоторого $L \in \mathbb{N}$. Зафиксируем такую последовательность $\{j_k\}_{k=0}^{\infty}$, что $L_{j_k} > L$. Свойство (RW) доставляет многочлены R_{j_k}. Лемма 2.4 даёт такие операторы $U_k \in \mathcal{U}$, что

$$\|\varphi \cdot (R_{j_k} \circ U_k)\|_2^2 = \|\varphi\|_2^2 \, \|R_{j_k}\|_2^2 \geqslant \|\varphi\|_2^2 / c(\Omega).$$

Определим $g_k = R_{j_k} \circ U_k$, $f_k = 2T_{\Omega,\varphi}[g_k]/3 = 2\,(\varphi \cdot g_k - V_{\Omega,\varphi}[g_k])\,/3$. По лемме 4.1 выполнено $\operatorname{spec}(f_k) \subset \Omega \cap \operatorname{Sq}(p_{j_k}, q_{j_k}, L_{j_k})$.

Имеем $g_k \in H(p_{j_k}, q_{j_k})$, $p_{j_k} + q_{j_k} \geqslant j_k \to \infty$ при $k \to \infty$ и $\|g_k\|_\infty = 1$, поэтому последовательность $\{g_k\}_{k=0}^{\infty}$ сходится к нулю в слабой топологии пространства $L^2(\sigma)$. А потому и последовательность $\{V_{\Omega,\varphi}[g_k]\}_{k=0}^{\infty}$ сходится к нулю в слабой топологии пространства $L^2(\sigma)$. Используя (CH)-свойство, мы получаем

$$\lim_{k \to \infty} \|V_{\Omega,\varphi}[g_k]\|_{C(S)} = 0. \tag{4.1}$$

Действительно, пусть последнее равенство не верно. Так как оператор $V_{\Omega,\varphi} : C_\Omega(S) \to C(S)$ компактен и последовательность $\{g_k\}_{k=0}^{\infty}$ ограничена в $C_\Omega(S)$, то некоторая подпоследовательность из $\{V_{\Omega,\varphi}[g_k]\}_{k=0}^{\infty}$ сходится (в $C(S)$, а потому и в слабой топологии $L^2(\sigma)$) к ненулевому пределу, противоречие.

Таким образом, для достаточно больших k (4.1) дает

$$|f_k(\zeta)| < \varphi(\zeta)\|g_k\|_{C(S)} \leqslant \varphi(\zeta), \quad \zeta \in S,$$
$$\|f_k\|_2^2 > \frac{1}{3}\|\varphi g_k\|_2^2 \geqslant \frac{1}{3c(\Omega)}\|\varphi\|_2^2. \quad \square$$

Применим полученный результат для горизонтальных лучей.

Определение. *Пусть $k \in \mathbb{Z}_+$ и $\Omega \subset \mathbb{Z}_+^2$. Мы пишем $\Omega \in (LI_k)$ (длинные интервалы на уровне k), если для всякого $M \in \mathbb{Z}_+$ найдётся такое $m \in \mathbb{Z}_+$, что $(m+j,k) \in \Omega$ для всех $0 \leqslant j \leqslant M$.*

Следствие 4.3. *Пусть $k \in \mathbb{Z}_+$ и $\Omega \in (LI_k)$, тогда $\Omega \in (R)$. В частности, множество $\Omega(k)$ правильно.*

Доказательство. Предложение 2.9 даёт свойство $\Omega(k) \in (RW)$. По теореме 3.6 имеем $\Omega(k) \in (CH)$. □

Замечание. Последнее следствие даёт, в частности, *сингулярные* представляющие (для шаровой алгебры) меры со спектром в $\Omega(k) \cup \overline{\Omega}(k) \cup \{(0,0)\}$, $k \geqslant 1$.

Следующий факт доставляет примеры правильных спектров иного типа.

Следствие 4.4. *Существует такая возрастающая функция $\Phi : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$, что $\lim_{p\to\infty} \Phi(p) = \infty$ и для всякого $\alpha > 0$ спектр $\Delta(\Phi,\alpha) = \{(p,q) \in \mathbb{Z}_+^2 : \Phi(p) \leqslant q \leqslant \alpha p\}$ правилен.*

Замечание. Пусть $k \in \mathbb{Z}_+$, $\alpha > 0$, тогда пересечение $\Delta(\Phi,\alpha) \cap \Omega(k)$ конечно. Интересно также сравнение с примером 2.8.

Доказательство. Положим $a_0 = 1$ и построим по индукции последовательность $\{a_j\}_{j=0}^\infty$, $a_{j+1} \geqslant 2a_j$. Пусть $a_j \in \mathbb{Z}_+$ построено. В силу следствия 4.3 (свойство $(R2)$) найдутся многочлен P_j и $M_j \in \mathbb{Z}_+$, такие что $\mathrm{spec}\,(P_j) \subset [(a_j^2+j,a_j),(a_j^2+M_j,a_j)] \subset \mathbb{Z}_+^2$ и $2\|P_j\|_2 \geqslant \|P_j\|_\infty = 1$. Выберем такое $a_{j+1} \in \mathbb{Z}_+$, что $a_{j+1}^2 > a_j^2 + M_j + j$ и $a_{j+1} \geqslant 2a_j$. Далее работает индукция.

Пусть $j \in \mathbb{Z}_+$ и $p \in [a_j^2, a_{j+1}^2)$, тогда определим $\Phi(p) = a_j - j$. Для проверки правильности множества $\Delta(\Phi,\alpha)$ применим аргумент из доказательства теоремы 2.7. □

5. Интерполяционные множества на сфере

Определение. *Пусть $X \subset C(S)$ – замкнутое подпространство и $E \subset S$ – компакт. E называется (I)-множеством (интерполяционное множество для X), если $X|_E = C(E)$.*

E является (N)-множеством (нуль-множество), если $|\mu|(K) = 0$ для всех $\mu \in X^\perp$, где $X^\perp = \{\mu \in M(S) : \int_S f\,d\mu = 0$ для всех $f \in X\}$ – аннулятор подпространства X.

Приведённые определения являются классическими. Нам также потребуются два более специальных понятия.

Определение. *$E \subset S$ называется (SPI)-множеством (строгая пик-интерполяция), если для произвольных $g \in C(E)$ и $p \in C(S)$, $p > 0$, $|g| \leqslant p$ на E, существует функция $f \in X$, такая что $f|_E = g$ и $|f| \leqslant p$ на S.*

E называется (SP)-множеством (строгий пик), если $E \neq S$ и приведённое выше свойство выполняется для $g \equiv 1$.

Напомним две классические теоремы.

Теорема 5.1 (теорема Бишопа, см. [4], 10.3.1)**.** *$(N) \Rightarrow (PI)$.*

Теорема 5.2 (теорема Гликсберга, см. [13], глава 2, 12.5)**.** *Предположим, что $\mu \in X^{\perp} \Rightarrow \mu|_E \in X^{\perp}$. Пусть $f \in X|_E$, $p \in C(S)$, $p > 0$ и $|f| \leqslant p$ на E. Тогда существует функция $g \in X$, такая что $g|_E = f$ и $|g| \leqslant p$ на S.*

Следствие 5.3. *$(SPI) \Leftrightarrow (N)$.*

Доказательство. Теоремы Бишопа и Гликсберга доставляют трудную часть $(N) \Rightarrow (SPI)$. Поэтому пусть $E \in (SPI)$ и $f \in C(E)$. Выберем равномерно ограниченную последовательность $\{h_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$, такую что $h_k|_E \equiv f$ и $h_k \to 0$ на $S \setminus E$ при $k \to \infty$. Предположим, что $\mu \in X^{\perp}$, тогда $0 = \int_S h_k\, d\mu \to \int_E f\, d\mu$. Так как $f \in C(E)$ произвольна, то $|\mu|(E) = 0$. □

Теперь рассмотрим случай $X = C_{\Omega}(S)$, $\Omega \subset \mathbb{Z}_+^2$. Напомним, что для $\Omega = \Omega(0)$ (т.е. $X = A(S)$) все введённые определения эквивалентны (имеется много интересных результатов в этой ситуации, дальнейшие детали приведены в [4], 10.1.2). Плюригармонический случай $\Omega = \{(p,q) \in \mathbb{Z}_+^2 : pq = 0\}$ (т.е. $X = PHC(S) = \{f \in C(S) : \exists g \in C(\overline{B})$, т.ч. g плюригармонична в B, $g|_S = f)\}$ более замысловат.

Плюригармонические функции. Существует большое количество компактов $E \subset S$, таких что $E \in (I)$ для $PHC(S)$, но $E \notin (I)$ для $A(S)$ (простейший пример – это большая окружность $\mathbb{T}_\zeta = \{\lambda\zeta : \lambda \in \mathbb{T}\}$, $\zeta \in S$). Поэтому интересно отметить такой факт.

Предложение 5.4. *Следующие свойства эквивалентны.*

(1) *(SP) для $PHC(S)$,*
(2) *(N) для $PHC(S)$,*
(3) *(N) для $A(S)$.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (3). Пусть $E \in (SP)$.

Случай 1: $\sigma(K) = 0$. Определим $M_0(S) = \{\rho \in M_+(S) : \rho(S) = 1$ и $\int_S f\, d\rho = f(0)$ для всех $f \in A(B)\}$ (представляющие меры). Пусть $\mu \in A(S)^\perp$, тогда в силу теоремы Хенкина-Коула-Рэнджа (см. [4], 9.6) существует $\rho \in M_0(S)$, такая что $\mu \ll \rho$. Выберем последовательность $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset PHC(S)$, такую что $f_k = 1$ на E и $1 \geqslant |f_k| \to 0$ на $S \setminus E$. Тогда

$$\int\limits_S f_k\, d\rho = \int\limits_S f_k\, d\sigma \to 0 \quad \text{при } k \to \infty.$$

С другой стороны, $\int_S f_k\, d\rho \to \rho(E)$, откуда $\rho(E) = 0$ и $|\mu|(E) = 0$.

Случай 2: $\sigma(E) > 0$. Пусть $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ из случая 1. Тогда $f_k\sigma \to \mathbb{1}|_E\, \sigma \neq 0$ в *-слабой топологии пространства $M(S)$. Следовательно, интеграл Пуассона $P[\mathbb{1}|_E\, \sigma]$ плюригармоничен, а потому замкнутый носитель меры $\mathbb{1}|_E\, \sigma$ равен S (см. [14]), т.е. $E = S$, противоречие.

Очевидно, что (3) $\Rightarrow$ (2), а также (2) $\Rightarrow$ (1) по следствию 5.3. $\square$

Теперь мы приведём один отрицательный результат о (I)-множествах для $PHC(S)$. Именно, если $\sigma(E) > 0$, то $E \notin (I)$ (см. [15], где получены положительные результаты на простых гладких кривых). Мы дадим элементарное доказательство без правильных троек (сходный аргумент использован в [16] при изучении поликруговой алгебры); с помощью правильных троек в следующем подразделе будет получено более сильное утверждение.

Рассмотрим единичный тор $\mathbb{T}^n$ и пространство $PHC(\mathbb{T}^n) = \operatorname{span}_{C(\mathbb{T}^n)}\{z^\alpha : \alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ или $\alpha \in \mathbb{Z}_-^n\}$. Положим $F(\mathbb{Z}^n) = \{(-k_1, k_2, \dots k_n) : k_j \in \mathbb{Z}_+\}$, $G(\mathbb{Z}^n) = -F(\mathbb{Z}^n)$, $J(\mathbb{Z}^n) = \mathbb{Z}^n \setminus F(\mathbb{Z}^n)$. Определим $J(\mathbb{T}^n) = \operatorname{span}_{C(\mathbb{T}^n)}\{z^\alpha : \alpha \in J(\mathbb{Z}^n)\}$, определения пространств $F(\mathbb{T}^n)$ и $G(\mathbb{T}^n)$ аналогичны. Очевидно, что $PHC(\mathbb{T}^n) \subset J(\mathbb{T}^n)$. Отметим также включение

$$J(\mathbb{T}^n) \cdot G(\mathbb{T}^n) \subset J(\mathbb{T}^n). \tag{5.1}$$

Предложение 5.5. *Пусть $E \in (I)$ для $J(\mathbb{T}^n)$. Тогда $m_n(E) = 0$. В частности, если $E \in (I)$ для $PHC(\mathbb{T}^n)$, то $m_n(E) = 0$.*

Доказательство. Предположим, что $E \in (I)$ и $m_n(E) > 0$.

Если $g \in C(E)$ и $\|g\|_\infty \leqslant 1$, то по теореме об открытом отображении существует функция $f \in J(\mathbb{T}^n)$, такая что $f|_E = g$

и $\|f\|_{C(\mathbb{T}^n)} \leqslant C$, где $C > 0$ (иными словами, E является (I)-множеством с константой C).

Зафиксируем $\varepsilon = m_n(E)/10C > 0$. Представим $\mathbb{T}^n$ в виде объединения множеств E, K и L, где K компактно и $m_n(L) < \varepsilon$.

Выберем функцию $\varphi \in C(S)$, такую что $\varphi|_E \equiv 1$, $\varphi|_K \equiv 2\varepsilon$ и $1 \geqslant \varphi \geqslant 2\varepsilon$ на S. Найдём полином p, такой что $|p - \varphi| \leqslant \varepsilon$. Введём вспомогательную функцию $\overline{h}(z) = \overline{z}_1 z_2 \dots z_n$. Так как p – многочлен, то найдётся $m \in \mathbb{N}$, такое что $\psi = h^m p \in G(\mathbb{T}^n)$. Отметим, что $|\varphi - |\psi|| < \varepsilon$, в частности

$$\int\limits_E |\psi|\, dm_n > m_n(E)/2. \tag{5.2}$$

В силу (5.1) имеем $f\psi \in J(\mathbb{T}^n)$. С другой стороны, $hm_n \in J(\mathbb{T}^n)^\perp$, откуда $\int_S f\psi h\, dm_n = 0$, следовательно

$$\left|\int\limits_E \psi g h\, dm_n\right| = \left|\int\limits_E \psi f h\, dm_n\right| \leqslant \left|\int\limits_K\right| + \left|\int\limits_L\right| \leqslant 3\varepsilon C + 2C\varepsilon.$$

Так как $|h| = 1$ и $g \in C(E)$ – произвольная функция, то $\int_E |\psi|\, dm_n < 5C\varepsilon = m_n(E)/2$, что противоречит (5.2). $\square$

Следствие 5.6. *Пусть $E \in (I)$ для $PHC(S)$, тогда $\sigma(E) = 0$.*

Доказательство. Рассмотрим тор $T^n = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_j| = n^{-1/2}\}$ и поликруг $D^n = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_j| < n^{-1/2}\}$, тогда $T^n \subset S_n$ и $D^n \subset B_n$. Поэтому, если $f \in PHC(S_n)$, то $f|_{T^n} \in PHC(T^n)$.

Пусть $E \in (I)$ для $PHC(S_n)$ и $\sigma(E) > 0$, тогда существует унитарный оператор $U \in \mathcal{U}$, такой что $m_n(UE) > 0$. Так как пространство $PHC(S_n)$ $\mathcal{U}$-инвариантно, то $UE \in (I)$ для $PHC(S_n)$, откуда $UE \cap T^n \in (I)$ для $PHC(T^n)$, противоречие. $\square$

Теперь мы используем правильные тройки, чтобы доказать предыдущий результат для пространств, которые шире, чем $PHC(S)$.

Интерполяционные множества и правильность.

Предложение 5.7. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{Z}_+^2$ и $\Lambda = \mathbb{Z}_+^2 \setminus \Omega$. Предположим, что $\Omega \in (R)$ и $E \in (I)$ для $C_\Lambda(S)$. Тогда $\sigma(E) = 0$.*

Доказательство. Пусть E – это (I)-множество с константой C и $\sigma(E) > 0$. Выберем такую функцию $\varphi \in C(S)$, что $1 \geqslant \varphi > 0$,

$\varphi|_E \equiv 1$ и

$$\int\limits_{S\setminus E} \varphi\, d\sigma < \sigma(E)/3C.$$

Так как $(R) \Leftrightarrow (R2)$ (см. §1), найдётся такая функция $g \in C_\Omega(S)$, что $|g| \leqslant \varphi$ и $\sigma\{|g| \neq \varphi\} < \sigma(E)/2$, в частности, $\sigma\{\zeta \in E : |g(\zeta)| = 1\} > \sigma(E)/2$.

По определению интерполяционного множества с константой C имеем $f|_E \equiv g|_E$, где $f \in C_\Lambda(S)$, $||f||_{C(S)} \leqslant C$. Так как $\Omega \cap \Lambda = \varnothing$, то $\int_S f\overline{g}\, d\sigma = 0$. С другой стороны, верны оценки

$$\left|\int\limits_S f\overline{g}\, d\sigma\right| \geqslant \int\limits_E |f|^2\, d\sigma - \left|\int\limits_{S\setminus E} f\overline{g}\, d\sigma\right| \geqslant \frac{\sigma(E)}{2} - \frac{C\sigma(E)}{3C} > 0,$$

противоречие. □

Следствие 5.8. *Пусть $0 < \alpha < 1$ и $k \in \mathbb{Z}_+$. Предположим, что*

$$\{(p,q) \in \mathbb{Z}^2_+ : \alpha p \leqslant q\} \subset \Omega \subset \mathbb{Z}^2_+ \setminus \{(p,k) : \alpha p > q\}.$$

Тогда $E \in (I)$ для $C_\Omega(S) \Leftrightarrow \sigma(E) = 0$. Такая же эквивалентность верна для $\overline{\Omega} = \{(p,q) \in \mathbb{Z}^2_+ : (q,p) \in \Omega\}$.

Доказательство. Если $E \in (I)$ для $C_\Omega(S)$, то $\sigma(E) = 0$ в силу следствия 4.3 и предложения 5.7. С другой стороны, если $\mu \in C_\Omega(S)^\perp$, то $\mu \ll \sigma$ в силу одной из версий теоремы братьев Рисс (см. [11]). Иными словами, если $\sigma(E) = 0$, то $E \in (N)$ для $C_\Omega(S)$, т.е. $E \in (I)$ для $C_\Omega(S)$. □

6. Неправильность и некомпактные операторы Ганкеля

Неправильные спектры. Теоремы 2.7 и 4.2 дают достаточные условия для правильности. В настоящем подразделе мы приведём одно необходимое арифметическое условие.

Определение. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{Z}^2_+$, $k \in \mathbb{Z}$. k-кратностью спектра Ω называется множество $\mathcal{M}(\Omega,k) = \{\{(p_1,q_1),(p_2,q_2)\} : p_1+q_2-p_2-q_1 = k\}$.*

Замечание. Пусть $f \in H(p_1,q_1)$, $g \in H(p_2,q_2)$, тогда $\operatorname{spec}(f\overline{g}) \subset \{(p,q) \in \mathbb{Z}^2_+ : p-q = p_1+q_2-p_2-q_1\}$ в силу теоремы 1.1. Это объясняет данное выше определение. Отметим также, что $\mathcal{M}(\Omega,0)$ конечно тогда и только тогда, когда Ω конечно.

Чтобы получить достаточное условие, воспользуемся следующим понятием.

Определение. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{Z}_+^2$. Тогда $\Omega \in (R3)$, если для всякой $\varphi \in C(S)$, $\varphi > 0$, найдётся функция $f \in L^2_\Omega(S)$, такая что $|f| = \varphi$ σ-п.в.*

Напомним, что $(R) \Rightarrow (R3)$ (см. [1]).

Предложение 6.1. *Пусть $n \geqslant 2$ (размерность), $\Omega \subset \mathbb{Z}_+^2$ и $\Omega \in (R3)$. Тогда множество $\mathcal{M}(\Omega, k)$ бесконечно для всех $k \in \mathbb{Z}$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{M}(\Omega, k)$ конечно и $k \neq 0$, тогда

$$\max\{p_1 + q_2 + p_2 + q_1 : \{(p_1, q_1), (p_2, q_2)\} \in \mathcal{M}(\Omega, k)\} = L < \infty.$$

Зафиксируем точку $(p, q) \in \mathbb{Z}_+^2$, такую что $p-q = k$ и $p+q \geqslant L+1$. Возьмём многочлен $g \in H(p, q)$, $\|\mathrm{Re}\, g\|_\infty = 1$ ($H(p, q) \neq 0$ поскольку $n \geqslant 2$) и определим $\varphi = (3 + g + \overline{g})^{1/2}$. Тогда $\varphi \in C(S)$, $\varphi > 0$.

Так как $\Omega \in (R3)$, то существует $f \in L^2_\Omega(S)$, такая что $f\overline{f} = \varphi^2 = 3 + g + \overline{g}$ σ-п.в. В частности, $K_{pq}(f\overline{f}) = g \neq 0$. Следовательно, в силу теоремы 1.1 найдутся (r_1, t_1), $(r_2, t_2) \in \mathrm{spec}\,(f) \subset \Omega$, такие что $(p, q) = (r_1 + t_2 - j, r_2 + t_1 - j)$ для некоторого $j \in [0, J]$. Поэтому $\{(r_1, t_1), (r_2, t_2)\} \in \mathcal{M}(\Omega, k)$ и $r_1 + t_1 + r_2 + t_2 \geqslant p + q \geqslant L + 1$, противоречие. $\square$

Пример 6.2 (ср. с примером 2.8 и следствием 4.3)**.** *Для $k \in \mathbb{Z}$ положим $D(k) = \{(p, q) \in \mathbb{Z}_+^2 : p - q = k\}$. Пусть $\Lambda \subset \mathbb{Z}_+$ и $|a - b| \geqslant 2$ при всех $a, b \in \Lambda$. Тогда*

$$\bigcup_{k \in \Lambda} D(k) \notin (R).$$

Некомпактные Ω-спектральные операторы Ганкеля. (CH)-свойство играло решающую роль в §4. Напомним, что $\Omega(k) = \{(p, k) : p \in \mathbb{Z}_+\} \in (CH)$ для всех $k \in \mathbb{Z}_+$. Здесь мы даём описание всех (CH)-подмножеств луча $\Omega(k)$.

Предложение 6.3. *Пусть $k \in \mathbb{Z}_+$ и $\Omega \subset \Omega(k) \subset \mathbb{Z}_+^2$. Тогда оператор $V_{\Omega,\varphi} : C_\Omega(S) \to L^2(S)$ компактен для всех многочленов $\varphi \in C(S)$ тогда и только тогда, когда либо Ω конечно, либо $\Omega(k) \setminus \Omega$ конечно.*

Доказательство. Если $\Omega(k) \setminus \Omega$ конечно, то импликация $\Leftarrow$ является слабой версией теоремы 3.6. Случай конечного множества Ω тривиален.

Поэтому рассмотрим противоположную импликацию и предположим, что Ω бесконечно и оператор $V_{\Omega,\varphi} : C_\Omega(S) \to L^2(S)$ компактен для $\varphi(z) = z_1$. Если множество $\Omega(k) \setminus \Omega$ бесконечно, то найдётся такая последовательность $\{(p_j, k)\}_{j=0}^{\infty} \subset \Omega$, что $(p_j+1, k) \notin \Omega$ для всех $j \in \mathbb{Z}_+$. Рассмотрим RW-многочлены $R_j \in H(p_j, k)$, $j \in \mathbb{Z}_+$, т.е. $\|R_j\|_2 = 1$, $\|R_j\|_\infty \leqslant \text{const}$, $\|z_1 R_j\|_2 = \|z_1\|_2$. Тогда по теореме 1.1

$$V_{\Omega,z_1}[R_j] = z_1 R_j - K_\Omega[z_1 R_j] = z_1 R_j \not\to 0 \quad \text{в} \quad L^2(S) \quad \text{при } j \to \infty.$$

С другой стороны, $R_j \to 0$ в слабой топологии пространства $L^2(S)$ и $\|R_j\|_\infty \leqslant \text{const}$, откуда (напомним, что оператор V_{Ω,z_1} компактен) $V_{\Omega,z_1}[R_j] \to 0$ в $L^2(S)$. Это противоречие показывает, что множество $\Omega(k) \setminus \Omega$ конечно. □

Следовательно, мы имеем полное описание (CH)-спектров в размерности 1.

Следствие 6.4. *Положим* $\Lambda_1 = \mathbb{Z}$, $\Lambda_2 = \mathbb{Z}_+$, $\Lambda_3 = \Lambda_1 \setminus \Lambda_2$, $\Lambda_4 = \varnothing$. *Пусть* $\Lambda \subset \mathbb{Z}$, *тогда оператор* $V_{\Lambda,\varphi} : C_\Lambda(\mathbb{T}) \to L^2(\mathbb{T})$ *компактен для всех многочленов* $\varphi \in C(\mathbb{T})$ *тогда и только тогда, когда существует конечное множество* E *и* $j \in \{1, 2, 3, 4\}$, *такие что* $(\Lambda \setminus \Lambda_j) \cup (\Lambda_j \setminus \Lambda) = E$.

Ситуация на торе даже ещё проще.

Предложение 6.5. *Пусть* $n \geqslant 2$ *и* $\Lambda \subset \mathbb{Z}^n$. *Тогда оператор* $V_{\Lambda,\varphi} : C_\Lambda(\mathbb{T}^n) \to L^2(\mathbb{T}^n)$ *компактен для всех многочленов* $\varphi \in C(\mathbb{T}^n)$ *тогда и только тогда, когда либо* Λ *конечно, либо* $\mathbb{Z}^n \setminus \Lambda$ *конечно.*

Доказательство. Предположим, что Λ бесконечно. Определим $e^j \in \mathbb{Z}^n$ равенствами $\left(e^j\right)_k = \delta_{jk}$, $1 \leqslant j, k \leqslant n$. Так как оператор V_{Λ,z_j} $(V_{\Lambda,\overline{z}_j})$ компактен, то множество $\{\alpha \in \mathbb{Z}^n : \alpha \in \Lambda,\ \alpha + e^j \notin \Lambda\}$ $(\{\alpha \in \mathbb{Z}^n : \alpha \in \Lambda,\ \alpha - e^j \notin \Lambda\})$ конечно для всех $1 \leqslant j \leqslant n$. Поэтому множество $\{\alpha \in \mathbb{Z}^n : \alpha \notin \mathbb{Z}^n\}$ конечно. □

Приведённое выше рассуждение даёт также следующие явные примеры.

Предложение 6.6. *1) Пусть* $\Lambda \subset \mathbb{Z}_+$. *Тогда* $\bigcup_{k\in\Lambda} \Omega(k) \in (CH) \Leftrightarrow$ Λ *конечно или* $\mathbb{Z}_+ \setminus \Lambda$ *конечно. 2) Пусть* $\Gamma \subset \mathbb{Z}$. *Тогда* $\bigcup_{m\in\Gamma} D(m) \in (CH) \Leftrightarrow \Gamma = \varnothing$ *или* $\Gamma = \mathbb{Z}$.

Следствие 6.7. *Пусть* $\Omega = \bigcup_{k\in\Lambda}\Omega(k)$ *и* $K_\Omega(z,\zeta)$ *– воспроизводящее ядро для* $L^2_\Omega(B)$. *Если* Λ *бесконечно, то оценка* $|K_\Omega(z,\zeta)| \leqslant \mathrm{const}\,|1-\langle z,\zeta\rangle|^{-n-\varepsilon}$ *не имеет места при всех* $\varepsilon < 1/2$ *(ср. с теоремой 3.4).*

Благодарности. Некоторые результаты настоящей работы содержатся в диссертации автора. Автор глубоко признателен своему научному руководителю А. Б. Александрову за предложенные задачи и многие полезные обсуждения. Автор благодарен Э. Амару за поддержку и руководство, а также хотел бы поблагодарить П. Ахерна и Дж. Бруну за полезные комментарии.

Литература

1. А. Б. Александров, *Внутренние функции на компактных пространствах.* — Функц. анал. и его прил. **18**, № 2 (1984), 1–13.
2. A. B. Aleksandrov, *Inner functions: results, methods, problems.* — Proc. Internat. Congress Math., Berkeley, 1986. 699–707.
3. А. Б. Александров, *Ортогональные базисы из внутренних функций.* — Докл. АН СССР **306**, № 2 (1989), 265–268.
4. У. Рудин, *Теория функций в единичном шаре из* $\mathbb{C}^n$. М., Мир, 1984.
5. J. Ryll, P. Wojtaszczyk, *On homogeneous polynomials on a complex ball.* — Trans. Amer. Math. Soc. **276** (1983), 107–116.
6. Е. С. Дубцов, *Некоторые вопросы гармонического анализа на комплексной сфере.* — Вестник СПбГУ, сер. мат. **1995**, № 1, 15–21.
7. А. Б. Александров, *Теория функций в шаре.* — В кн.: Итоги науки и техники (ВИНИТИ) **8**. М., 1985, с. 115–190.
8. W. Rudin, *New constructions of functions holomorphic in the unit ball of* $\mathbb{C}^n$. Amer. Math. Soc. (CBMS Regional Conf. Ser. in Math. **63**), Providence, 1986.
9. J. Bourgain, *Applications of the spaces of homogeneous polynomials to some problems on the ball algebra.* — Proc. Amer. Math. Soc. **93** (1985), 277–283.
10. А. Б. Александров, *Собственные голоморфные отображения из шара в полидиск.* — Докл. АН СССР **286**, № 1 (1986), 11–15.
11. R. J. M. Brummelhuis, *An F. and M. Riesz theorem for bounded symmetric domains.* — Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **37** no. 2 (1987), 139–150.
12. Г. Сегё, *Ортогональные многочлены.* М., Мир, 1962.
13. Т. Гамелин, *Равномерные алгебры.* М., Мир, 1973.
14. F. Forelli, *Measures whose Poisson integrals are pluriharmonic.* — Illinois J. Math. **18** (1974), 373–388.
15. B. Berndtsson, J. Bruna, *Traces of pluriharmonic functions on curves.* — Ark. Mat. **28** (1990), 221–230.
16. У. Рудин, *Теория функций в поликруге.* М., Мир, 1974.

Doubtsov E. S. Regular unitarily invariant spaces on the complex sphere.

Let K be a compact space, X a closed subspace of $C(K)$, and μ a positive measure on K. The triple (X, K, μ) is said to be regular if for any positive function $\varphi \in C(K)$ and for any $\varepsilon > 0$ there exists a function $f \in X$ such that $|f| \le \varphi$ on K and $\mu\{t \in K : |f(t)| \ne \varphi(t)\} < \varepsilon$.

The case when K is the unit sphere in $\mathbb{C}^n$ and the subspace X is invariant with respect to the unitary group is investigated. Sufficient spectral conditions and a necessary condition for regularity are obtained. Connections with compactness of certain Hankel operators and applications to interpolation problems are presented.

Санкт-Петербургский
государственный университет
es@dub.pdmi.ras.ru

Поступило 9 апреля 1998 г.