Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 252, 1998 г.

В. Л. Олейник

МЕРЫ КАРЛЕСОНА И РАВНОМЕРНО СОВЕРШЕННЫЕ МНОЖЕСТВА

Введение

Пусть G – область на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $G \neq \mathbb{C}$, m – плоская мера Лебега, μ – неотрицательная локально-конечная борелевская мера на G. При $p > 0$ обозначим через $L^p(G,\mu)$ пространство измеримых функций на G таких, что

$$\|f\|_{p,\mu} := \Big(\int\limits_G |f(z)|^p d\mu(z)\Big)^{1/p} < \infty.$$

Для $z \in G$, $r > 0$ и $\beta > -1$ положим $D(z,r) := \{\zeta \in \mathbb{C} : |z-\zeta| < r\}$, $d(z) := \operatorname{dist}\,(z, \partial G)$, $dm_\beta(z) := d(z)^\beta dm(z)$, $L^{p,\beta}(G) := L^p(G, m_\beta)$, $L^p(G) := L^{p,0}(G) = L^p(G,m)$ и $\|f\|_p := \|f\|_{p,m}$.

Весовое пространство Бергмана однозначных регулярных в области G функций из $L^{p,\beta}(G)$ обозначим через $L_a^{p,\beta}(G)$.

При дальнейшей характеристике мер μ нам удобно будет рассматривать следующие объекты: $D(z) := D(z, d(z)/2)$ – круг с центром в точке $z \in G$ и радиусом равным половине расстояния от z до границы ∂G, $\tilde{\mu}(z) := \mu(D(z))$ - значение меры μ на этих кругах, а также функцию сравнения $\rho_\beta(z) := \tilde{\mu}(z)/\tilde{m}_\beta(z)$ меры μ с весовой мерой m_β.

Поскольку неотрицательная функция $\rho_\beta(z)$ измерима, то для произвольных вещественных δ и $\beta > -1$ мы можем определить величину (конечную или бесконечную)

$\|\mu\|_{\delta,\beta} := \|\rho_\beta\|_{1/\delta, m_\beta}$, если $\delta > 0$ и

$\|\mu\|_{\delta,\beta} := \sup_{z\in G} \rho_\beta(z)\tilde{m}_\beta(z)^\delta$, если $\delta \le 0$.

Всюду в дальнейшем полагаем, что $p > 0$, $q > 0$ и $\delta = \delta(p,q) := 1 - q/p \leqslant 1$.

Пусть $\beta > -1$. Рассмотрим оператор вложения

$$I_\mu = I_\mu(G,p,q,\beta) : L_a^{p,\beta}(G) \subset L^q(G,\mu).$$

Как обычно, положим $\|I_\mu\| = \sup(\|f\|_{q,\mu}/\|f\|_{p,m_\beta})$, где sup распространяется на все $f \not\equiv 0$, $f \in L_a^{p,\beta}$. Меры, для которых конечна величина $\|I_\mu\|$, называются мерами Карлесона.

Мы будем говорить, что область G принадлежит классу $A(p,q,\beta)$, если существует постоянная $C = C(G,p,q,\beta)$ такая, что для всякой меры μ справедливо неравенство:

$$\|\mu\|_{\delta,\beta} \leqslant C\|I_\mu\|^q. \tag{1}$$

Положим, далее,

$$A(p,q) = \bigcap_{\beta>-1} A(p,q,\beta), \quad A(p) = \bigcap_{q>0} A(p,q) \quad \text{и} \quad A = \bigcap_{p>0} A(p).$$

Заметим, что противоположная оценка

$$\|I_\mu\|^q \leqslant C_1\|\mu\|_{\delta,\beta}$$

справедлива для всех $\beta > -1$ в произвольной области $G \neq \mathbb{C}$ с некоторой постоянной $C_1 = C_1(G,p,q,\beta) < \infty$ (см. [14, 18]). Последнее означает, что конечность величины $\|\mu\|_{\delta,\beta}$ обеспечивает ограниченность соответствующего оператора вложения I_μ. Таким образом, если $G \in A(p,q,\beta)$, то условия $\|\mu\|_{\delta,\beta} < \infty$ и $\|I_\mu\| < \infty$ эквивалентны. С другой стороны, поскольку единичный круг $\mathbb{D}$ принадлежит классу A ([17, 14, 16, 12, 10]), то в классе A собраны все такие области G, для которых процедура описания мер Карлесона в весовом пространстве Бергмана $L_a^{p,\beta}(G)$ совпадает с их описанием для единичного круга $\mathbb{D}$. Другие варианты дает пример ограниченной области, удовлетворяющей обобщенному внешнему условию конуса. Такая область принадлежит классу $A(p,q,\beta)$ при $\beta > \beta_0$, где $-1 \leqslant \beta_0 \leqslant 0$ определяется свойствами области ([18, 10, 11]). Простейший пример неограниченной области из класса A доставляет нам полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$. Однако область G с ограниченным дополнением или с изолированными граничными точками не принадлежит ни одному из классов $A(p,q,\beta)$ [11].

Другим общим свойством областей из класса A является равномерная совершенность их дополнений. Напомним определение равномерной совершенности замкнутого множества [19]. Это свойство играет важную роль в различных вопросах анализа ([1, 7, 8, 13, 20]). Как отмечено выше, нас интересуют лишь области с неограниченным дополнением.

Неограниченное замкнутое множество $E \in \mathbb{C}$ называется равномерно совершенным, если существует постоянная $c > 0$ такая, что для всех $\zeta \in E$ и всех $r \in (0, \infty)$

$$E \cap \{z : cr \leqslant |z - \zeta| \leqslant r\} \neq \varnothing.$$

В частности множество E не содержит изолированных точек. В общем случае множество E называют равномерно совершенным, если модули двусвязных областей разделяющих E ограничены сверху [20]. Свойство области иметь равномерно совершенное дополнение конформно инвариантно (ср. [8], Remark 4.7). Кроме того, свойство равномерной совершенности инвариантно относительно дробно-линейных преобразований, при которых образ E остается неограниченным [19]. В той же работе эквивалентное определение формулируется в терминах логарифмической емкости, откуда непосредственно следует, что для равномерно совершенного множества E каждая компонента связности дополнения $\mathbb{C} \setminus E$ является регулярной для задачи Дирихле.

Следующая теорема дает необходимое условие принадлежности области G классу A.

Теорема 1. *Пусть область G принадлежит классу $A(p, q, 0)$, тогда дополнение $E = \mathbb{C} \setminus G$ - неограниченное замкнутое равномерно совершенное множество.*

Как следствие теоремы 1 получаем, что для всякой области G из классов $A(p, q)$, $A(p)$ или A ее дополнение $\mathbb{C} \setminus G$ - равномерно совершенное множество.

Вопрос о принадлежности конечносвязной области G классу A решается просто и полностью.

Теорема 2. *Конечносвязная область $G \subset \mathbb{C}$, $G \neq \mathbb{C}$ принадлежит классу A тогда и только тогда, когда ее дополнение $E = \mathbb{C} \setminus G$ - неограниченно и не содержит изолированных точек.*

Теорема 2 естественным образом переносится на поликруговые области в $\mathbb{C}^n$ (см. [11]).

Наряду с вопросом об ограниченности оператора вложения I_μ возникает вопрос о его компактности (ср. [11]). Наиболее простой случай соответствует соотношению $q < p$, которое гарантирует компактность оператора I_μ при условии его ограниченности. Оценка поперечников компактных множеств аналитических функций дана в работе [15]. Принадлежность оператора вложения I_μ классам Шаттена-фон Неймана ($p = q = 2$) обсуждается в работах ([9, 11]).

Основные результаты статьи получены автором совместно с В. Н. Кудашовым (см. [9–11]). Автор выражает искреннюю благодарность П. П. Каргаеву, M. Vuorinen и Zheng-Xu He за полезные обсуждения. Данная работа частично поддержана грантом Международной Соросовской Программы Образования в Области Точных Наук (ISSEP, N d97-1200).

1. Доказательство теоремы 1. Нам понадобится следующая

Лемма 1. *Пусть $p > 0$, $s \geqslant 4$, $r > 0$, $K = \{z : r < |z| < sr\}$ – кольцо и $r_s := r\sqrt{s}$ – внутренняя точка кольца K. Тогда существует положительная функция $\varepsilon_p(s)$ ограниченная при $s \geqslant 4$ и стремящаяся к нулю при $s \to +\infty$ такая, что для всякой аналитической функции $f \in L^p_a(K)$ выполнена следующая оценка*

$$r_s^2 |f(r_s)|^p \leqslant (1 + \varepsilon_p(s))(\ln s)^{-1} \|f\|_p^p. \tag{2}$$

Доказательство. Докажем неравенство (2) при $r = 1$ и $r_s = \sqrt{s}$, тогда общий случай получается преобразованием подобия. Оценим коэффициент c_k в ряде Лорана функции $f(z)$ аналитической в кольце K, $k \in \mathbb{Z}$. Для всех $t \in (1, s)$ имеем

$$|c_k| = \Big| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=t} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{k+1}} d\zeta \Big| \leqslant \frac{1}{2\pi t^k} \int\limits_0^{2\pi} |f(te^{i\theta})| d\theta \leqslant \frac{1}{t^k} \Big(\int\limits_0^{2\pi} |f(te^{i\theta})|^p d\theta \Big)^{1/p}.$$

Последнее неравенство при $p > 1$ является следствием неравенства Гёльдера и неравенства $(1 + a)^p \leqslant 1 + a^p$, $a > 0$ при $0 < p \leqslant 1$.

Далее интегрирование по t дает

$$|c_k|^p \int\limits_1^s t^{pk+1} dt \leqslant \int\limits_1^s t dt \int\limits_0^{2\pi} |f(te^{i\theta})|^p d\theta = \|f\|_p^p.$$

Если $2/p$ не является целым числом, то для всех целых k имеем

$$\int\limits_1^s t^{pk+1} dt = (pk + 2)^{-1}(s^{pk+2} - 1). \tag{3}$$

С другой стороны, если $k_0 = k_0(p) := 2/p$ - целое, то при всех $k \neq -k_0$ мы имеем равенство (3), а при $k = -k_0$ правая часть (3) равна $\ln s$. С учетом условия $s \geqslant 4$ для отрицательных показателей $pk+2$ правая часть формулы (3) оценивается снизу через $(1-4^{-\alpha})|pk+2|^{-1}$, а при $pk+2>0$ через $(1-4^{-\beta})(pk+2)^{-1}s^{pk+2}$. Здесь $\alpha = \alpha(p) := \min\{|pk+2| : pk+2<0, k \in \mathbb{Z}\} > 0$ и $\beta = \beta(p) := \min\{pk+2 : pk+2>0, k \in \mathbb{Z}\} > 0$. Заметим, что в зависимости от знака числа $pk+2$ мы имеем соответствующие представления $pk+2 = -\alpha - pm$ и $pk+2 = \beta + pm$, $m \in \mathbb{N}$. Кроме того $\alpha + \beta = p$, если $2/p$ не является целым числом. В частности при $p > 2$ получаем $\beta = 2$ и $\alpha = p-2$, а если $2/p$ - целое, то $\alpha = \beta = p$. В последнем случае возникает слагаемое с логарифмом. Это слагаемое играет главную роль в доказываемой оценке (2). Поскольку окончательные неравенства для c_k зависят от знака показателя $pk+2$, то при оценке величины

$$s^{1/p}|f(\sqrt{s})| \leqslant \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k| s^{(pk+2)/(2p)}$$

нам необходимо рассмотреть случаи $pk+2<0$ и $pk+2>0$.

Итак, пусть $pk+2 = -pm-\alpha$, $m \in \mathbb{N}$ и $a_- = a_-(p) := (1-4^{-\alpha})^{-1/p}$, тогда

$$\sum_{pk+2<0} |c_k| s^{(pk+2)/(2p)} \leqslant a_- \Big(\sum_{m=0}^{\infty} (pm+\alpha)^{1/p} s^{-(pm+\alpha)/(2p)} \Big) \|f\|_p$$

$$\leqslant a_- p^{1/p} \Big(\sum_{m=o}^{\infty} (m+1)^{1/p} 2^{-m} \Big) s^{-\alpha/(2p)} \|f\|_p = c_-(p) s^{-\alpha/(2p)} \|f\|_p. \quad (4)$$

В случае $pk+2 = pm+\beta$, $m \in \mathbb{N}$ оценка проводится аналогично, и мы получаем следующее неравенство

$$\sum_{pk+2>0} |c_k| s^{(pk+2)/(2p)} \leqslant c_+(p) s^{-\beta/(2p)} \|f\|_p. \quad (5)$$

Здесь явное выражение для постоянной $c_+(p)$ получается из выражения для $c_-(p)$ простой заменой числа α на число β.

И, наконец, если $-pk_0+2=0$ для некоторого $k_0 \in \mathbb{N}$, то возникает слагаемое

$$|c_{-k_0}| s^{(-pk_0+2)/(2p)} = |c_{-k_0}| \leqslant (\ln s)^{-1/p} \|f\|_p. \quad (6)$$

Поскольку степенная функция s^γ, $\gamma > 0$ стремится к бесконечности при $s \to \infty$ быстрее, чем логарифмическая функция $\ln s$, то объединяя формулы (4)-(6) мы приходим к требуемой оценке (2). Лемма 1 доказана.

Для завершения доказательства теоремы 1 предположим, что дополнение $E = \mathbb{C} \setminus G$ области G не является равномерно совершенным множеством. Тогда существуют последовательности положительных чисел r_j и R_j, а также точек $\zeta_j \in E$ такие, что $4 \leqslant s_j := R_j/r_j \to \infty$ при $j \to \infty$. Кроме того

$$K_j := \{z : r_j < |z - \zeta_j| < R_j\} \subset G.$$

Положим $\rho_j = \sqrt{R_j r_j}$ и $z_j = \zeta_j + \rho_j \in G$. Для произвольных $p > 0$ и $q > 0$ рассмотрим последовательность мер Дирака μ_j сосредоточенных в точках z_j и с массами равными $\mu_j(z_j) = \rho_j^{2q/p}(\ln s_j)^{q/p}$. Заметим, что $\rho_j \geqslant \operatorname{dist}(z_j, E) = d(z_j) \geqslant \rho_j - r_j = \rho_j(1 - 1/\sqrt{s_j}) \geqslant \rho_j/2$. Поэтому $\|\mu_j\|_{\delta,0} \asymp (\ln s_j)^{q/p} \to \infty$ при $j \to \infty$. Оценим теперь величины $\|I_{\mu_j}\|$. В силу леммы 1 для достаточно больших j и всех $f \in L^p_a(G)$ мы имеем

$$\|f\|^p_{q,\mu_j} = |f(z_j)|^p \rho_j^2 \ln s_j \leqslant 2 \int\limits_{K_j} |f(z)|^p \, dm(z) \leqslant 2\|f\|^p_p.$$

Следовательно $\|I_{\mu_j}\| \leqslant 2^{1/p}$ для всех j. Последнее означает, что для любой постоянной C существует мера μ такая, что неравенство (1) нарушается. Т.о. область G, дополнение которой не является равномерно совершенным множеством, не может принадлежать классу $A(p, q, 0)$, $p > 0$, $q > 0$. Теорема 1 доказана.

2. Доказательство теоремы 2. Нам понадобятся некоторые факты из теории конформных преобразований. Первое утверждение нижеследующей леммы является часто употребляемой формулировкой 1/4 - теоремы Кёбе, а второе - теорема искажения [2].

Лемма 2. *Пусть $a \in (0,1)$ и $b(a) = (1-a)(1+a)^{-3}$. Пусть область $G \neq \mathbb{C}$ и $F(z)$ - регулярная и однолистная функция на G. Положим $G_1 = F(G)$ и $d(F(z)) = \operatorname{dist}(F(z), \partial G_1)$. Тогда для любых точек $z \in G$ и $w \in D(z, ad(z))$ имеем*

$$1) \quad \frac{d(F(z))}{4d(z)} \leqslant |F'(z)| \leqslant 4\frac{d(F(z))}{d(z)},$$

$$2) \qquad |F'(w)| \geqslant b(a)\frac{d(F(z))}{4d(z)}.$$

Доказательство леммы 2. Докажем вторую часть леммы. Для фиксированного $z \in G$ положим $w = z + d(z)t$ и

$$f(t) := \frac{F(z + d(z)t) - F(z)}{d(z)F'(z)}.$$

При этом $f'(t) = F'(z + d(z)t)/F'(z)$. Тогда f будет регулярной и однолистной функцией в единичном круге $\mathbb{D} = \{t : |t| < 1\}$ с условиями нормировки $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$. По теореме искажения [2, стр. 52] для всех $t \in \mathbb{D}$ мы имеем $b(|t|) \leqslant |f'(t)|$ и, если дополнительно $|t| \leqslant a$, то $b(a) \leqslant b(|t|) \leqslant |f'(t)|$. В терминах F и w последнее соотношение принимает вид $b(a)|F'(z)| \leqslant |F'(z + d(z)t)| = |F'(w)|$. Таким образом, используя утверждение 1), получим утверждение 2). Лемма 2 доказана.

Далее существенную роль играет специальный класс конформных преобразований. Из всех регулярных и однолистных функций F на некоторой области G рассмотрим те, для которых функция $(F')^a$ является регулярной в G для всех вещественных показателей a, $a \in \mathbb{R}$. Множество таких функций обозначим через $U(G)$. Ясно, что если отображение $F \in U(G)$, то обратное отображение $F^{-1} \in U(F(G))$. Следующая лемма является следствием теоремы о монодромии (ср. [3, Lemma 1.1.6]).

Лемма 3. *Пусть G - конечносвязная область на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, граница которой неограничена и состоит из континуумов. Тогда существует функция $F(z)$ из класса $U(G)$ такая, что образ $G_1 = F(G)$ - ограниченная область и каждая компонента границы ∂G_1 является замкнутой аналитической кривой Жордана.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что если область G неограничена и K ее неограниченный граничный континуум, то по теореме Римана для любой точки $z_0 \in G$ существует конформное отображение F_0 односвязной области $K^c = \overline{\mathbb{C}} \setminus K$ на единичный круг $\mathbb{D}$ такое, что $F_0(z_0) = 0$, $F'(z_0) = 1$. Для любого вещественного числа $a \in \mathbb{R}$ функция $(F_0')^a$ продолжима по любому пути в односвязной области K^c и, следовательно, $F \in U(K^c) \subset U(G)$.

Далее считаем, что область $G = \mathbb{D} \setminus \bigcup_{j=1}^{n} K_j$ – открытый единичный круг без конечного числа непересекающихся континуумов K_j. По теореме Римана существует конформное отображение

F_1 односвязной области $\overline{\mathbb{C}} \setminus K_1$ на внешность единичного круга $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ такое, что $F_1(\infty) = \infty$. Аналогично каждое следующее отображение F_j, выбираемое нами, является комформным отображением односвязной области $\overline{\mathbb{C}} \setminus F_{j-1} \circ F_{j-2}\ circ \cdots \circ F_1(K_j)$ на внешность единичного круга такое, что $F_j(\infty) = \infty$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Построенная функция $F = F_n \circ F_{n-1} \circ \cdots \circ F_1$ является регулярной и однолистной функцией на области G. Все компоненты границы $\partial F(G)$ являются аналитическими образами единичной окружности. В силу теоремы о монодромии функции $(F_j')^a$ суть аналитические функции на своей односвязной области определения для всех $a \in \mathbb{R}$. Следовательно, $(F')^a$ - аналитическая функция на области G при всех вещественных a. Лемма 3 доказана.

По поводу леммы 3 сделаем следующие замечания. Известно, что всякая область со счетным числом компонент границы конформно гомеоморфна круговой области, т.е. области, все связные компоненты границы которой являются окружностями и точками ([5, 6]). Для конечносвязных областей это утверждение содержится в монографии Г. М. Голузина [2]. Однако голоморфность произвольной степени производной соответствующего отображения при этом не обсуждается.

В действительности относительно классов $U(G)$ имеют место следующие утверждения [4]. Причем второе утверждение является следствием первого и результатов работы [5].

Лемма 4. 1. *Для произвольной регулярной и однолистной функции F на некоторой области $G \subset \mathbb{C}$ существует дробно-линейное преобразование g такое, что суперпозиция $g \circ F$ принадлежит классу $U(G)$.*

2. *Для произвольной области $G \subset \mathbb{C}$ со счетным числом компонент границы существует отображение $F \in U(G)$ такое, что область $F(G)$ будет круговой областью.*

Обратимся к доказательству теоремы 2. Проследим за тем, что происходит с мерами и пространствами при конформных преобразованиях областей. Пусть $F \in U(G)$ и $G_1 = F(G)$. Тогда для всех $p > 0$ и $\beta > -1$ пространства $L^{p,\beta}(G)$ и $L_a^{p,\beta}(G)$ изоморфны соответствующим пространствам на G_1. Построим линейное ограниченное и ограниченно обратимое отображение

$T_F : L^{p,\beta}(G_1) \to L^{p,\beta}(G)$. Пусть $g(w) \in L^{p,\beta}(G_1)$, $w = F(z)$. Тогда

$$\|g\|^p_{p,m_\beta} = \int\limits_{G_1} |g(w)|^p d(w)^\beta dm(w) = \int\limits_G |g(F(z))|^p d(F(z))^\beta |F'(z)|^2 dm(z).$$

В силу леммы 1(1) имеем

$$d(F(z))^\beta \geqslant 4^{-|\beta|}|F'(z)|^\beta d(z)^\beta.$$

Окончательно приходим к неравенству

$$\|g\|^p_{p,m_\beta} \geqslant 4^{-|\beta|} \int\limits_G |g(F(z))F'(z)^{(\beta+2)/p}|^p d(z)^\beta dm(z) = 4^{-|\beta|}\|f\|^p_{p,m_\beta}. \tag{7}$$

Поскольку $F \in U(G)$, то преобразование $f(z) = (T_F g)(z) := F'(z)^{(\beta+2)/p}(g \circ F)(z)$ доставляет нам искомый изоморфизм. Функция $f(z)$ – регулярна в области G, если $g(w)$ – регулярная функция в области G_1, т.е. преобразование T_F осуществляет также изоморфизм и подпространств аналитических функций. Кроме того $\|T_F\| \leqslant 4^{|\beta|/p}$, $T_F^{-1} = T_{F^{-1}}$ и $\|T_F^{-1}\| \leqslant 4^{|\beta|/p}$.

Пусть, далее, на области G задана мера μ, $F \in U(G)$, $G_1 = F(G)$ и $q > 0$. Определим на области G_1 меру μ_1 так, чтобы $\|T_F g\|_{q,\mu} = \|g\|_{q,\mu_1}$ для всех измеримых функций g на G_1 с условием $T_f g \in L^q(G,\mu)$. Как обычно имеем

$$\mu_1(e) = \int\limits_{F^{-1}(e)} |F'(z)|^{(\beta+2)q/p} d\mu(z)$$

для всякого борелевского множества $e \subset G_1$. Учитывая теперь оценку (7) получаем

$$\|I_{\mu_1}(G_1,p,q,\beta)\| \leqslant 4^{|\beta|/p}\|I_\mu(G,p,q,\beta)\|, \tag{8}$$

т.е. операторы вложения I_μ и I_{μ_1} ограничены одновременно.

В рамках вышесказанного нам осталось сравнить величины $\|\mu\|$ и $\|\mu_1\|$. Прежде всего заметим, что если в определении величины $\|\mu\|_{\delta,\beta}$ функцию $\tilde\mu(z)$ заменить на $\mu(D(z, ad(z)))$, то для любого числа $a \in (0,1)$ мы получаем эквивалентную величину (ср. [18]). Из леммы 1(1) следует, что для любого $z \in G$ имеет место включение $F^{-1}(D(F(z))) \supset D(z, d(z)/32)$. Пользуясь определением меры μ_1 и леммой 1(2), получаем ($\gamma = (\beta+2)q/p$, $w = F(z) \in G_1$)

$$\tilde{\mu}_1(w) = \mu_1(D(F(z))) = \int\limits_{F^{-1}(D(F(z)))} |F'(\zeta)|^{\gamma}\, d\mu(\zeta)$$

$$\geqslant 4^{-1} b(1/32)\mu(D(z, d(z)/32))(d(w)/d(z))^{\gamma}.$$

Кроме того функция $\tilde{m}_{\beta}(z)$ оценивается с двух сторон равномерно по $z \in G$ через функцию $d(z)^{\beta+2}$. Далее, простые вычисления показывают, что существует конечная постоянная $c_0 = c_0(p,q,\beta) > 0$ такая, что при $\delta = 1 - q/p$ справедлива оценка $\|\mu_1\|_{\delta,\beta} \geqslant c_0\|\mu\|_{\delta,\beta}$. Если предположить, что $F(G) \in A(p,q,\beta)$, то объединяя последнее неравенство с неравенствами для операторов вложения (1) и (8), получим

$$4^{|\beta| q/p}\|I_{\mu}(G,p,q,\beta)\|^q \geqslant \|I_{\mu_1}\|^q \geqslant C^{-1}\|\mu_1\|_{\delta,\beta} \geqslant C^{-1}c_0\|\mu\|_{\delta,\beta}.$$

Откуда следует, что область G также принадлежит классу $A(p,q,\beta)$. Нами доказана

Лемма 5. *Пусть область $G \neq \mathbb{C}$, $F \in U(G)$ и $\beta > -1$. Тогда, если $F(G) \in A(p,q,\beta)$, то и $G \in A(p,q,\beta)$.*

Теперь мы в состоянии завершить доказательство теоремы 2. Пусть $G \in A(p,q,\beta)$ тогда, как уже отмечалось выше, $E = \overline{\mathbb{C}} \setminus G$ – неограниченное замкнутое множество не содержащее изолированных точек. С другой стороны пусть G – конечносвязная область с неограниченным дополнением без изолированных точек границы. Тогда в силу леммы 2 существует функция $F \in U(G)$ такая, что все компоненты границы $\partial F(G)$ (а их конечное число) суть замкнутые аналитические кривые Жордана и образ $F(G)$ – ограниченное множество. Как доказано в работе [10] область $F(G) \in A$. Следовательно, по лемме 5, область $G \in A$. Теорема 2 доказана.

Литература

1. A. F. Beardon, Ch. Pommerenke, *The Poincaré metric of plane domains.* J. London Math. Soc., **18** (1978), 475–483.
2. Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного.* Наука, 1966.

3. H. Grunsky, *Lectures on theory of functions in multiply connected domains.* Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht, 1978.
4. Z. X. He, *Private communication.*
5. Z. X. He, O. Schramm, *Fixed points, Koebe uniformization and circle packings.* Ann. of Math., **137** (1993), 360–406.
6. Z. X. He, O. Schramm, *Koebe uniformization for "almost circle domains"*. Amer. J. Math., **117** (1995), 653–667.
7. A. Hinkkanen, *Julia sets of rational functions are uniformly perfect.* Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., **113** (1993), 543–559.
8. P. Järvi, M. Vuorinen, *Uniformly perfect sets and quasiregular mappings.* J. London Math. Soc. (2), **54** (1996), 515–529.
9. В. Н. Кудашов, *Теоремы вложения пространств Бергмана в пространства Лебега для областей с негладкой границей.* магистерская диссертация, Санкт-Петербургский государственный университет, январь 1995.
10. V. N. Kudashov, V. L. Oleinik, *An embedding theorem of Bergman space into Lebesgue space.* University of Helsinki, Reports of the Department of Mathematics, Preprint **42** (1993), 1–9.
11. В. Н. Кудашов, В. Л. Олейник, *Теоремы вложения пространств Бергмана в пространства Лебега для областей с негладкой границей.* Функц. анализ и его прил. **30** (1996), 67–70.
12. D. Luecking, *Multipliers of Bergman spaces into Lebesgue spaces.* Proc. Edinburgh Math. Soc., **29** (1986), 125–131.
13. R. Mañé, L. F. da Rocha, *Julia sets are uniformly perfect.* Proc. Amer. Math. Soc., **116** (1992), 251–257.
14. В. Л. Олейник, *Теоремы вложения для весовых классов гармонических и аналитических функций.* Зап. научн. сем. ЛОМИ, **47** (1974), 120–137.
15. В. Л. Олейник, *Оценки поперечников компактных множеств аналитических функций в L^p с весом.* Вестник ЛГУ, сер.мат.мех., **7** (1975), 47–51.
16. В. Л. Олейник, *Одна теорема вложения для классов аналитических функций.* Проблемы математической физики вып. **11** (1985), 164–167.
17. В. Л. Олейник, Б. С. Павлов, *Теоремы вложения для весовых классов гармонических и аналитических функций.* Зап. научн. сем. ЛОМИ, **22** (1971), 94–102.
18. V. L. Oleinik, M. Vuorinen, *Embedding theorems for Bergman spaces in quasiconformal balls.* Manuscripta Mathem., **72** (1991), 181–203.
19. Ch. Pommerenke, *Uniformly perfect sets and the Poincaré metric.* Arch. Math., **32** (1979) 192–199.
20. Ch. Pommerenke, *On uniformly perfect sets and Fuchsian groups.* Analysis **4** (1984) 299–321.

Oleinik V. L. Carleson measures and uniformly perfect sets.

We show that the description of Carleson measures on the Bergman spase of analytic functions on a finitely connected domain G with the power weight is the same one as in the unit disk iff the complement

$\overline{\mathbb{C}} \setminus G$ be an unbounded set without isolated points. In general case the complement of such domain G have to be a uniformly perfect set.

Санкт-Петербургский
государственный университет
Vladimir.Oleinik@pobox.spbu.ru

Поступило 10 марта 1998 г.