Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 255, 1998 г.

**Е. Л. Пацевич**

# УСЛОВИЯ ИНЪЕКТИВНОСТИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ОБЛАСТЕЙ. I

**Введение.** В 1975 году в работе [1] Ф. Г. Авхадиев с помощью метода локально гомеоморфного продолжения, восходящего к Альфорсу и Вейлю [2], получил одно достаточно общее условие инъективности для непрерывно-дифференцируемых отображений $f(z)$ в круговой плоской области. Этот результат, который мы приведем ниже, затем практически без изменений вошел в монографию ([3], с. 96) двадцать лет спустя. Условие инъективности, фигурирующее в этом утверждении, которое можно назвать $(\varphi,\psi)$-условием для внешности единичного круга $D^-$, выглядит так

$$|z\varphi_z+\overline{z}\psi_z|+|z\varphi_{\overline{z}}+\overline{z}\psi_{\overline{z}}|+\big(|f_z-\varphi|+|f_{\overline{z}}-\psi|\big)|z|^2(|z|^2-1)^{-1}\leqslant$$
$$\leqslant(|\varphi|-|\psi|)(|z|^2-1)^{-1},\quad\forall\ z\in D^-. \tag{1}$$

Здесь $f_z$, $f_{\overline{z}}\in C(D^-)$. Произвольные функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ класса $C^1(D^-)$ должны удовлетворять условиям: $|\varphi(z)|>|\psi(z)|$ для всех $z\in D^-$ и $\varphi(\infty)=f_z(\infty)\neq 0$, $\psi(\infty)=f_{\overline{z}}(\infty)$. Условие (1) представляет собой серию достаточных условий инъективности: функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ указанного класса можно выбрать произвольно. Наиболее употребительными являются три частных случая: 1) $\varphi=f_z$, $\psi=f_{\overline{z}}$; 2) $\varphi=f_z$, $\psi=f_{\overline{z}}\equiv 0$; 3) $\varphi=\mathrm{const}=a$, $\psi=\mathrm{const}=b$, $|a|>|b|$. В этих случаях условие (1) записывается, соответственно, в виде

$$|zf_{zz}+\overline{z}f_{\overline{z}z}|+|zf_{z\overline{z}}+\overline{z}f_{\overline{z}\overline{z}}|\leqslant\frac{|f_z|-|f_{\overline{z}}|}{|z|^2-1},\ \forall\, z\in D^-; \tag{2}$$

$$|zf''(z)/f'(z)|\leqslant 1/(|z|^2-1),\ \forall\, z\in D^-; \tag{3}$$

$$|f_z-a|+|f_{\overline{z}}-b|\leqslant(|a|-|b|)/|z|^2,\ \forall\, z\in D^-; \tag{4}$$

Условия (2) и (3) получены ранее Беккером [4, 5], Условие (4) при $f_{\overline{z}}\equiv 0$ приведено Л. А. Аксентьевым в [6].

За последние 20 лет появилась серия работ, использующих метод локально-гомеоморфного и квазиконформного продолжения для получения различных условий однолистности функций в областях с заданными геометрическими характеристиками, например, в звездообразных, спиралеобразных, с выпуклым дополнением и других. Не претендуя на полноту, укажем лишь обзоры [7–9], монографию [3], статьи [15–18] и библиографию к ним.

Целью данной работы является выяснение требований на границу области, при выполнении которых можно "поднять" условие (1) на некруговые области, сохраняя по возможности класс отображений $f(z)$, произвольность выбора функций $\varphi$ и $\psi$ и идею доказательства.

**1. Геометрические характеристики области.** Пусть $B$ есть внешность замкнутой жордановой кривой $\mathcal{L}$ в плоскости $z$. Дополнение $\overline{B}$ до полной плоскости обозначим через $B^-$. Предположим, что кривая $\mathcal{L}$ является квазиокружностью, т.е. образом окружности при квазиконформном автоморфизме плоскости. Это эквивалентно тому, что существует квазиконформное отражение $\widetilde{\lambda}(z)$ плоскости $\mathbb{C}$ относительно $\mathcal{L}$, т.е. антиквазиконформное отображение $\widetilde{\lambda}(z) : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$, оставляющее неподвижными точки $\mathcal{L}$ и такое, что $\widetilde{\lambda}(B) = B^-$, $\widetilde{\lambda}(B^-) = B$, $\widetilde{\lambda}(\widetilde{\lambda}(z)) = z$. Будем считать, что меняющий ориентацию диффеоморфизм $\widetilde{\lambda}(z)$ имеет коэффициент квазиконформности $K$. Для дилатации $\mathbb{D}_{\widetilde{\lambda}} = (1+|\mu_{\widetilde{\lambda}}|)/(|\mu_{\widetilde{\lambda}}|-1)$ и модуля комплексного отклонения $|\mu_{\widetilde{\lambda}}| = |\widetilde{\lambda}_{\overline{z}}|/|\widetilde{\lambda}_z|$ справедливы неравенства

$$1 \leqslant \mathbb{D}_{\widetilde{\lambda}} \leqslant K; \quad 1 \leqslant k = (K+1)/(K-1) \leqslant |\mu_{\widetilde{\lambda}}| \leqslant \infty;$$

здесь $\widetilde{\lambda}_z = (\widetilde{\lambda}_x - i\widetilde{\lambda}_y)/2$, $\widetilde{\lambda}_{\overline{z}} = (\widetilde{\lambda}_x + i\widetilde{\lambda}_y)/2$. Равенство $|\mu_{\widetilde{\lambda}}| \equiv \infty$ выполняется в случае, когда $\mathcal{L}$ допускает антиконформное отражение, т.е. тогда и только тогда, когда $B$ есть внешность круга $D^-_{d,R} = \{z : |z-d| > R,\ d \in \mathbb{C},\ R > 0\}$, $D^-_{0,1} = D^-$. В этом случае $\widetilde{\lambda}(z) = d + R^2/(\overline{z} - \overline{d})$, $\mathbb{D}_{\widetilde{\lambda}} = 1$, $K = 1$. В дальнейшем будем полагать $K > 1$.

Пусть $G(z,\infty,B)$ – функция Грина для области $B$ с полюсом в бесконечности, $H(z,\infty,B)$ – сопряженная с ней гармоническая функция с фиксированной ветвью. При любом $\rho \in (1,\infty)$ линия уровня $\mathcal{L}_\rho = \{z : z \in B, G(z,\infty,B) = \ln\rho\}$ состоит из одной аналитической кривой Жордана. Функция $\omega(z) = \exp\{G + iH\}$ отображает $B$ конформно и взаимно однозначно на внешность единичного круга так, что бесконечно удаленная точка остается неподвижной, функция $h(\omega)$ обратна по отношению к $\omega(z)$. Ортогональные друг другу семейства кривых, конформно эквивалентные при отображении $\omega(z)$ семействам $\{|\omega| = \rho = \mathrm{const}\}$, $\{\theta = \arg\omega = \mathrm{const}\}$ при $1 < \rho < \infty$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, будем обозначать через $\{\mathcal{L}_\rho\}$, $\{\widetilde{\mathcal{L}}_\theta\}$.

Если $z$ принадлежит линии уровня $\mathcal{L}_\rho$, $1 \leqslant \rho < \infty$, то пусть $z_r$ принадлежит линии уровня $\mathcal{L}_{r\rho}$ и получается из $z$ с помощью преобразования $z_r(z) = h \circ (r\omega(z))$ при фиксированном $r$, $1 < r < \infty$. Через $\tau_r(z)$ обозначим производную $dz_r/dz$, а через $\varkappa(z_r)$ – обратную к ней величину $dz/dz_r$, где $z(z_r) = h \circ (r^{-1}\omega(z_r))$. Тогда для любого $z \in B$

$$\tau_r(z) = r\frac{\omega_z \circ z}{\omega_z \circ z_r}, \quad \varkappa(z_r) = r^{-1}\frac{h_\omega \circ (r\omega)}{h_\omega \circ \omega}.$$

Пусть $J_0 = \lim\{G(z, \infty, B) - \ln|z|\}$ – постоянная Робэна области $B$ относительно $z = \infty$. Тогда $\exp J_0$ – внутреннии радиус области $B$ в точке $z = \infty$, $\exp(-J_0) = h'(\infty)$. Функция $\exp J_0 \cdot h(\omega)$ принадлежит классу $\Sigma$ и для нее ([10], с. 117) справедливы оценки

$$\exp(-J_0)M^{-1} \leqslant |h_\omega \circ \omega| \leqslant \exp(-J_0)M; \quad M = (1 - |\omega|^{-2})^{-1}. \qquad (5)$$

Из (5) следует, что модуль производной $|\tau_r(z)| \to r$, если $|\omega|$ стремится к бесконечности, а $r$ остается фиксированным. Мы учтем этот факт в дальнейшем, при определении допустимой области.

Договоримся обозначать отражение $\widetilde{\lambda}(z)$ через $\lambda(z)$, когда $z \in \overline{B}$, и через $s(z)$, когда $z \in \overline{B}^{\,-}$. При фиксированном $r$, $1 < r < \infty$, обозначим $\delta(z_r) = \lambda(z_r) - z_r$ для любого $z_r \in \overline{B}$, $\delta(z) = \lambda(z) - z$, и подчиним кривую $\mathcal{L}$ дополнительным условиям:

$$\text{производная } \ \omega_z \ \text{ непрерывна в замкнутой области } \ \overline{B}; \qquad (6)$$

для любого $z \in B$ и любого фиксированного $r$, $1 < r < \infty$, справедливы неравенства

$$|\delta \circ z|^{-1}|dz| > |\delta \circ z_r|^{-1}|dz_r|; \qquad (7)$$

$$|\delta_{\overline{z}} \circ z|\,|dz| \geqslant r^{-1}|\delta_{\overline{z}} \circ z_r|\,|dz_r|; \qquad (8)$$

$$(K+1)2^{-1}|dz| > r^{-1}|\delta_{\overline{z}} \circ z_r|\,|dz_r|, \qquad (9)$$

здесь $K$ – коэффициент квазиконформного отражения $\widetilde{\lambda}(z)$. Области, удовлетворяющие условиям (6)–(9), будем называть областями типа $(V_1)$. Если в этом определении условия (8) и (9) заменить на

$$\big(|\lambda_{\overline{z}}\circ z|-|\lambda_z\circ z|\big)|dz|\geqslant r^{-1}\big(|\lambda_{\overline{z}}\circ z_r|-|\lambda_z\circ z_r|\big)|dz_r|, \qquad (8')$$

$$|dz|>r^{-1}\big(|\lambda_{\overline{z}}\circ z_r|-|\lambda_z\circ z_r|\big)|dz_r|, \qquad (9')$$

то такие области будем называть областями типа $(V_2)$. По теореме Келлога ([9], с. 411) производная отображающей функции $\omega_z$ непрерывна в замкнутой области $\overline{B}$, если $\mathcal{L}$ гладккая кривая, у которой угол $\theta(s)$ наклона касательной к вещественной оси, как функция длины дуги $s$ на $\mathcal{L}$, имеет модуль непрерывности $Ns^{\alpha}$, $0<\alpha<1$, $N>0$. Другие достаточные условия непрерывности $\omega_z$ в $\overline{B}$ существуют, и они формулируются либо с помощью иных модулей непрерывности функции $\theta(s)$, либо в терминах других характеристик кривой. Заметим, что условие (7) означает монотонность метрики $|dz|/|\delta(z)|$ по линиям уровня, а монотонность метрики $|\lambda_{\overline{z}}|\,|dz|$ $((|\lambda_{\overline{z}}|-|\lambda_z|)|dz|)$ по линиям уровня влечет за собой неравенство (8) ((8′)). С учетом (8) видим, что для выполнения (9) достаточно потребовать, чтобы была справедлива равномерная оценки $|\delta_{\overline{z}}(z)|<(K+1)/2$ для любого $z\in B$. Аналогично для выполнения (9′) достаточно, чтобы $|\lambda_{\overline{z}}(z)-|\lambda_z(z)|<1$ при любом $z\in B$. В случае, когда $\mathcal{L}$ – единичная окружность, $\lambda(z)=1/\overline{z}$, $\delta_{\overline{z}}(z)=\lambda_{\overline{z}}(z)=-1/\overline{z}^2$, $K=1$, $z_r=rz$. Нетрудно проверить, что для $D^-$ условия (6)–(9), а также (8′), (9′), выполняются, т.е. внешность единичного круга $D^-$ является областью и типа $(V_1)$, и типа $(V_2)$.

Соотношения (2)–(4) можем переписать в эквивалентной форме

$$|\delta f_{zz}+\overline{\delta}f_{\overline{z}z}|+|\delta f_{z\overline{z}}+\overline{\delta}f_{\overline{z}\overline{z}}|\leqslant|\delta_{\overline{z}}|\big(|f_z|-|f_{\overline{z}}|\big),\ \forall\, z\in D^-; \qquad (2')$$

$$|f''(z)/f'(z)|\leqslant|\delta_{\overline{z}}(z)|/(|\delta(z)|,\ \forall\, z\in D^-; \qquad (3')$$

$$|f_z-a|+|f_{\overline{z}}-b|\leqslant(|a|-|b|)|\delta_{\overline{z}}|,\ \forall\, z\in D^-. \qquad (4')$$

В случае произвольной области $B$ с гладкой границей нахождения явного выражения для отображений $\lambda(z)$ и $z_r(z)$, а следовательно, и проверка условий (7)–(9) – задача трудная. Поэтому важно выделить классы некруговых областей, которые, оставаясь достаточно широкими, позволяют это сделать. Возможность построения явного выражения для отображений $\lambda(z)$ и $z_r(z)$ зависит от того, насколько прозрачна геометрия линий уровня области $B$. Иногда выгодно отказаться от обычных линий уровня и перейти, если это возможно, к "обобщенным" линиям уровня с более простой геометрией. Такие примеры будут приведены во втором пункте. Под "обобщенными" линиями уровня области $B$ будем понимать семейства простых аналитических кривых $\{\Gamma_\rho\}$ и $\{\widetilde{\Gamma}_\theta\}$, $1 \leqslant \rho < \infty$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, $\Gamma_1 = \mathcal{L}$, обладающие тем свойством, что существует инъекция между точками области $B$ и точками пересечения двух кривых из разных семейств. Предполагается, что кривые семейства $\{\widetilde{\Gamma}_\theta\}$ соединяют $\mathcal{L}$ с бесконечно удаленной точкой и $\Gamma_{\rho_1} \cap \Gamma_{\rho_2} = \varnothing$, $\overline{\widetilde{\Gamma}}_{\theta_1} \cap \overline{\widetilde{\Gamma}}_{\theta_2} = \{z^0 \cup \infty\}$, $z^0 \in B^-$, при $\rho_1 \neq \rho_2$, $\theta_1 \neq \theta_2$, $\widetilde{\Gamma}_0 = \widetilde{\Gamma}_{2\pi}$. Геометрически определим отображение $Z_r(z)$. Именно, если $z$ лежит на пересечении кривых $\Gamma_\rho$ и $\widetilde{\Gamma}_\theta$ при некоторых фиксированных $\rho$ и $\theta$ из указанных промежутков, то через $Z_r(z)$ обозначим точку, лежащую на пересечении $\Gamma_{\rho r}$ и $\widetilde{\Gamma}_\theta$, здесь $r$ фиксировано, $1 < r < \infty$. И наоборот, если $Z_r$ лежит на пересечении кривых $\Gamma_\rho$ и $\widetilde{\Gamma}_\theta$, то через $z(Z_r)$ обозначим точку, лежащую на пересечении $\Gamma_{\rho r^{-1}}$ и $\widetilde{\Gamma}_\theta$. Нас интересуют области, в которых существуют "обобщенные" линии уровня, удовлетворяющих условиям: 1) производная $dZ_r/dz$ непрерывна в $\overline{B}$; 2) модуль производной $|dZ_r/dz| \to r$ при $|z| \to \infty$. Такие области назовем областями типа $(U_1)$, если они удовлетворяют условиям (7)–(9) для $z_r = Z_r(z)$, и областями типа $(U_2)$, если они удовлетворяют условиям (7), (8$'$), (9$'$). Области типа $(V_j)$ и $(U_j)$ будем называть допустимыми областями типа $j$, $j = 1, 2$.

Договоримся под символом $z_r \to \infty$ понимать выполнение двух требований сразу: $|z| \to \infty$ и $r \to \infty$, т.е. на сфере Римана стягивание к полюсу линий уровня понимается как бы по спирали, которую образуют линии уровня $\mathcal{L}_\rho(\Gamma_\rho)$, переходя друг в друга с помощью $\widetilde{\mathcal{L}}_\theta(\widetilde{\Gamma}_\theta)$ при увеличении их "номера" $\rho$. Назовем это определение характером стремления линий уровня к бесконечности. Оно необходимо для определения отображений аргумента $z_r$, если $z_r \in B$.

Договоримся под высказыванием "для любого $z_r$, принадлежащего области $B$" понимать предложение: "для любого $z \in B$ и любого фиксированного $r$, $1 < r < \infty$", здесь $z_r = z_r(z)(Z_r(z))$ – отображение, определенное выше.

**2. Пример областей типа** $(U_j)$, $j=1,2$. Пусть $\mathcal{L}=\{z : z = R(\theta)e^{i\theta},\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\ R(\theta)>0,\ R(0)=R(2\pi)\}$ ограничивает звездообразную (относительно нуля) порядка $\alpha$ область $B_\alpha^-$, внешность кривой $\mathcal{L}$ обозначим $B_\alpha^*$, $0<\alpha<1$. Напомним определение. Символ $S_\alpha^*$, $0<\alpha<1$, обозначает подкласс $S$, состоящий из звездообразных функций порядка $\alpha$, т.е. функций, удовлетворяющих условию

$$\left|\arg\left[\omega\tilde{h}'(\omega)/\tilde{h}(\omega)\right]\right|\leqslant\alpha\pi/2,\quad \omega\in D,\quad 0<\alpha<1,$$

где $\tilde{h}(\omega)\in S$ отображает единичный круг $D$ в плоскости $\omega$ на область $B_\alpha^-$. Если $\tilde{h}(\omega)\in S_\alpha^*$, то (см. [14]) $\tilde{h}(\omega)$ имеет непрерывное продолжение на $\overline{D}$, $\tilde{h}(e^{i\varphi})$ абсолютно непрерывна на $[0,2\pi]$, и $\frac{d}{d\varphi}\tilde{h}(e^{i\varphi}) = ie^{i\varphi}\tilde{h}'(e^{i\varphi})$ п.в. на $[0,2\pi]$. Для границы $\mathcal{L}$ $\alpha$-звездообразной области $B_\alpha^-$ с параметрическим уравнением $z=R(\theta)e^{i\theta}$ выполянется неравенство [13]

$$\left(1+(R/R_\theta)^2\right)^{1/2}\geqslant\left(\sin\alpha\pi/2\right)^{-1},\quad \text{п.в.}\quad ,\theta\in[0,2\pi].$$

Геометрически это означает, что острый угол между касательной и радиусом-вектором в точке $\tilde{h}(\rho e^{i\varphi})$ кривой $\ell_\rho$ (образа окружности $|\omega|=\rho$ при отображении функцией $\tilde{h}(\omega)$) будет больше фиксированной величины $(1-\alpha)\pi/2$ (например, [15]).

Покажем, что область $B_\alpha^*$, $0<\alpha<1$, является областью типа $(U_j)$, $j=1,2$. Определим отображения $Z_r(z)$ и $\tilde{\lambda}(z)$ с помощью равенств $Z_r(z)=rz$, $\tilde{\lambda}(z)=R^2(\theta)/\overline{z}$, где $\theta=-i\ln(z/\overline{z})/2$, ветвь логарифма главная. В дальнейшем будем писать $z_r(z)$ вместо $Z_r(z)$ для удобства обозначений. При любом фиксированном $r$, $1<r<\infty$, справедливы равенства $\theta=\arg z=\arg z_r$, $\tau_r(z)=r$, и для $|z|>R(\theta)$

$$|\delta\circ z| = (|z|^2-R^2)/|z|;$$
$$|\delta\circ z_r| = \left(r^2|z|^2-R^2\right)/r|z|,\quad R=R(\theta);$$
$$\left|\delta_{\overline{z}}\circ z\right| = R\left(R^2+R_\theta^2\right)^{1/2}/|z|^2;\quad R_\theta=dR/d\theta,\quad \text{п.в.}\quad ,\theta\in[0.2\pi];$$
$$\left|\delta_{\overline{z}}\circ z_r\right| = R\left(R^2+R_\theta^2\right)^{1/2}/r^2|z|^2,\quad \text{п.в.}\quad ,\theta\in[0.2\pi];$$
$$|\lambda_z\circ z| = R|R_\theta|/|z|^2;\quad |\lambda_z\circ z_r| = R|R_\theta|/r^2|z|^2,\quad \text{п.в.}\quad ,\theta\in[0.2\pi].$$

Предположим, что функция $R(\theta)$ принадлежит классу $C^1[0,2\pi]$. Несложными выкладками проверяется, что требования (7), (8),

$(8')$ для области $B_\alpha^*$ выполняются. Условие $(9')$ также имеет место в силу неравенства $(1+x^2)^{1/2} - |x| < 1$, справедливого для любого $x \in \mathbb{R}$. Соотношение (9) будет выполнено, если $|R_\theta/R| < \left((K+1)^2-4\right)^{1/2}/2$. Но для модуля комплексного отклонения имеем

$$|\mu_\lambda| = (1+(R/R_\theta)^2)^{1/2} \geqslant k = (K+1)/(K-1),$$

что эквивалентно

$$|R_\theta/R| \leqslant (K-1)/2\sqrt{K}.$$

Величина $(K-1)/2\sqrt{K}$ строго меньше, чем $((K+1)^2-4)^{1/2}/2$ при $K>1$. Поэтому (9) справедливо, и область $B_\alpha^*$ является областью типа $(U_j)$, $j=1,2$. Отсюда, в частности, следует, что если для области $B_\alpha^*$ вычислен $\max\limits_\theta |R_\theta/R| = Q$, то число $K(Q) = 1+2Q^2+2Q(1+Q^2)^{1/2}$, являющееся решением уравнения $Q=(K-1)/2\sqrt{K}$, будет коэффициентом квазиконформности диффеоморфизма $\tilde\lambda(z) = R^2(\arg z)/\overline{z}$. При этом $K = \operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{2}$, $k = (\sin\alpha\pi/2)^{-1}$, где $\beta = (1-\alpha)\pi/2$, и, следовательно, $\alpha = 1 - \frac{4}{\pi}\operatorname{arcctg}\sqrt{K} = \frac{2}{\pi}\arcsin k^{-1}$. Впервые отражение $\tilde\lambda(z) = R^2(\arg z)/\overline{z}$ относительно $\alpha$-звездообразной кривой $\mathcal{L} = \partial B_\alpha^-$ было использовано в работе [13]. Двусторонее неравенство

$$(\widetilde{K}-1)/2\sqrt{\widetilde{K}} \leqslant |R_\theta/R| \leqslant (K-1)/2\sqrt{K},$$

эквивалентно соотноошениям

$$1 < k \leqslant |\mu_{\widetilde{\lambda}}| \leqslant \widetilde{k}, \quad \widetilde{K} \leqslant \mathbb{D}_{\widetilde{\lambda}} \leqslant K,$$

где $\widetilde{k} = (\widetilde{K}+1)/(\widetilde{K}-1)$.

К случаю звездообразной области порядка $\alpha$ сводится и внешность выпуклой кривой. Действительно, пусть $S_p^0$ обозначает подкласс $S$ функций $\tilde h(\omega)$, состоящий из выпуклых функций, для которых $|\tilde h(\omega)| \leqslant P$, $\omega \in D$. Известно (см. [14]) утверждение $\tilde h \in S_p^0 \Rightarrow \tilde h \in S_\alpha^*$, $\alpha = 1 - \frac{2}{\pi}\arcsin\frac{d_{\tilde h}}{P}$, где $d_{\tilde h}$ – радиус наибольшего открытого круга с центром в нуле, который содержится в $\tilde h(D)$. Теперь, если $\mathcal{L}$ ограничивает выпуклую область $\tilde h(D)$ с $\tilde h(\omega) \in S_p^0$, и $B^0$ – внешность этой кривой, то $B^0 = B_\alpha^*$ с $\alpha = 1 - \frac{2}{\pi}\arcsin\frac{d_{\tilde h}}{P}$.

**3. Основные утверждения.** В данной работе рассматриваются непрерывные отображения $f(z)$ допустимых областей $B$ типа $j$ в предположении, что отображение $f(z)$ непрерывно вместе с частными производными $f_z$ и $f_{\overline{z}}$ в любой конечной точке $z$ области $B$. Предполагается, что существуют конечные пределы

$$a = \lim_{z_r \to \infty} \left[ e^{-i \arg \varkappa(z_r)} \cdot (f_z \circ z_r) \right] \neq 0,$$

$$b = \lim_{z_r \to \infty} \left[ e^{i \arg \varkappa(z_r)} \cdot (f_{\overline{z}} \circ z_r) \right], \quad |a| > K|b|, \tag{I}$$

$$\alpha_0 = \lim_{z_r \to \infty} \arg \left[ \delta(z_r) \varkappa(z_r) \delta^{-1}(z) \right],$$

$$\beta_0 = \lim_{z_r \to \infty} \arg \left[ \varkappa(z_r) \delta(z) \delta^{-1}(z_r) \right] \tag{II}$$

и выполняется условие

$$f(z) \to \infty \quad \text{при} \quad z \to \infty, \tag{III}$$

здесь $K$ – коэффициент квазиконфомности отражения $\tilde{\lambda}(z)$. Заметим, что если $\arg \varkappa(z_r)$ зависит только от $r$ (например, звездообразные области), то (III) следует из (I).

Обозначим через $C^n(B)$ класс функций, непрерывных в $B$ вместе с частными производными до $n$-го порядка включительно, $C(B) = C^0(B)$.

**Теорема 1.** *Пусть $f_z$, $f_{\overline{z}} \in C(B)$. Функция $f(z)$ инъективна в допустимой области $B$ первого типа, если найдутся две функции $\varphi(z)$, $\psi(z) \in C^1(B)$, $\varphi(\infty) = a$, $\psi(\infty) = b$, $|\varphi(z)| > K|\psi(z)|$ для любого $z \in B$, и для каждого $z_r \in B$ выполняется условие*

$$|f_z - p\varphi| + |f_{\overline{z}} - \overline{p}\psi| + |\delta \varphi_z \alpha + \overline{\delta} \psi_z \beta| + |\delta \varphi_{\overline{z}} \alpha + \overline{\delta} \psi_{\overline{z}} \beta| \leqslant$$
$$\leqslant |\delta_{\overline{z}}| 2(K+1)^{-1} \big( |\varphi| - K|\psi| \big), \tag{10}$$

*здесь*

$$p(z_r) = r\varkappa(z_r), \quad \delta(z_r) = \lambda(z_r) - z_r,$$

$$\alpha(z_r) = p(z_r) \exp\big(-i \arg(\delta(z_r)/\delta(z))\big)$$

$$\beta(z_r) = p(z_r) \exp\big(i \arg(\delta(z_r)/\delta(z))\big),$$

*$K$ – коэффициент квазиконформности отражения $\tilde{\lambda}(z)$.*

**Доказательство.** При фиксированном $r$ введем функцию $\mathcal{F}(z)=\{g(z), z\in\overline{B}; G(z),\ z\in\overline{B}^{\,-}\}$, где $g(z)=f(z_r)$, а функция $G(z)$ является непрерывным продолжением $g(z)$ и задается равенством

$$G(z)=g(s(z))+(z-s(z))\varphi_1(s(z))+\big(\bar{z}-\overline{s(z)}\big)\psi_1(s(z)),\quad z\in\overline{B}^{\,-},\ (11)$$

причем $\varphi_1(z)=r\varphi(z_r)$, $\psi_1(z)=r\psi(z_r)$, $s(z)=\widetilde{\lambda}(z)$ для $z\in\overline{B}^{\,-}$. В силу допустимости области $B$ производные $g_z(z)=(f_z\circ z_r)\tau_r(z)$ и $g_{\overline{z}}(z)=(f_{\overline{z}}\circ z_r)\overline{\tau_r(z)}$ непрерывны в $\overline{B}$, а функция $G(z)$ непрерывно дифференцируема в $\overline{B}^{\,-}$. Из (10) следует при $K>1$

$$\begin{aligned}&|p(z_r)|\big(|\varphi\circ z_r|-|\psi\circ z_r|\big)+|f_{\overline{z}}\circ z_r|-|f_z\circ z_r|\leqslant\\ &\leqslant 2(K+1)^{-1}|\delta_{\overline{z}}\circ z_r|\big(|\varphi\circ z_r|-K|\psi\circ z_r|\big),\end{aligned}\qquad(12)$$

откуда с учетом (9)

$$|f_z\circ z_r|-|f_{\overline{z}}\circ z_r|>\big(|\varphi\circ z_r|-K|\psi\circ z_r|\big)\big(|p(z_r)|-2|\delta_{\overline{z}}\circ z_r|(K+1)^{-1}\big)>0,$$

и $f(z)$ локально инъективна в $\overline{B}$. Для якобиана отображения $g(z)$ имеем

$$J_g(z)=|g_z|^2-|g_{\overline{z}}|^2=|\tau_r(z)|^2\big(|f_z\circ z_r|^2-|f_{\overline{z}}\circ z_r|^2\big)>0.$$

Следовательно, функция $g(z)$ локально инъективна в $\overline{B}$. Следствием (10) является неравенство

$$\begin{aligned}&|(f_z\circ z_r)\tau_r(z)-r(\varphi\circ z_r)|+|(f_{\overline{z}}\circ z_r)\overline{\tau_r(z)}-r(\psi\circ z_r)|+\\ &+r|\delta\circ z_r|\cdot|(\varphi_z\circ z_r)\exp(i\arg\delta(z))+(\psi_z\circ z_r)\exp(-i\arg\delta(z))|+\\ &+r|\delta\circ z_r|\,|(\varphi_{\overline{z}}\circ z_r)\exp(i\arg\delta(z))+(\psi_{\overline{z}}\circ z_r)\exp(-i\arg\delta(z))|\leqslant\\ &\leqslant|\delta_{\overline{z}}\circ z_r|2(K+1)^{-1}(|\varphi\circ z_r|-K|\psi\circ z_r|)|\tau_r(z)|,\end{aligned}$$

откуда с помощью условий (7), (8)

$$\begin{aligned}&\big|g_z(z)-\varphi_1(z)\big|+\big|g_{\overline{z}}(z)-\psi_1(z)\big|+\big|\delta(z)r(\varphi_z\circ z_r)\tau_r(z)+\\ &+\overline{\delta}(z)r(\psi_{\overline{z}}\circ z_r)\tau_r(z)\big|+\big|\delta(z)r\big(\varphi_{\overline{z}}\circ z_r\big)\overline{\tau_r(z)}+\overline{\delta}(z)r(\psi_{\overline{z}}\circ z_r)\overline{\tau_r(z)}\big|<\\ &<|\delta_{\overline{z}}\circ z|2(K+1)^{-1}\big(|\varphi_1(z)|-K|\psi_1(z)|\big).\end{aligned}\qquad(13)$$

Перепишем последнее соотношение в эквивалентной форме

$$\left|g_z-\varphi_1\right|+\left|g_{\overline{z}}-\psi_1\right|+\left|\delta\varphi_{1_z}+\overline{\delta}\psi_{1_z}\right|+\left|\delta\varphi_{1_{\overline{z}}}+\overline{\delta}\psi_{1_{\overline{z}}}\right|< \\ <|\delta_{\overline{z}}|2(K+1)^{-1}\big(|\varphi_1|-K|\psi_1|\big), \qquad (14)$$

где все отображения вычислены в точке $z$ и аргумент $z$ опущен. Покажем, что $G(z)$ является локально инъективной в замкнутой области $\overline{B}$. Будем обозначать $\zeta=\lambda(z)$ при $z\in\overline{B}$ и $z=s(\zeta)$ при $\zeta\in\overline{B}^{\,-}$. Равенство (11) переишем в виде

$$G(\zeta)=\widehat{G}(z)=g(z)+(\lambda(z)-z)\varphi_1(z)+(\overline{\lambda(z)}-\overline{z})\psi_1(z), \\ \zeta\in\overline{B}^{\,-},\quad z\in\overline{B}. \qquad (15)$$

Для модуля комплексного отклонения функции $G(\zeta)$, заданной соотношением (15), имеем

$$\left|\mu_G(\zeta)\right|=\frac{|G_{\bar\zeta}|}{|G_\zeta|}=\frac{|\widehat{G}_z\, s_{\bar\zeta}+\widehat{G}_{\overline{z}}\,\overline{s}_\zeta|}{|\widehat{G}_z\, s_\zeta+\widehat{G}_{\overline{z}}\,\overline{s}_{\bar\zeta}|}=\frac{|\nu_s(\zeta)+\mu_{\widehat{G}}(z)|}{|1+\mu_{\widehat{G}}(z)\overline{\nu_s(\zeta)}|},$$

где $\nu_s(\zeta)$ – второе комплексное отклонение функции $s(\zeta)$, $\nu_s(\zeta)=s_{\bar\zeta}/\overline{s}_\zeta$. Пусть $\mu_{\widehat{G}}(z)=re^{i\theta}$, $\nu_s(\zeta)=\rho e^{i\sigma}$. Тогда

$$|\mu_G(\zeta)|=\big(\rho^2+r^2+2\rho r\cos(\theta-\sigma)\big)^{1/2}\big/\big(1+r^2\rho^2+2r\rho\cos(\theta-\sigma)\big)^{1/2}.$$

Модуль комплексного отклонения отображения $s(\zeta)$ допускает оценку $\rho=|\mu_s(\zeta)|\geqslant k=(K+1)/(K-1)>1$. Неравенство $|\mu_s(G)|<1$ при $\rho>1$ эквивалентно соотношению $\rho^2+r^2<1+r^2\rho^2$, что, в свою очередь, равносильно $r=|\mu_{\widehat{G}}(z)|>1$. Значит, якобиан

$$|J_G(\zeta)|=|G_\zeta|^2-|G_{\bar\zeta}|^2=|G_\zeta|^2\big(1-|\mu_G(\zeta)|^2\big),$$

будет больше нуля, если $|G_\zeta|>0$ для $\zeta\in\overline{B}^{\,-}$ и $|\mu_{\widehat{G}}(z)|^{-1}<1$ для $z\in\overline{B}$. В дальнейших выкладках доказательства теоремы 1 будем опускать аргумент у функции, если он равен $z$. Пользуясь выражением (15) и определением для $\delta(z)$, вычислим величину

$$|\mu_{\hat{G}}(z)|^{-1}=|\widehat{G}_z|/|\widehat{G}_{\overline{z}}|= \\ =\frac{|(g_z-\varphi_1)+(\delta\varphi_{1_z}+\overline{\delta}\psi_{1_z})+\lambda_z\varphi_1+\overline{\lambda}_{\overline{z}}\psi_1|}{|(g_{\overline{z}}-\psi_1)+(\delta\varphi_{1_{\overline{z}}}+\overline{\delta}\psi_{1_{\overline{z}}})+\lambda_{\overline{z}}\varphi_1+\overline{\lambda}_z\psi_1|},\quad z\in\overline{B}. \qquad (16)$$

Покажем, что в (16) числитель $|\widehat{G}_z|$ строго меньше знаменателя $|\widehat{G}_{\overline{z}}|$. Действительно, т.к. $|\lambda_z| \leqslant k^{-1}|\lambda_{\overline{z}}|$, а $k = (K+1)/(K-1)$, то

$$(|\varphi_1| - |\psi_1|) - |\lambda_z|\,(|\varphi_1| + |\psi_1|) \geqslant |\lambda_{\overline{z}}| 2(K+1)^{-1}(|\varphi_1| - K|\psi_1|). \quad (17)$$

Из (14) с учетом неравенства (17) получаем

$$|\widehat{G}_z| \leqslant |g_z - \varphi_1| + |\delta\varphi_{1_z} + \overline{\delta}\psi_{1_z}| + |\lambda_z|\,|\varphi_1| + |\lambda_{\overline{z}}|\,|\psi_1| <$$

$$< |\lambda_{\overline{z}}|\,|\varphi_1| - |\lambda_z|\,|\psi_1| - |g_{\overline{z}} - \psi_1| - |\delta\varphi_{1_{\overline{z}}} + \overline{\delta}\psi_{1_{\overline{z}}}| \leqslant |\widehat{G}_{\overline{z}}|, \qquad (18)$$

а это означает, что $|\mu_{\hat{G}}(z)|^{-1} < 1$. Для модуля производной $|G_\zeta|$ имеем

$$|G_\zeta| = |\widehat{G}_z s_\zeta + \widehat{G}_{\overline{z}}\overline{s}_{\bar{\zeta}}| = |\widehat{G}_{\overline{z}}|\,|s_\zeta|\,|\mu_{\hat{G}}^{-1}(z) + \overline{\nu_s(\zeta)}\,|.$$

Пусть сначала $|s_\zeta| \neq 0$. Поскольку $|\mu_{\bar{G}}(z)|^{-1} < 1$, а модуль второго комплексного отклонения $|\nu_s(\zeta)| = |\mu_s(\zeta)| \geqslant k > 1$, то $|\mu_{\bar{G}}^{-1}(z) + \overline{\nu_s(\zeta)}\,| \neq 0$. Знаменатель дроби (16), равный $|\widehat{G}_{\overline{z}}|$, строго больше числителя, поэтому

$$|\widehat{G}_{\overline{z}}| > |(g_z - \varphi_1) + (\delta\varphi_{1_z} + \overline{\delta}\psi_{1_z}) + \lambda_z\varphi_1 + \overline{\lambda}_{\overline{z}}\psi_1| \geqslant 0.$$

Если же $|s_\zeta| = 0$, то в этом случае $|s_{\bar{\zeta}}| \neq 0$. По-прежнему, из (16) следует, что $|\widehat{G}_{\overline{z}}| > 0$. Поэтому $|G_\zeta| = |\widehat{G}_{\overline{z}}| \cdot |\overline{s}_{\bar{\zeta}}| \neq 0$. Таким образом, локальная инъективность $G(\zeta)$ в $\overline{B}^-$ доказана.

Введенная функция $\mathcal{F}(z)$ является непрерывной и локально инъективной всюду, за исключением точек кривой $\mathcal{L}$. В точках кривой $\mathcal{L}$ имеется инъективность образов соответствующих полуокрестностей и одинаковая ориентируемость отображений $g(z)$ и $G(z)$. Этого оказывается достаточным для инъективности $\mathcal{F}(z)$ в полной окрестности каждой точки $\mathcal{L}$. Имеет место следующая лемма о склейке ([3], с. 23):

**Лемма.** *Пусть $D_1$ и $D_2$ непересекающиеся области в $\mathbb{R}^2$, $t$ – открытое подмножество некоторого одномерного нигде не плотного в $\mathbb{R}^2$ множества, $D = D_1 \cup t \cup D_2$ – область. Если отображения $f_i : D_i \cup t \to \mathbb{R}^2$, локально гомеоморфны в $D_i \cup t$, $i = 1, 2$; $f_1\big|_t = f_2\big|_t$ и $f_1$ и $f_2$ одинаков ориентированы, то отображение $f : D \to \mathbb{R}^2$, $f\big|_{D_i \cup t} = f_i$, $i = 1, 2$, локально гомеоморфно в $D$.*

Следовательно, функция $\mathcal{F}(z)$ является непрерывной и локально инъективной на всей плоскости $z$ и $\mathcal{F}(z) \to \infty$ при $z \to \infty$. По теореме Адамара ([11], с. 164), примененной к $\mathcal{F}(z)$, получим, что $g(z) = f(z_r)$ инъективна в $\overline{B}$. В силу произвольности $r$, $1 < r < \infty$, отсюда следует инъективность $f(z)$ в $B$. Теорема доказана.

При доказательстве теоремы 1 строгое неравенство может быть поставлено в любом из двух соотношений (7) или (8), или в обоих сразу. Это нужно для строго знака в условии (13), и не влияет на остальные моменты доказательства. Если не требовать строгой монотонности ни в одном из соотношений (7), (8), то модуль $|\mu_{\widehat{G}}(z)|$ может быть равен единице только в случае, когда $\mu_\lambda(z) = \pm ik$, $k = (K+1)/(K-1)$.

Условие (10) совпадает с соотношением (1) при значении параметров: $K = 1$, $\varkappa(z_r) = r^{-1}$, $p(z_r) = \alpha(z_r) = \beta(z_r) = 1$, которые соответствуют области $D^-$. Таким образом, неравенство (10) является обобщением соотношения (1) на допустимые области первого типа. Пределы (I), (II) определяют поведение величин $f_z - p\varphi$, $f_{\overline{z}} - \overline{p}\psi$, $\alpha$, $\beta$ при $z_r \to \infty$.

**Теорема 2.** *В предположениях теоремы 1 функция $f(z)$ будет инъективной в допустимой области $B$ второго типа, если условие (10) заменить на*

$$|f_z - p\varphi| + |f_z - \overline{p}\psi| + |\delta\varphi_z\alpha + \overline{\delta}\psi_z\beta| + |\delta\varphi_{\overline{z}}\alpha + \overline{\delta}\psi_{\overline{z}}\beta| \leqslant$$
$$\leqslant \big(|\lambda_{\overline{z}}| - |\lambda_z|\big)\big(|\varphi| - K|\psi|\big), \tag{19}$$

*для любого $z_r \in B$.*

Рассуждения для доказательства теоремы 2 проводятся по той же схеме, что и теоремы 1. Вместо (12) получим неравенство

$$|f_z \circ z_r| - |f_{\overline{z}} \circ z_r| > (|\varphi \circ z_r| - K|\psi \circ z_r|)(|p(z_r)| - (|\lambda_{\overline{z}}| - |\lambda_z|)),$$

правая часть которого строго больше нуля в силу ($9'$). Вместо (14) с учетом ($8'$) получим соотношение

$$|g_z - \varphi_1| + |g_{\overline{z}} - \psi_1| + |\delta\varphi_{1_z} + \overline{\delta}\psi_{1_z}| + |\delta\varphi_{1_{\overline{z}}} + \overline{\delta}\psi_{1_{\overline{z}}}| <$$
$$< (|\lambda_{\overline{z}}| - |\lambda_z|)(|\varphi_1| - K|\psi_1|), \quad \forall\ z \in B,$$

которое можно усилить, если разность $|\varphi_1| - K|\psi_1|$ заменить на $|\varphi_1| - \mathbb{D}_\lambda|\psi_1|$, где

$$\mathbb{D}_\lambda = (\rho+1)/(\rho-1) = (|\lambda_{\overline{z}}| + |\lambda_z|)/(|\lambda_{\overline{z}}| - |\lambda_z|), \quad 1 \leqslant \mathbb{D}_\lambda \leqslant K.$$

С учетом того, что $|\lambda_z| = \rho^{-1}|\lambda_{\overline{z}}|$, будем иметь

$$|\lambda_{\overline{z}}|(|\varphi_1| - |\psi_1|) - |\lambda_z|(|\varphi_1| + |\psi_1|) = (|\lambda_{\overline{z}}| - |\lambda_z|)(|\varphi_1| - \mathbb{D}_\lambda |\psi_1|).$$

Теперь

$$|g_z - \varphi_1| + |g_{\overline{z}} - \psi_1| + |\delta\varphi_{1_z} + \overline{\delta}\psi_{1_z}| + |\delta\varphi_{1_{\overline{z}}} + \overline{\delta}\psi_{1_{\overline{z}}}| <$$

$$< |\lambda_{\overline{z}}|\big(|\varphi_1| - |\psi_1|\big) - |\lambda_z|\big(|\varphi_1| + |\psi_1|\big),$$

откуда следует справедливость (18), что и требовалось.

В случае внешности единичного круга $D^-$ условие (19) совпадает с (1).

**4. Следствия из теорем.** Рассмотрим несколько частных случаев теоремы 1. Будем обозначать отображение $z(z_r)$ через $\Phi(z_r)$. Тогда $\Phi'(z_r) = \varkappa(z_r)$, $d\varkappa(z_r)/dz_r = \Phi''(z_r)$.

**Следствие 1.** *Пусть $f_z$, $f_{\overline{z}} \in C^1(B)$. Отображение $f(z)$ инъективно в допустимой области $B$ первого типа, если $|f_z| > K|f_{\overline{z}}|$ для любого $z \in B$, выполняется условие*

$$|\delta|\,\Big|\frac{\Phi''}{\Phi'}\Big|\big(|f_z| + |f_{\overline{z}}|\big) + |\delta f_{zz}\widetilde{\alpha} + \overline{\delta} f_{\overline{z}z}\widetilde{\beta}| + |\delta f_{z\overline{z}}\widetilde{\alpha} + \overline{\delta} f_{\overline{z}\overline{z}}\widetilde{\beta}| \leqslant$$

$$\leqslant |\delta_{\overline{z}}| 2(K+1)^{-1}\, r^{-1}|\Phi'|^{-1} \cdot \big(|f_z| - K|f_{\overline{z}}|\big), \tag{20}$$

*для каждого $z_r \in B$, здесь $\widetilde{\alpha}(z_r) = \exp(-i\arg\delta(z_r)/\delta(z) - i\arg\Phi'(z_r)$, $\widetilde{\beta}(z_r) = (\,\widetilde{\alpha}\,(z_r))^{-1}$.*

Для доказательства следствия 1 достаточно положить в теореме 1 $\varphi(z_r) = f_z(z_r)(p(z_r))^{-1}$, $\psi(z_r) = f_{\overline{z}}(z_r)\,\overline{(p(z_r))}^{-1}$. В случае $B = D^-$ условие (20) совпадает с условием Беккера (2′).

**Следствие 2.** *Аналитическая в $B\setminus\{\infty\}$ функция $f(z)$ однолистна в допустимой области $B$ первого типа, если выполняется условие*

$$\Big|\frac{\Phi''(z_r)}{\Phi'(z_r)}\Big| + \Big|\frac{f''(z_r)}{f'(z_r)}\Big| \leqslant \Big|\frac{\delta_{\overline{z}}(z_r)}{\delta(z_r)}\Big|\frac{2}{K+1}\frac{1}{r|\Phi'(z_r)|}, \quad \forall\, z_r \in B. \tag{21}$$

Следствие 2 получается из следствия 1 при дополнительном предположении $\psi(z) \equiv 0 \equiv f_{\overline{z}}(z)$. Условие (21) является обобщением условия Беккера (3′).

**Следствие 3.** *Пусть $f_z$, $f_{\overline{z}} \in C(B)$. Функция $f(z)$ инъективна в допустимой области $B$ первого типа, если выполняется условие*

$$\left|f_z(z_r) - ra\Phi'(z_r)\right| + \left|f_{\overline{z}}(z_r) - rb\,\overline{\Phi'(z_r)}\,\right| \leqslant$$
$$\leqslant |\delta_{(\overline{z})}(z_r)| 2(K+1)^{-1}(|a| - K|b|),\ \forall\, z_r \in B. \qquad (22)$$

Следствие 3 есть частный случай теоремы 1 при $\varphi(z) \equiv a$, $\psi(z) \equiv b$, постоянные $a$ и $b$ определены в (I).Неравенство (22) есть обобщение условия ($4'$). Если в следствии 3 дополнительно предположить $f_{\overline{z}} \equiv 0$, то получим

**Следствие 4.** *Аналитическая в $B \setminus \{\infty\}$ функция $f(z)$ однолистна в допустимой области $B$ первого типа, если выполняется условие*

$$\left|f_z(z_r) - ra\Phi'(z_r)\right| \leqslant |\delta_{\overline{z}}(z_r)|\ |a| 2(K+1)^{-1},\ \forall\, z_r \in B. \qquad (23)$$

**Следствие 5.** *Аналитическая в $B \setminus \{\infty\}$ функция $f(z)$ будет однолистной в допустимой области $B$ первого типа, если найдется аналитическая в $B$ функция $\varphi(z)$, $\varphi(\infty) = a, |\varphi(z)| \neq 0$ для любого $z \in B$, и выполняются два условия*

$$\begin{aligned} &\left|\frac{1}{r\Phi'(z_r)}\,\frac{f_z(z_r)}{\varphi(z_r)} - 1\right| \leqslant \frac{|\delta_{\overline{z}}(z_r)|}{r|\Phi'(z_r)|}\,\frac{2\varepsilon}{K+1},\ 0 < \varepsilon < 1, \\ &\left|\frac{\varphi_z(z_r)}{\varphi(z_r)}\right| \leqslant \left|\frac{\delta_{\overline{z}}(z_r)}{\delta(z_r)}\right| \frac{1}{r|\Phi'(z_r)|}\,\frac{2(1-\varepsilon)}{K+1},\quad \forall\, z_r \in B, \end{aligned} \qquad (24)$$

*здесь $a$ определено в (I).*

Следствие 5 получается их теоремы 1 при $f_{\overline{z}} \equiv 0$, $\psi \equiv 0$, $\varphi_{\overline{z}} \equiv 0$. В случае внешности единичного круга соотношения (24) приводят к результату Ф. Г. Авхадиева [1].

Аналогичные следствия можно сформулировать из теоремы 2. Для этого в формулировках следствий 1–5 нужно слова “первого типа” заменить на “второго типа”, а в условиях (20)–(24) в правой части величину $|\delta_{\overline{z}}| \cdot (K+1)^{-1}$ – на разность модулей производных $|\lambda_{\overline{z}}| - |\lambda_z|$, оставив все остальное неизменным.

**5. Звездообразные области.** Области $B^*_\alpha$, $0 < \alpha < 1$, были рассмотрены в пункте 2. Для таких областей постоянные $\alpha_o$ и $\beta_0$, определенные в (II), равны нулю, $\arg \varkappa(z_r) \equiv 0$. Переформулировка теорем 1 и 2 для звездообразной области $B^*_\alpha$ с $R(\theta) \in C^1[0, 2\pi]$ дает следующий результат.

**Теорема 3.** *Пусть* $\mathcal{L} = \partial B_\alpha^*$, $0 < \alpha < 1$, $\mathcal{L} = \{z : z = R(\theta)\, e^{i\theta},\ R(\theta) > 0,\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,\ R(0) = R(2\pi)\}$, *где* $R(\theta) \in C^1[0, 2\pi]$. *Функция* $f(z)$ *с непрерывными производными* $f_z$, $f_{\overline{z}}$ *– будет инъективной во внешности кривой* $\mathcal{L}$, *если найдутся две функции* $\varphi(z)$, $\psi(z) \in C^1(B_\alpha^*)$, $\varphi(\infty) = a$, $\psi(\infty) = b$, $|\varphi(z)| > K|\psi(z)|$ *для любого* $z \in B_\alpha^*$ *и выполняется одно из условий*

$$|f_z - \varphi| + |f_{\overline{z}} - \psi| + |\delta\varphi_z + \overline{\delta}\psi_z| + |\delta\varphi_{\overline{z}} + \overline{\delta}\psi_{\overline{z}}| \leqslant$$

$$\leqslant R(R^2 + R_\theta^2)^{1/2}\, 2(K+1)^{-1}\, |z|^{-2}(|\varphi| - K|\psi|),\ \forall\, z \in B_\alpha^*; \tag{25}$$

$$|f_z - \varphi| + |f_{\overline{z}} - \psi| + |\delta\varphi_z + \overline{\delta}\psi_z| + |\delta\varphi_{\overline{z}} + \overline{\delta}\psi_{\overline{z}}| \leqslant$$

$$\leqslant R\big[(R^2 + R_\theta^2)^{1/2} - |R_\theta|\big]\, |z|^{-2}(|\varphi| - K|\psi|),\ \forall\, z \in B_\alpha^*; \tag{26}$$

*здесь* $\delta(z) = (|z|^2 - R^2)/\overline{z}$, $R_\theta = dR/d\theta$, $R = R(\theta)$, $\theta = \arg z$, $K = \operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{2}$, $\beta = (1-\alpha)\pi/2$.

Можно переформулировать следствия 1–5 из соотношений (25) и (26) для звездообразной области. Ограничимся тем, что запишем условия инъективности, нумерация которых будет отличаться от уже приведенных выше неравенств (20)–(24) одним и двумя штрихами. В соотношениях ($24'$) и ($24''$) использовано обозначение $\varphi(z) = f_0'(z)$.

$$\big|z f_{zz} + \overline{z} f_{\overline{z}z}\big| + \big|z f_{z\overline{z}} + \overline{z} f_{\overline{z}\overline{z}}\big| \leqslant$$

$$\leqslant R(R^2 + R_\theta^2)^{1/2}(|z|^2 - R^2)^{-1}\, 2(K+1)^{-1}\, (|f_z| - K|f_{\overline{z}}|),\ \forall\, z \in B_\alpha^*; \tag{$20'$}$$

$$\big|z f_{zz} + \overline{z} f_{\overline{z}z}\big| + \big|z f_{z\overline{z}} + \overline{z} f_{\overline{z}\overline{z}}\big| \leqslant$$

$$\leqslant R\big[(R^2 + R_\theta^2)^{1/2} - |R_\theta|\big](|z|^2 - R^2)^{-1}\, \big(|f_z| - K|f_{\overline{z}}|\big),\ \forall\, z \in B_\alpha^*; \tag{$20''$}$$

$$\Big|z\frac{f''(z)}{f'(z)}\Big| \leqslant \frac{2}{K+1}\,\frac{R(R^2 + R_\theta^2)^{1/2}}{|z|^2 - R^2}, \quad \forall\, z \in B_\alpha^*; \tag{$21'$}$$

$$\Big|z\frac{f''(z)}{f'(z)}\Big| \leqslant \frac{R\big[(R^2 + R_\theta^2)^{1/2} - |R_\theta|\big]}{|z|^2 - R^2}, \quad \forall\, z \in B_\alpha^*; \tag{$21''$}$$

$$|f_z - a| + |f_{\overline{z}} - b| \leqslant$$

$$\leqslant R(R^2 + R_\theta^2)^{1/2}|z|^{-2}\, 2(K+1)^{-1}\, (|a| - K|b|), \quad \forall\, z \in B_\alpha^*; \tag{$22'$}$$

$$|f_z - a| + |f_{\overline{z}} - b| \leqslant R\big[(R^2 + R_\theta^2)^{1/2} -$$

$$|R_\theta|\big]\,|z|^{-2}\,(|a|-K|b|), \quad \forall\, z\in B^*_\alpha; \tag{22''}$$

$$|f_z-a|\leqslant R(R^2+R^2_\theta)^{1/2}|z|^{-2}\,2(K+1)^{-1}\,|a|, \quad \forall\, z\in B^*_\alpha; \tag{23'}$$

$$|f_z-a|\leqslant R\big[(R^2+R^2_\theta)^{1/2}-|R_\theta|\big]\,|z|^{-2}\,|a|, \quad \forall\, z\in B^*_\alpha; \tag{23''}$$

$$\begin{cases} \Big|\dfrac{f_z(z)}{f'_0(z)}-1\Big|\leqslant\dfrac{2\varepsilon}{K+1}\,\dfrac{R(R^2+R^2_\theta)^{1/2}}{|z|^2}, \quad 0<\varepsilon<1;\\ \Big|z\dfrac{f''_0(z)}{f'_0(z)}-1\Big|\leqslant\dfrac{2(1-\varepsilon)}{K+1}\,\dfrac{R(R^2+R^2_\theta)^{1/2}}{|z|^2-R^2}, \quad \forall\, z\in B^*_\alpha; \end{cases} \tag{24'}$$

$$\begin{cases} \Big|\dfrac{f_z(z)}{f'_0(z)}-1\Big|\leqslant\varepsilon R\,\dfrac{(R^2+R^2_\theta)^{1/2}-|R_\theta|}{|z|^2}, \quad 0<\varepsilon<1;\\ \Big|z\dfrac{f''_0(z)}{f'_0(z)}-1\Big|\leqslant(1-\varepsilon)R\,\dfrac{(R^2+R^2_\theta)^{1/2}-|R_\theta|}{|z|^2-R^2}, \quad \forall\, z\in B^*_\alpha; \end{cases} \tag{24''}$$

здесь $z=|z|e^{i\theta}$, $|z|>R$, $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$.

Расмотрим несколько примеров.

**Пример 1.** Пусть звездообразная область $B^*(1)$ – внешность эллипса с полуосями $a_0>0$, $b_0>0$ и $b_0>a_0$. Тогда $R^2=R^2(\theta)=a_0^2\cos^2\theta+b_0^2\sin^2\theta$, $R_\theta=dR/d\theta=c^2\sin 2\theta/2R$, где $c^2=b_0^2-a_0^2$, и

$$\frac{R_\theta}{R}=\frac{c^2\mathrm{tg}\theta}{b_0^2\mathrm{tg}^2\theta+a_0^2}.$$

Функция $R_\theta/R$ на отрезке $[0,2\pi]$ имеет один максимум в точке $\theta_0$, $\mathrm{tg}\theta_0=b_0/a_0$. Поэтому $Q=\max\limits_\theta R_\theta/R=(1-\mu^2)/2\mu$, где $\mu=a_0/b_0<1$. Коэффициент квазиконформности отражения $\widetilde{\lambda}(z)$ относительно кривой $\mathcal{L}=\partial B^*(1)$ равен $K(Q)=1+2Q^2+2Q(1+Q^2)^{1/2}=b_0^2/a_0^2>1$. В случае $\mu=a_0/b_0>1$ величина $Q$ равна $(\mu^2-1)/2\mu$, а коэффициент $K=a_0^2/b_0^2$.

Можем записать любое из условий $(20')$–$(24')$, $(20'')$–$(24'')$, (25)–(26) для внешности эллипса $B^*(1)$. Например, соотношение $(21')$ в предположении $\mu=a_0/b_0<1$ будет выглядеть так

$$\Big|z\frac{f''(z)}{f'(z)}\Big|\leqslant\frac{2a_0^2}{b_0^2+a_0^2}R^2\;\frac{\big(1+\big(\frac{R_\theta}{R}\big)^2\big)^{1/2}}{R^2-|z|^2}, \quad \forall\, z=|z|e^{i\theta}, \quad |z|>R;$$

Частным случаем области $B^*(1)$ яляется результат отображения функцией $z(\omega)=\omega+\varepsilon/\omega$ внешности единичного круга в плоскости $\omega$ при $0<\varepsilon<1$. Тогда $\mathcal{L}=\{z:z=e^{i\varphi}+\varepsilon e^{-i\varphi},0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi\}$

ограничивает эллипс с полуосями $a=1+\varepsilon$, $b=1-\varepsilon$. Вычисления дают $Q=2\varepsilon/(1-\varepsilon^2)$, $K=(1+\varepsilon)^2/(1-\varepsilon)^2$.

**Пример 2.** Через $B^*(2)$ обозначим внешность “подпорченного” эллипса, получающегося из внешности единичного круга в плоскости $\omega$ с помощью отображения $z=\omega+\varepsilon_1/\omega+\varepsilon_2/\omega^2$ при $0<\varepsilon_1$, $\varepsilon_2<1$. Тогда $\mathcal{L}=\{z : z=e^{i\varphi}+\varepsilon e^{-i\varphi}, 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi\}$. Обозначим $z\big|_{\mathcal{L}}=R(\theta)e^{i\theta}$. Имеют место равенства

$$\mathrm{tg}\theta=\big[(1-\varepsilon_1)\sin\varphi-\varepsilon_2\sin 2\varphi\big]\big/\big[(1+\varepsilon_1)\cos\varphi+\varepsilon_2\cos 2\varphi\big],$$

$$R(\theta)=\widehat{R}(\varphi)=\Big\{\big[(1+\varepsilon_1)\cos\varphi+\varepsilon_2\cos 2\varphi\big]^2+$$

$$+\big[(1-\varepsilon_1)\sin\varphi-\varepsilon_2\sin 2\varphi\big]^2\Big\}^{1/2}.$$

Вычисления дают

$$\Big|\frac{R_\theta}{R}\Big|=\Big|\frac{2\varepsilon_1\sin 2\varphi+3\varepsilon_2\sin 3\varphi+\varepsilon_1\varepsilon_2\sin\varphi}{1-\varepsilon_1^2-2\varepsilon_2^2-3\varepsilon_1\varepsilon_2\cos\varphi-\varepsilon_2\cos 3\varphi}\Big|.$$

Оценим $\max\limits_\theta|R_\theta/R|$ при условии $\theta'_\varphi>0$, что эквивалентно $1-\varepsilon_1^2-2\varepsilon_2^2-3\varepsilon_1\varepsilon_2-\varepsilon_2>0$:

$$Q=\max_\theta|R_\theta/R|\leqslant\frac{2\varepsilon_1+3\varepsilon_2+\varepsilon_1\varepsilon_2}{1-\varepsilon_1^2-2\varepsilon_2^2-3\varepsilon_1\varepsilon_2-\varepsilon_2}=Q_0.$$

Для коэффициента квазиконформности $K$ получаем оценку $K(Q)<K_0(Q_0)=1+2Q_0^2+2Q_0(1+Q_0^2)^{1/2}$.

Отметим, что в работе [12] Ф. Г. Авхадиев получил следствие из $(\varphi,\psi)$-условия (1) для внешности эллипса $B^*(1)$, положив $\varphi(z)=\tilde{c}h(\tilde{c}z+\tilde{d}\bar{z})$, $\psi(z)=\tilde{d}\cdot h(\tilde{c}z+\hat{d}\bar{z})$, где $\tilde{c}=(a_0+b_0)/2$, $\hat{d}=(b_0-a_0)/2$, $h(z)\neq 0$ – любая регулярная в $B^*(1)$ функция, удовлетворяющая условию для произвольного $z=x+iy\in B^*(1)$, $r^2(z)=x^2/a_0^2+y^2/b_0^2$:

$$|zh'(z)|(r^2(z)-1)+|f'(z)-h(z)|r^2(z)\leqslant a_0|h(z)|/b_0.$$

**6. Условия квазиконформной продолжимости.** В данном разделе статьи будем предполагать, что модуль комплексного отклонения отделен от бесконечности числом $\tilde{k}$, т.е. справедливо двустороннее неравенство

$$1\leqslant k\leqslant|\mu_{\tilde{\lambda}}|=|\tilde{\lambda}_{\overline{z}}|/|\tilde{\lambda}_z|\leqslant\tilde{k}<\infty,$$

что эквивалентно

$$\widetilde{K} \leqslant \mathbb{D}_{\tilde{\lambda}} \leqslant K, \ \widetilde{K} = (\tilde{k}+1)/(\tilde{k}-1).$$

Для звездообразных областей, например, как отмечено в пункте 2, это означает двустороннюю оценку для величины $|R_\theta|/R$. Обозначим

$$\tilde{q}_1(\rho) = (\rho q - 1)/(\rho - q), \ \tilde{q}_2(\rho) = (\rho^2 q - 2\rho + q)/(\rho^2 - \rho q),$$

$$\tilde{q}_3(\rho) = (\rho^2 - 1)/(\rho^2 q - 2\rho + q), \tag{27}$$

здесь $2k/(k^2+1) < q < 1$, $\rho = |\mu_{\tilde{\lambda}}|$ – переменная величина, меняющаяся в промежутке $[k, \tilde{k}]$. Заметим, что $\tilde{q}_1(\rho) < 1$, $\tilde{q}_3(\rho) > 1$ при дюбом $\rho \in [k, \tilde{k}]$. Положим

$$q_1 = \max_\rho \tilde{q}_1(\rho) = (\tilde{k}q - 1)/(\tilde{k} - q),$$

$$q_2 = \min_\rho \tilde{q}_2(\rho) = (k^2 q - 2k + q)/(k^2 - kq),$$

$$q_3 = \max_\rho \tilde{q}_3(\rho) = (k^2 - 1)/(k^2 q - 2k + q). \tag{28}$$

Под допустимой областью первого типа будем понимать область, при определении которой условие (9) заменено на

$$q_1 q_2^{-1} |dz| > r^{-1} |\delta_{\overline{z}}(z_r)| \, |dz_r|. \tag{29}$$

Незначительным изменением доказательства теоремы 1 с сохранением прежних обозначений можно получить следующее утверждение.

**Теорема 4.** *Пусть $f_z$, $f_{\overline{z}} \in C(B)$. Функция $f(z)$ инъективна в допустимой области первого типа и $(1+q)/(1-q)$ – квазиконформно продолжима внутрь кривой $\mathcal{L}$, если найдутся две функции $\varphi(z)$, $\psi(z) \in C^1(B)$, $\varphi(\infty) = a$, $\psi(\infty) = b$, $|\varphi(z)| > q_s |\psi(z)|$ для любого $z \in B$ и выполняется условие*

$$|f_z - p\varphi| + q_1 |f_{\overline{z}} - \bar{p}\psi| + |\delta\varphi_z \alpha + \bar{\delta}\psi_z \beta| + q_1 |\delta\varphi_{\overline{z}}\alpha + \bar{\delta}\psi_{\overline{z}}\beta| \leqslant$$

$$\leqslant |\delta_{\overline{z}}| q_2 (|\varphi| - q_3 |\psi|), \tag{30}$$

*для любого* $z_r \in B$. *Здесь* $2k/(k^2+1) < q < 1$, *а постоянные* $q_i$ $i = \overline{1,3}$, *заданы в* (28).

Остановимся только на тех моментах доказательства теоремы 4, которые отличны от рассуждений в теореме 1. Из (30) следует, что

$$q_1\big(|f_z(z_r)| - |f_{\overline{z}}(z_r)|\big) \geqslant$$

$$\geqslant q_1|p(z_r)|\big(|\varphi(z_r)| - |\psi(z_r)|\big) - |\delta_{\overline{z}}(z_r)|q_1\big(|\varphi(z_r)| - q_3|\psi(z_r)|\big),$$

откуда в силу условий теоремы 4 и требования (29)

$$|f_z(z_r)| - |f_{\overline{z}}(z_r)| \geqslant \big(|p(z_r)| - q_2 q_1^{-1}|\delta_{\overline{z}}(z_r)|\big)\big(|\varphi(z_r)| - q_3|\psi(z_r)|\big) > 0.$$

Значит, функция $g(z)$ локально инъективна в $\overline{B}$.

Так как значения постоянных $q_1$, $q_2$, $q_3$ не влияют на выкладки, приводящие от соотношения (10) к условию (14), то аналогичными рассуждениями получим неравенство

$$|g_z - \varphi_1| + q_1|g_{\overline{z}} - \psi_1| + |\delta\varphi_{1_z} + \bar{\delta}\psi_{1_z}| + q_1|\delta\varphi_{1_{\overline{z}}} + \bar{\delta}\psi_{1_{\overline{z}}}| <$$

$$< |\delta_{\overline{z}}|q_2\big(|\varphi_1| - q_3|\psi_1|\big), \quad \forall\, z \in B,$$

являющееся следствием (30). Из (30) и (28) имеем

$$|g_z - \varphi_1| + \tilde{q}_1(\rho)|g_{\overline{z}} - \psi_1| + |\delta\varphi_{1_z} + \bar{\delta}\psi_{1_z}| + \tilde{q}_1(\rho)|\delta\varphi_{1_{\overline{z}}} + \bar{\delta}\psi_{1_{\overline{z}}}| <$$

$$< |\delta_{\overline{z}}|\tilde{q}_2(\rho)\big(|\varphi_1| - \tilde{q}_3(\rho)|\psi_1|\big), \quad \forall\, z \in B. \tag{31}$$

Теперь покажем, что функция $G(\zeta)$ является локально инъективной для $\zeta \in B^-$ и $|\mu_G(\zeta)| \leqslant q < 1$ для $\zeta \in \overline{B}^{\,-}$. Это и будет означать возможность $(1+q)/(1-q)$ квазиконформного продолжения функции $g(z)$ в область $\overline{B}^{\,-}$. Неравенство $|\mu_\zeta(G)| \leqslant q$ эквивалентно соотношению

$$\rho^2 + r^2 + 2\rho r\cos(\theta - \sigma) \leqslant q^2\big(1 + r^2\rho^2 + 2r\rho\cos(\theta - \sigma)\big),$$

где $|\mu_\lambda(z)| = \rho \in [k, \tilde{k}]$, $r = |\mu_{\hat{G}}(z)| > 0$. При произвольных значениях $\theta$, $\sigma$ это приводит к требованию знакопостоянства квадратного трехчлена

$$r^2(1 - q^2\rho^2) + (1 - q^2)2\rho r\cos(\theta - \sigma) + (\rho^2 - q^2) \leqslant 0,$$

которое выполняется при $q > k^{-1} \geqslant \rho^{-1}$, $r^{-1} \leqslant \tilde{q}_1(\rho) < 1$. С учетом равенства $|\lambda_z| = \rho^{-1}|\lambda_{\overline{z}}|$ видим, что для справедливости условия $r^{-1} \leqslant \tilde{q}_1(\rho)$ достаточно, чтобы

$$|g_z - \varphi_1| + \tilde{q}_1(\rho)|g_{\overline{z}} - \psi_1| + |\delta\varphi_{1_z} + \bar{\delta}\psi_{1_z}| + \tilde{q}_1(\rho)|\delta\varphi_{z_{\overline{z}}} + \bar{\delta}\psi_{1_{\overline{z}}}| \leqslant$$
$$\leqslant |\delta_{\overline{z}}| \left( \left(\tilde{q}_1(\rho) - \rho^{-1}\right)|\varphi_1| - (\tilde{q}_1(\rho)\rho^{-1} + 1)|\psi_1| \right),$$

которое справедливо в силу (31), т.к. с учетом (27) $\tilde{q}_1(\rho) - \rho^{-1} = \tilde{q}_2(\rho)$, а $(\tilde{q}_1(\rho)\rho^{-1} + 1)/\left(\tilde{q}_1(\rho) - \rho^{-1}\right) = \tilde{q}_3(\rho)$. Доказательство закончено.

Сравним условия (30) и (1). Пусть $k$, $\tilde{k} \to \infty$. Тогда $\tilde{q}_1(\rho) \to q$, $\tilde{q}_2(\rho) \to q$, $\tilde{q}_3(\rho) \to q^{-1}$, и мы получаем условие Ф. Г. Авхадиева $(1+q)/(1-q)$ – квазиконформной продолжимости внутрь единичного круга. Теперь в условии (30) устремим $q \to 1$. Полагая в (31) $q = 1$, получим аналогичное (31) неравенство, где вместо $\tilde{q}_1(\rho)$, $\tilde{q}_2(\rho)$, $\tilde{q}_3(\rho)$ стоят, соответственно, величины: 1, $(\rho-1)/\rho$, $(\rho+1)/(\rho-1)$. Но $\min(\rho-1)/\rho = (k-1)/k = 2/(K+1)$, $\max(\rho+1)/(\rho-1) = (k+1)/(k-1) = K$ для $\rho \in [k, \tilde{k}]$. Возвращаясь обратным ходом от (31) к (30), убеждаемся, что при $q \to 1$ условие (30) превращается в (10).

Из теоремы 4 можно сформулировать следствия, аналогичные следствиям 1–5. Например, следствие $2^0$ будет выглядеть так:

**Следствие $2^0$.** *Аналитическаая в $B \setminus \infty$ функция $f(z)$ однолистна в допустимой области $B$ первого типа (при этом (9) заменено на требование (29), и $(1+q)/(1-q)$ – квазиконформно продолжима внутрь кривой $\mathcal{L}$, если выполняется условие*

$$\left|\frac{f_{zz} \circ z_r}{f_z \circ z_r}\right| + \left|\frac{\Phi''(z_r)}{\Phi'(z_r)}\right| \leqslant \left|\frac{\delta\overline{z} \circ z_r}{\delta \circ z_r}\right| \frac{k^2 q - 2k + q}{k^2 - kq} \frac{1}{r|\Phi'(z_r)|}, \quad \forall\, z_r \in B. \tag{$21^0$}$$

## Литература


1. Ф. Г. Авхадиев, *Достаточные условия однолистности квазиконформных отображений.* — Матем. заметки **18, No. 6** (1975), 793–802.
2. L. V. Ahlfors, G. Weil, *A uniqueness theorem for Beltrami equations.* — Proc. Am. Math Soc. **13, No. 6** (1962), 975–978.
3. Ф. Г. Авхадиев, *Конформные отображения и краевые задачи.* Казанский фонд "Математика"1996, 215с.
4. J. Becker, *Löwnershe Differentialgleichung und quasikonform fortsetsbare schlichte Functionen.* — J. Reine Angew. Math. **255** (1972), 23–43.

5. J. Becker, *Löwnershe Differentialgleichung und Schlichtheitscriterien.* — Math. Ann **202, No. 4** (1973), 321–325.
6. Л. А. Аксентьев, *Условия однолистности решения основных обратных краевых задач.* — УМН **15, No. 6** (1960), 119–124.
7. Ф. Г. Авхадиев, Л. А. Аксентьев, *Основные результаты в достаточных условиях однолистности аналитических функций.* — УМН **30, No. 4** (1975), 3–60.
8. Ф. Г. Авхадиев, Л. А. Аксентьев, *Основные результаты в достаточных условиях конечнолистности аналитических функций.* — Изв. вузов, Математика **No. 10** (1986), 3–13.
9. Ф. Г. Авхадиев, Л. А. Аксентьев, А. М. Елизаров, *Достаточные условия конечнолистности аналитических функций и их приложения.* Итоги науки и техники, Матем. анализ, М.: ВИНИТИ, 1987, т. 25, 3–121.
10. Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного.* Наука, М. (1966), 628с.
11. С. Стоилов, *Лекции о топологических принципах теории аналитических функций.* ИИЛ., М. (1964), 227с.
12. Ф. Г. Авхадиев, *О методе локально гомеоморфного продолжения в теории достаточных условий однолистности.* Тр. семин. по краевым задачам, Изд-во Каз. ун-та, Казань, 1983, вып. 20, 3–10.
13. Maria Fait, J. Krzyz, J. Zygmunt, *Explicit quasiconformal extensions for some classes of univalent functions.* — Comm. Math. Heiv. **51** (1976), 279–285.
14. D. A. Brannau, W. E. Kirwan, *On some classes of bounded univalent functions.* — J. London Math. Soc. **1, part 3** (1969), 431–443.
15. Л. А. Аксентьев, П. Л. Шабалин, *Условия однолистности с квазиконформным продолжением и их применение.* — Изд. вузов, Математика **No. 2(249)** (1983), 6–14.
16. Л. А. Аксентьев, П. Л. Шабалин, *Условия однолистности в звездных и выпуклых областях.* Тр. семин. по краевым задачам, Изд-во Каз. ун-та, Казань, 1983, вып. 20, 35–42.
17. Ф. Ф. Майер, М. А. Севодин, *Условия однолистности в областях с выпуклым дополнением.* Тр. семин. по краевым задачам, Изд-во Каз. ун-та, Казань, 1985, вып. 22, 151–160.
18. М. А. Севодин, *Условия однолистности в спиралеобразных областях.* Тр. семин. по краевым задачам, Изд-во Каз. ун-та, Казань, 1987, вып. 23, 193–200.

Patsevich E. L. Injectivity criteria for some domains. I.

New conditions are given for continuously differentiable mappings of some plane domains to be injective. In the case of plane circular domain these criteria coincide with well-known conditions. The method of locally homeomorphic extension is used.

Новгородский
государственный
университет
patsev@pdmi.ras.ru

Поступило 15 декабря 1997 г.