Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 255, 1998 г.

Е. Л. Пацевич

УСЛОВИЯ ИНЪЕКТИВНОСТИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ОБЛАСТЕЙ. II

Мы используем нумерацию, обозначения и определения из [1].

7. Отказ от условия монотонности метрики $|dz|\,|\delta(z)|^{-1}$ по линиям уровня. Допустимые области третьего типа.

Если при определении допустимой области первого типа отказаться от требования (7), оставляя остальное неизменным, то такие области будем называть допустимыми областями третьего типа. Откажемся также от условия существования конечных пределов (II), оставив в силе требования (I) и (III). Всюду далее буквами a и b обозначены постоянные, определенные в (I).

Теорема 5. *Пусть f_z, $f_{\overline{z}} \in C(B)$. Функция $f(z)$ инъективна в допустимой области B третьего типа, если найдутся две функции $\varphi(z)$, $\psi(z| \in C^1(B)$, $\varphi(\infty) = a$, $\psi(\infty) = b$, $|\varphi(z) > K|\psi(z)|$ для любого $z \in B$, и для каждого $z_r \in B$ выполняется условие*

$$\big|(f_z \circ z_r) - p(z_r)(\varphi \circ z_r)\big| + \big|(f_{\overline{z}} \circ z_r) - \overline{p(z_r)}(\psi \circ z_r)\big| +$$
$$\big|\delta(z) r(\varphi_z \circ z_r) + \overline{\delta}(z) r(\psi_z \circ z_r)\big| + \big|\delta(z) r(\varphi_{\overline{z}} \circ z_r) + \overline{\delta}(z) r(\psi_{\overline{z}} \circ z_r)\big| \leqslant$$
$$\leqslant |\delta_{\overline{z}} \circ z_r| 2(K+1)^{-1}\big(|\varphi \circ z_r| - K|\psi \circ z_r|\big), \qquad (32)$$

здесь $p(z_r) = r\Phi'(z_r)$, $\delta(z) = \widetilde{\lambda}(z) - z$, K – коэффициент квазиконформности отражения $\widetilde{\lambda}(z)$.

Для доказательства теоремы 5 достаточно заметить, что локальная инъективность функции $f(z)$ в $\overline{B}$ доказывается также, как в теореме 1, а локальная инъективность функции $G(\zeta)$ в области $\overline{B}^-$ обосновывается с помощью соотношения (14), справедливость которого вытекает из (32).

Из теоремы 5 можно получить следствия, аналогичные следствиям 1–5. Не формулируя этих утверждений, ограничимся тем, что запишем условия инъективности из них, соответствующие неравенствам (20), (21), (24). Условия (22) и (23) остаются неизменными для допустимых областей третьего типа, т.е. следствия 3 и 4 из теоремы 1 справедливы и при отказе от условия

(7), накладывающего жесткие условия на кривизну линий уровня $\widetilde{\mathcal{L}}_\theta(\widetilde{\Gamma}_\theta)$.

$$\big|\delta(z)(f_{zz}\circ z_r)e^{-iJ}+\overline{\delta}(z)(f_{\overline{z}z}\circ z_r)e^{iJ}\big|+\big|\delta(z)(f_{z\overline{z}}\circ z_r)e^{-iJ}+\overline{\delta}(z)(f_{\overline{z}\overline{z}}\circ z_r)e^{iJ}\big|$$

$$+|\delta(z)|\left|\frac{\Phi''(z_r)}{\Phi'(z_r)}\right|\big((|f_z\circ z_r|)+|(f_{\overline{z}}\circ z_r)|\big)\leqslant$$

$$\leqslant(\delta_{\overline{z}}\circ z_r)2(K+1)^{-1}\big(|f_z\circ z_r|-K|f_{\overline{z}}\circ z_r|\big); \qquad (33)$$

$$\left|\frac{f_{zz}\circ z_r}{f_z\circ z_r}\right|+\left|\frac{\Phi''(z_r)}{\Phi'(z_r)}\right|\leqslant\left|\frac{(\delta_{\overline{z}}\circ z_r)}{r(\delta\circ z)}\right|\frac{2}{K+1}; \qquad (34)$$

$$\begin{cases}\left|\dfrac{1}{r|\Phi'(z_r)|}\,\dfrac{(f_z\circ z_r)}{(\varphi\circ z_r)}-1\right|\leqslant\dfrac{|(\delta_{\overline{z}}\circ z_r)|}{r|\Phi'(z_r)|}\,\dfrac{2\varepsilon}{K+1};\\ \left|\dfrac{(\varphi_z\circ z_r)}{(\varphi\circ z_r)}\right|\leqslant\dfrac{|(\delta_{\overline{z}}\circ z_r)|}{r|(\delta\circ z)|}\,\dfrac{2(1-\varepsilon)}{K+1};\ 0<\varepsilon<1.\end{cases} \qquad (35)$$

Неравенства (33)–(35) должны выполняться для любого $z_r\in B$, здесь $J=J(z,r)=\arg\Phi'(z_r)$.

Поскольку всякая допустимая область первого типа является и областью третьего типа, мы имеем право записать условия (33), (34), (35) для области первого типа. Тогда получатся неравенства, несколько более сильные, чем известные. Например, запишем соотношение (34) для внешности круга D^-:

$$\left|rz\cdot\frac{(f_{zz}\circ rz)}{(f_z\circ rz)}\right|\leqslant\frac{1}{r^2(|z|^2-1)},\quad |z|>1,\quad 1<r<\infty. \qquad (36)$$

Правая часть (36) больше правой части в неравенстве Беккера, причем условие $[r^2(|z|^2-1)]^{-1}>[r^2|z|^2-1]^{-1}$ эквивалентно условию (7), записанному для области D^-. Таким образом, теорема 5 и все следствия из нее являются некоторым усилением (φ,ψ)-условий, получающихся из теоремы 1, но только для тех областей, для которых (7) справедливо. В остальных случаях правая часть (φ,ψ)-условия из теоремы 5 будет больше (меньше) правой части соответствующего (φ,ψ)-условия из теоремы 1 для тех z, для которых (7) выполняется (не выполняется). Этот эффект достигается за счет отказа от традиции писать условие инъективности в виде соотношения для величин, вычисленных в одной точке.

8. Спиралеобразные области. Область B^- называется α-спиралеобразной порядка σ (пишем $B^- \in S_{\sigma,\alpha}$), если функция $h(\omega)$, $h(0) = 0$, конформно отображающая единичный круг D на область B^-, удовлетворяет условию $\left|\arg\left(e^{i\sigma}\omega h'(\omega)/h(\omega)\right)\right| \leqslant \alpha\pi/2$, $0 < \alpha < 1$, $|\sigma| < \alpha\pi/2$, $\omega \in D$. В [2] показано, что всякая α-спиралеобразная функция $h(\omega)$ порядка σ однолистна в D. Таким образом, $S_{\sigma,\alpha}$ – совокупность всех α-спиралеобразных функций порядка σ, – образует подмножество класса S. Пусть $\mathcal{L}$ – граница области $B^- \in S_{\sigma,\alpha}$. Внешность кривой $\mathcal{L}$ обозначим $B_{\sigma,\alpha}$. Предположим, что $\omega h'(\omega)/h(\omega)$ принадлежит классу H^1. Тогда $h'(\omega) \in H^1$ (см. [3]), и по теореме Ф. Рисса ([4], с. 395) функция $h(\omega)$ непрерывна в замкнутом круге $\overline{D}$, абсолютно непрерывна на окружности $|\omega| = 1$ и почти всюду на $|\omega| = 1$ имеет место равенство $dh(e^{it})/dt = ie^{it}h'(e^{it})$. Здесь под $h'(e^{it})$ понимаются предельные значения производной при стремлении ω к e^{it} по некасательным путям.

Рассмотрим покрытие плоскости z семейством логарифмических спиралей $\widetilde{\Gamma}_\theta = \{z : \operatorname{Im}[(1 + itq\sigma)\ln z] = \theta, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$. Известно (например, [5]), что каждой граничной точке $z_t = h(e^{it})$ области $B^- \in S_{\sigma,\alpha}$ будет соответствовать некоторое фиксированное θ, причем разным точкам z_{t_1}, z_{t_2}, $t_1 \neq t_2$ соответствуют различные θ_1, θ_2, $\theta_1 \neq \theta_2$. Этим соответствием определяется однозначная функция $t(\theta)$, которая будет дифференцируема почти всюду на $[0, 2\pi]$. Поэтому соотношение $z_t = h(e^{it(\theta)}) = R(\theta)e^{i\mu(\theta)}$, $\theta \in [0, 2\pi]$, можно рассматривать как параметрическое уравнение границы области $B_{\sigma,\alpha}$. Антиквазиконформное отражение $\widetilde{\lambda}(z) = R^2(\theta)e^{2i\mu(\theta)}/z$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, $\mu(\theta) + \operatorname{tg}\sigma \ln R(\theta) = \theta$, (см. [6]) плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ относительно кривой $\mathcal{L}$ части спирали с фиксированным "номером" θ, лежащей внутри кривой $\mathcal{L}$, ставит в соответствие вторую часть этой же спирали, лежащую вне кривой $\mathcal{L} : \widetilde{\lambda}(B^-) = B_{\sigma,\alpha}$, $\widetilde{\lambda}(B_{\sigma,\alpha}) = B^-$, $\widetilde{\lambda}(\widetilde{\lambda}(z)) = z$. Дополнительно предположим, что $R(\theta) \in C^1[0, 2\pi]$, тогда $\mu(\theta)$ также будет принадлежать $C^1[0, 2\pi]$.

"Обобщенные" линии уровня для области $B_{\sigma,\alpha}$ построим с помощью "спиралеобразного" подобия, начиная с $\Gamma_1 = \mathcal{L}$. Именно, пусть $\Gamma_\rho = \{z : z = |z|\rho e^{i(\arg z - \operatorname{tg}\sigma \ln \rho)}$, $\arg z + \operatorname{tg}\sigma \ln |z| = \theta$, $1 < \rho < \infty\}$. Добавок к аргументу z выбирается согласно желанию оставить точку z_ρ, "пошевелив" ее модуль на ρ, на той же спирали, что и точка $z \in \mathcal{L}$. Отображение $Z_r = Z_r(z)$ построим согласованно с обобщенными линиями уровня: $Z_r = zre^{-i\operatorname{tg}\sigma \ln r}$. Тогда $\tau_r(z) = dZ_r/dz = re^{-i\operatorname{tg}\sigma \ln r}$, $\Phi(Z_r) = z(Z_r) = Z_r \cdot r^{-1} e^{i\operatorname{tg}\sigma \ln r}$, $\Phi'(Z_r) = r^{-1}\, e^{iJ}$, $J = \operatorname{tg}\sigma \ln r$, $\Phi''(Z_r) = 0$. С точки зрения вида производной $\tau_r(z)$ область $B_{\sigma,\alpha}$ – это следующий шаг по сравнению с α-звездообразной областью B^*_α, т.к. $\arg \tau_r(z) = -\operatorname{tg}\sigma \ln r \neq 0$. Для проверки допустимости области $B_{\sigma,\alpha}$ по третьему типу вычислим необходимые величины (ср. [6]). Для удобства обозначений будем писать $z_r(z)$ вместо $Z_r(z)$:

$$\widetilde{\lambda}_z(z) = iN(\theta)\widetilde{\lambda}(z)/z; \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{L};$$

$$\widetilde{\lambda}_{\overline{z}}(z) = -\bigl[1 + iN(\theta)\bigr] \exp(-2i\sigma)\widetilde{\lambda}(z)/\overline{z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{L}; \tag{37}$$

$$\delta(z) = \widetilde{\lambda}(z) - z = \bigl(R^2(\theta)\, e^{2i\mu(\theta)} - z^2\bigr)/z, \quad \arg z + \operatorname{tg}\sigma \ln|z| = \theta;$$

$$\delta(z_r) = \widetilde{\lambda}(z_r) - z_r = \bigl(R^2(\theta)\, e^{2i\mu(\theta)} - z_r^2\bigr)/z_r, \quad \arg z_r + \operatorname{tg}\sigma \ln|z_r| = \theta;$$

здесь $N(\theta) = \operatorname{tg}\sigma - R_\theta \cos^{-2}\sigma/R$, $R_\theta = dR/d\theta$, $R = R(\theta)$. Нетрудно показать, что $\bigl|\arg e^{i\sigma}\, e^{it}\, h'(e^{it})/h(e^{it})\bigr| = \bigl|\arg(1 + iN(\theta)\bigr|$, откуда по определению α-спиралеобразной области порядка σ имеем $|N(\theta)| \leqslant \operatorname{tg}(\alpha\pi/2)$, а модуль комплексного отклонения $|\mu_{\widetilde{\lambda}}| = |\widetilde{\lambda}_{\overline{z}}|/|\widetilde{\lambda}_z| = (1 + N^{-2}(\theta))^{1/2} \geqslant (\sin(\alpha\pi/2))^{-1} = k$. Тогда $K = (k+1)/(k-1) = \operatorname{ctg}^2\beta/2$, где $\beta = \pi/2 - \alpha\pi/2$. Условие (8) эквивалентно соотношению $|\widetilde{\lambda}(z)|/|z| \geqslant |\widetilde{\lambda}(z_r)|/|z_r|$, которое справедливо при $r^2 \geqslant 1$. С учетом неравенства $|N(\theta)| \leqslant \operatorname{tg}(\alpha\pi/2)$ для выполнения требования (9) достаточно выполнения условия $|\cos(\alpha\pi/2)|^{-1} < (1 - \sin(\alpha\pi/2))^{-1}$, которое справедливо при $0 < \alpha < 1$. Следовательно, области $B_{\sigma,\alpha}$ при $0 < \alpha < 1$, $|\sigma| < \alpha\pi/2$, являются допустимыми областями третьего типа. Условие (7), вообще говоря, не является справедливым для $B_{\sigma,\alpha}$ ни при каком $\sigma > 0$.

Буквами $\widetilde{a}$, $\widetilde{b}$ обозначим постоянные I для $f(z)$, заданной в $B_{\sigma,\alpha}$:

$$\widetilde{a} = \lim_{z_r \to \infty} \bigl[(f_z \circ z_r)e^{-i\operatorname{tg}\sigma \ln r}\bigr] \neq 0, \quad \widetilde{b} = \lim_{z_r \to \infty} \bigl[(f_{\overline{z}} \circ z_r)e^{i\operatorname{tg}\sigma \ln r}\bigr],$$

где $|\widetilde{a}| > \operatorname{ctg}^2(\beta/2)|\widetilde{b}|$, $\beta = (1-\alpha)\pi/2$, и переформулируем теорему 5 и следствия из нее для спиралеобразных областей.

Теорема 6. *Пусть $B_{\sigma,\alpha}$ – α-спиралеобразная область порядка σ. Функция $f(z)$ с непрерывными в области $B_{\sigma,\alpha}$ производными f_z, $f_{\overline{z}}$ будет инъективной в области $B_{\sigma,\alpha}$, если найдутся две функции*

$\varphi(z),\ \psi(z) \in C^1(B_{\sigma,\alpha}),\ \varphi(\infty) = \widetilde{a},\ \psi(\infty) = \widetilde{b},\ |\varphi(z)| > \mathrm{ctg}^2\frac{\beta}{2}\ |\psi(z)|$ *для любого* $z \in B_{\sigma,\alpha}$, *и выполняется условие*

$$\big|(f_z\circ z_r) - e^{i\mathrm{tg}\sigma\ln r}(\varphi\circ z_r)\big| + \big|(f_{\overline{z}}\circ z_r) - e^{-i\mathrm{tg}\sigma\ln r}(\psi\circ z_r)\big| + \big|\delta(z)r(\varphi_z\circ z_r) +$$

$$+\overline{\delta}(z)r(\psi_z\circ z_r)\big| + \big|\delta(z)r(\varphi_{\overline{z}}\circ z_r) + \overline{\delta}(z)r(\psi_{\overline{z}}\circ z_r)\big| \leqslant$$

$$\leqslant (1+N^2(\theta))^{1/2}R^2|z|^{-2}r^{-2}2\sin^2\frac{\beta}{2}\cdot\big(|(\varphi\circ z_r)| - 2\mathrm{ctg}^2\frac{\beta}{2}|\psi\circ z_r|\big), \quad (38)$$

для любого $z_r \in B_{\sigma,\alpha}$, *здесь* $z_r = zre^{-i\theta\sigma\ln r}$, $N(\theta) = \mathrm{tg}\sigma - R_\theta\cos^{-2}\sigma/R$, $\beta = \pi/2 - \alpha\pi/2$, $\delta(z)$ *вычисляется по формуле* (37).

Пять частных случаев выбора функций φ и ψ в неравенстве (38), таких же, как в следствиях 1–5 из теоремы 1, дадут пять условий инъективности для спиралеобразных областей. Нумерация этих условий будет отличаться от соответствующих неравенств (33), (34), (22), (23), (35) волной.

$$\big|\delta(z)(f_{zz}\circ z_r)e^{-iJ} + \overline{\delta}(z)(f_{\overline{z}z}\circ z_r)e^{iJ}\big| + \big|\delta(z)(f_{z\overline{z}}\circ z_r)e^{-iJ} + \overline{\delta}(z)(f_{\overline{z}\,\overline{z}}\circ z_r)e^{iJ}\big|$$

$$\leqslant (1+N^2(\theta))^{1/2}R^2|z|^{-2}r^{-2}2\sin^2\frac{\beta}{2}\big(|(f_z\circ z_r)| - \mathrm{ctg}^2\frac{\beta}{2}|f_{\overline{z}}\circ z_r|\big), \quad (\widetilde{33})$$

$$\left|\frac{(f_{zz}\circ z_r)}{(f_z\circ z_r)}\right| \leqslant \frac{(1+N^2(\theta))^{1/2}R^2}{|z|r^3|z^2 - R^2e^{2i\mu(\theta)}|}, \quad (\widetilde{34})$$

$$\big|(f_z\circ z_r) - \widetilde{a}\,e^{i\mathrm{tg}\sigma\ln r}\big| + \Big|(f_{\overline{z}}\circ z_r) - \widetilde{b}\,e^{-i\mathrm{tg}\sigma\ln r}\Big| \leqslant \quad (\widetilde{22})$$

$$\leqslant (1+N^2(\theta))^{1/2}R^2|z|^{-2}r^{-2}2\sin^2\frac{\beta}{2}\big(|\widetilde{a}| - \mathrm{ctg}^2\frac{\beta}{2}|\widetilde{b}|\big),$$

$$\big|(f_z\circ z_r) - \widetilde{a}\,e^{i\mathrm{tg}\sigma\ln r}\big| \leqslant (1+N^2(\theta))^{1/2}R^2|z|^{-2}r^{-2}|\widetilde{a}|2\sin^2\frac{\beta}{2}, \quad (\widetilde{23})$$

$$\begin{cases} \left|e^{-i\mathrm{tg}\sigma\ln r}\dfrac{(f_z\circ z_r)}{(\varphi\circ z_r)} - 1\right| \leqslant \varepsilon 2\sin^2\dfrac{\beta}{2}(1+N^2(\theta))^{1/2}R^2|z|^{-2}\,r^{-2}, \\ 0 < \varepsilon < 1; \\ \left|\dfrac{(\varphi_z\circ z_r)}{(\varphi\circ z_r}\right| \leqslant (1-\varepsilon)2\sin^2\dfrac{\beta}{2}(1+N^2(\theta))^{1/2}R^2|z|^{-1}r^{-3}\big|z^2 - \\ - R^2\,e^{2i\mu(\theta)}\big|, \end{cases} \quad (\widetilde{35})$$

здесь $z_r = zre^{-i\mathrm{tg}\sigma\ln r}$, $J = \arg\Phi'(z_r) = \mathrm{tg}\sigma\ln r$, $R = R(\theta)$, $\theta = \arg z + \mathrm{tg}\sigma\ln|z|$, $N(\theta) = \mathrm{tg}\sigma - R_\theta\cos^{-2}\sigma/R$, $\mu(\theta) = \theta - \mathrm{tg}\sigma\ln R(\theta)$, $R_\theta =$

$dR/d\theta$. Соотношения $\widetilde{(33)}$–$\widetilde{(35)}$, $\widetilde{(22)}$, $\widetilde{(23)}$ должны выполняться для любого $z_r \in B_{\sigma,\alpha}$.

М. А. Севодин в работе [6] получил два условия однолистности регулярных в спиралеобразных областях функций: $|f'(z)-c| \leqslant |c|\mathrm{tg}\beta/2$, и $|f''(z)|/|f'(z) \leqslant \mathrm{const}(\sigma,\alpha)\cdot\rho_B(z)$, где $c \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $\rho_B(z)$ – коэффициент гиперболической метрики области $B_{\sigma,\alpha}$.

9. (P,Q) – **достаточные условия однолистности мероморфных функций. Основное утверждение.**

Метод квазиконформного продолжения, восходящий к Альфорсу и Вейлю [7], был использован рядом математиков для получения достаточных условий однолистности (см. обзор [8] и библ. к нему).

Договоримся, что в нашей терминологии мероморфная функция не обязательно означает наличие полюсов. Аналитическая функция есть мероморфная функция без полюсов.

Если функции $P(z)$ и $Q(z)$ аналитичны в области $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ и связаны со шварцианом $\{f,z\} = (f''/f')' - (1/2)(f''/f')^2$ мероморфной в B функции $f(z)$ соотношением

$$2Q(z) - P'(z) - (1/2)P^2(z) = \{f,z\}, \quad z \in B, \tag{39}$$

то однолистность $f(z)$ в B оказывается равносильной неколеблемости решения дифференциального уравнения

$$w'' + Pw' + Qw = 0. \tag{40}$$

Впервые этот факт в 1949 году использовал Нехари [9] при $P(z) \equiv 0$, $Q(z) = \{f,z\}/2$. Для внешности единичного круга $D^- = \{z : |z| > 1\}$ и локально однолистной функции $f(z)$ условие Нехари записывается в виде неравенства

$$\bigl|\{f,z\}\bigr| \leqslant 2\bigl(|z|^2 - 1\bigr)^{-1}, \quad |z| > 1. \tag{41}$$

Исследование однолистности функции $f(z)$ в терминах коэффициентов дифференциального уравнения (40) позволяет единым образом получить как условия по шварциану, так и по отношению f''/f'. Каждое условие однолистности в терминах коэффициентов P и Q (P,Q)-условие) представляет собой серию достаточных условий однолистности, т.к. выполнено при произвольном выборе функций $P(z)$ и $Q(z)$, удовлетворяющих (39). Наиболее употребительным (напр., [10], с. 73) являются четыре частных случая:

1) $P(z) \equiv 0$, $Q(z) = \{f, z\}/2$; 2) $P(z) = -f''(z)/f'(z)$, $Q(z) \equiv 0$; 3) $P(z) = -g''(z)/g'(z)$, $2Q(z) = \{f, z\} - \{g, z\}$; 4) $P(z) = -p(z, z_0) = -f''(z)/f'(z) - 2(z - z_0)^{-1}$, $Q(z) = p(z, z_0)/(z - z_0)$, $z_0 \in B \setminus \{\infty\}$. Отметим, что $p(z_0, z_0) = 0$.

Здесь $f(z)$ и $g(z)$ – произвольные мероморфные и локально однолистные функции, наличие полюсов которых согласуется с аналитичностью $P(z)$ и $Q(z)$ в области B.

Нашей целью является получение новых (P, Q) – достаточных условий однолистности мероморфных функций в некруговых плоских областях с квазиконформной границей.

При выполнении условий: 1) (6), (7), (8); 2) (6), (7), (8′); 3) (6), (8); будем соответственно говорить, что область B принадлежит типу: (W_1), (W_2), (W_3).

Нас интересуют области, в которых существуют "обобщенные" линии уровня (см. [1]), удовлетворяющие требованиям

$$|dZ_r|/|dz| \ \text{ непрерывна в } \ \overline{B}; \quad |dZ_r|/|dz| \to r \ \text{ при } \ |z| \to \infty. \tag{42}$$

Области, в которых (42) для $z_r = Z_r(z)$ выполнено, назовем областями типа $(\widetilde{W}_1)$, если они удовлетворяют условиям (7), (8), областями типа $(\widetilde{W}_2)$, если они удовлетворяют (7), (8′), и областями типа $(\widetilde{W}_3)$, если они удовлетворяют требованию (8).

Определение. *Области типа (W_j) и $(\widetilde{W}_j)$ будем называть шварциановыми областями типа j, $j = 1, 2, 3$.*

В [1] показано, что всякая звездообразная область порядка α, $0 < \alpha < 1$, является шварциановой областью первого, второго, а значит, и третьего типа, относительно "обобщенных" линий уровня: $\Gamma_1 = \mathcal{L}$; $\Gamma_\rho = \{z_\rho; z_\rho = z\rho, z \in \mathcal{L}, 1 < \rho < \infty\}$, $\widetilde{\Gamma}_\theta = \{z : \arg z = \theta, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$. В пункте 8 данной работы рассмотрен случай α-спиралеобразной области порядка σ, которая является шварциановой областью третьего типа при $\sigma > 0$ относительно "обобщенных" линий уровня вида: $\Gamma_1 = \mathcal{L}$; $\Gamma_\rho = \{z_\rho : z_\rho = z\rho e^{i\,\mathrm{tg}\sigma \ln\rho}, z \in \mathcal{L}, 1 < \rho < \infty\}$, $\widetilde{\Gamma}_\theta = \{z : \arg z + \mathrm{tg}\sigma \ln|z| = \theta, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$.

Договоримся под высказыванием "для любого z_r, принадлежащего области B", понимать предложение: "для любого $z \in B$ и любого фиксированного r, $1 < r < \infty$". Диффеоморфизм $\widetilde{\lambda}(z)$ по-прежнему будем обозначать $\lambda(z)$ при $z \in \overline{B}$ и $s(\zeta)$, если $\zeta \in \overline{B^-}$.

Теорема 7. *Пусть $f(z)$ мероморфна и локально однолистна в шварциановой области B первого (второго) типа, функции $P(z)$ и $Q(z)$ аналитичны в B и удовлетворяют для всех $z \in B$ соотношению $2Q(z) - P'(z) - (1/2)P^2(z) = \{f, z\}$. Если выполняется условие* (43), ((44)), *то $f(z)$ однолистна в B.*

$$|(\delta \circ z_r)| \; |(P \circ z_r)| + |(\delta \circ z_r)|^2 \; |(Q \circ z_r)| + |(\delta \circ z_r)| \left| \frac{\Phi''(z_r)}{\Phi'(z_r)} \right| \leqslant$$

$$\leqslant |(\delta_{\overline{z}} \circ z_r)| \, \frac{2}{K+1} \, \frac{1}{r|\Phi'(z_r)|}, \quad \forall\, z_r \in B, \tag{43}$$

$$|(\delta \circ z_r)| \; |(P \circ z_r)| + |(\delta \circ z_r)|^2 \; |(Q \circ z_r)| + |(\delta \circ z_r)| \left| \frac{\Phi''(z_r)}{\Phi'(z_r)} \right| \leqslant$$

$$\big(|\lambda_{\overline{z}} \circ z_r| - |\lambda_z \circ z_r| \big) \frac{1}{r|\Phi'(z_r)|}, \quad \forall\, z_r \in B. \tag{44}$$

Отметим, что условие (44) отличается от (43) тем, что в правой части (44) вместо величины $|(\delta_{\overline{z}} \circ z_r)| 2(K+1)^{-1}$ стоит разность $|\lambda_{\overline{z}} \circ z_r| - |\lambda_z \circ z_r|$.

Доказательство. Рассуждения будем вести по схеме [7]. Общее решение $\eta(z)$ уравнения $w'' + Pw' + Qw = 0$ имеет вид

$$\eta(z) = c_1(f(z) - c_2) \exp\left\{ -\frac{1}{2} \int P(z)dz \right\} \cdot (f'(z))^{-1/2},$$

и поэтому существуют линейно-независимые решения $\eta_1(z)$ и $\eta_2(z)$ уравнения (40), для которых $f(z) = \eta_1(z)/\eta_2(z)$, при этом

$$P(z) = -A(z)/H(z), \quad Q(z) = C(z)/H(z), \tag{45}$$

где $A(z) = \eta_1''(z)\eta_2(z) - \eta_1(z)\eta_2''(z)$, $C(z) = \eta_1''(z)\eta_2'(z) - \eta_1'(z)\eta_2''(z)$, $H(z) = \eta_1'(z)\eta_2(z) - \eta_1(z)\eta_2'(z)$. Подставив в тождества (45) локальные разложения в ряд $\eta_1(z)$ и $\eta_2(z)$ в B, и учитывая аналитичность функций $P(z)$ и $Q(z)$, получим, что функции $\eta_1(z)$ и $\eta_2(z)$ могут иметь лишь несовпадающие нули, и $\eta_1'\eta_2 - \eta_1\eta_2' \neq 0$ в области B. Таким образом, $H(z) = f'(z)\eta_2^2(z) = \big(\frac{1}{f(z)}\big)'\eta_1^2(z) \neq 0$ для $z \in B$.

При фиксированном r, $1 < r < \infty$, определим функцию

$$\mathcal{F}(z) = \big\{ g(z), \; z \in \overline{B}; \; G(z), \; z \in \overline{B^-} \big\},$$

где $g(z) = f(z_r)$, а $G(\zeta)$ определяется соотношением

$$G(\zeta) = \frac{\widetilde{\eta}_1(s(\zeta)) + (\zeta - s(\zeta))\widetilde{\eta}_{1_s}{}'(s(\zeta))}{\widetilde{\eta}_2(s(\zeta)) + (\zeta - s(\zeta))\widetilde{\eta}'_{2_s}(s(\zeta))}, \ \zeta \in \overline{B}^-, \tag{46}$$

здесь $\widetilde{\eta}_1(z) = \eta_1(z_r)$, $\widetilde{\eta}_2(z) = \eta_2(z_r)$. Числитель и знаменатель этой дроби одновременно в нуль не обращаются, иначе $H \circ s_z(\zeta) = 0$ для $s_r(\zeta) \in B$. Поэтому $G(\zeta)$ в виде (46) определена, но может обратиться в ∞. В силу соотношения $\widetilde{\eta}'_{1_z}\widetilde{\eta}_2 - \widetilde{\eta}_1\widetilde{\eta}'_{2_z} = \tau_r(z)((\eta'_1 \circ z_r)(\eta_2 \circ z_r) - (\eta_1 \circ z_r)(\eta'_2 \circ z_r)) \neq 0$ функция $G(\zeta)$ непрерывна в сферической метрике. Перепишем (46) в виде

$$G(\lambda(z)) = G(\zeta) = \widehat{G}(z) = \frac{\widetilde{\eta}_1(z) + \delta(z)\widetilde{\eta}'_{1_z}}{\widetilde{\eta}_2(z) + \delta(z)\widetilde{\eta}'_{2_z}}, \quad z \in B. \tag{47}$$

Якобиан функции $G(\zeta)$, равный $J_G(\zeta) = |G_\zeta|^2(1 - \mu_G^2(\zeta))$, будет больше нуля, если $|\mu_G(\zeta)| < 1$, $|G_\zeta| > 0$. Для $\mu_G(\zeta)$ имеем

$$\big|\mu_G(\zeta)\big| = \frac{|G_{\overline{\zeta}}|}{|G_\zeta|} = \left|\frac{\nu_s(\zeta) + \mu_{\widehat{G}}(z)}{1 + \mu_{\widehat{G}}(z)\overline{\nu_s(\zeta)}}\right| = \frac{(\rho_1^2 + \rho^2 + 2\rho_1\rho\cos(\theta_1 - \theta_2))^{1/2}}{(1 + \rho_1^2\rho^2 + 2\rho\cos(\theta_1 - \theta_2))^{1/2}},$$

где $|\nu_s(\zeta)| = |s_{\overline{\zeta}}|/|\overline{s}_\zeta| = \rho e^{i\theta_1}$, $|\mu_{\widehat{G}}(z)| = \rho_2 e^{i\theta_2}$. Поскольку $\rho = |\mu_s(\zeta)| \geqslant k > 1$, неравенство $|\mu_s(\zeta)| < 1$ эквивалентно неравенству $\rho^2 + \rho_2^2 < 1 + \rho_2^2\rho^2$, что, в свою очередь, равносильно $|\mu_{\widehat{G}}(z)|^{-1} < 1$. Вычислим $|\mu_{\widehat{G}}(z)|^{-1}$ для $\widehat{G}(z)$, заданной в виде (47)

$$|\mu_{\widehat{G}}(z)|^{-1} = \left|\frac{\widehat{G}_z}{\widehat{G}_{\overline{z}}}\right| = \left|\frac{\lambda_z(z)\widetilde{H}_z(z_r) + \delta^2(z)\widetilde{C}_z(z_r) + \delta(z)\widetilde{A}_z(z_r)}{\lambda_{\overline{z}}(z)\widetilde{H}_z(z_r)}\right|,$$

где $\widetilde{H}_z(z_r) = \widetilde{\eta}'_{1_z}\widetilde{\eta}_2 - \widetilde{\eta}'_{2_z}\widetilde{\eta}_1$, $\widetilde{C}_z(z_r) = \widetilde{\eta}''_{1_{zz}}\widetilde{\eta}'_{2_z} - \widetilde{\eta}''_{2_{zz}}\widetilde{\eta}'_{1_z}$, $\widetilde{A}_z(z_r) = \widetilde{\eta}''_{1_{zz}}\widetilde{\eta}_2 - \widetilde{\eta}''_{2_{zz}}\widetilde{\eta}_1$. Данные обозначения напоминают о том, что все функции зависят от z_r, а дифференцирование ведется по z. Вычисления показывают, что $A(z_r) = {\Phi'}^2(z_r)\widetilde{A}_z(z_r) + \Phi''(z_r)\widetilde{H}_z(z_r)$, $H(z_r) = \Phi'(z_r)\widetilde{H}_z(z_r)$, $C(z_r) = {\Phi'}^3(z_r)\widetilde{C}_z(z_r)$, и, следовательно,

$$P(z_r) = -A(z_r)/H(z_r) = -\Phi'(z_r)\widetilde{A}_z(z_r)/\widetilde{H}_z(z_r) - \Phi''(z_r)/\Phi'(z_r),$$

$$Q(z_r) = C(z_r)/H(z_r) = {\Phi'}^2(z_r)\widetilde{C}_z(z_r)/\widetilde{H}_z(z_r).$$

Поэтому

$$|\mu_{\widehat{G}}(z)|^{-1} = \\ = \left|\frac{\lambda_z(z)}{\lambda_{\overline{z}}(z)} + \frac{\delta^2(z)}{\lambda_{\overline{z}}(z)}\,\frac{Q(z_r)}{{\Phi'}^2(z_r)} + \frac{1}{\lambda_{\overline{z}}(z)}\,\frac{\delta(z)}{\Phi'(z_r)}\left[-P(z_r) - \frac{\Phi''(z_r)}{\Phi'(z_r)}\right]\right|. \tag{48}$$

Правая часть (48) будет меньше единицы, если

$$\big|\tau_r(z)\delta(z)\big|^2\,|Q(z_r)|+|\tau_r(z)\delta(z)|\;|P(z_r)|+|\tau_r(z)\delta(z)|\left|\frac{\Phi''(z_r)}{\Phi'(z_r)}\right|<$$
$$<\big|\lambda_{\overline{z}}(z)\big|\left(1-\frac{|\lambda_z(z)|}{|\lambda_{\overline{z}}(z)|}\right).\qquad(49)$$

Пусть B – шварцианова область первого типа. Принимая во внимание условия (7), (8) и тот факт, что минимум функции $(1-\rho^{-1})$ при $\rho\geqslant k$ равен $1-k^{-1}=2(K+1)$, получаем, что условие (43) гарантирует справедливость неравенства (49). Если B – область второго типа, то с учетом (7) и (8$'$) получаем, что из соотношения (44) следует (49).

Для модуля производной $|G_\zeta|$ имеем равенство $|G_\zeta|=|\widehat{G}_z s_\zeta+\widehat{G}_{\overline{z}}\overline{s}_{\overline{\zeta}}|=|\widehat{G}_{\overline{z}}|\;|s_\zeta|\;|\mu_{\widehat{G}}^{-1}(z)+\overline{v_s(\zeta)}|$. Пусть сначала $|s_\zeta|\neq 0$. Поскольку $|\mu_{\widehat{G}}(z)|^{-1}<1$, а модуль второго комплексного отклонения $|v_s(\zeta)|=|\mu_s(\zeta)|\geqslant k>1$, то $|\mu_{\widehat{G}}^{-1}(z)+\overline{v_s(\zeta)}|\neq 0$. Знаменатель дроби $|\mu_{\widehat{G}}(z)|^{-1}$, равный $|\widehat{G}_{\overline{z}}|$, строго больше числителя, поэтому $|\widehat{G}_{\overline{z}}|>|\widehat{G}_z|\geqslant 0$. Если $|s_\zeta|=0$, то в этом случае $|s_{\overline{\zeta}}|\neq 0$. По-прежнему из неравенства $|\widehat{G}_z|/|\widehat{G}_{\overline{z}}|<1$ получаем $|\widehat{G}_{\overline{z}}|>0$. Тогда $|G_\zeta|=|\widehat{G}_{\overline{z}}|\cdot|s_{\overline{\zeta}}|\neq 0$. Таким образом, в окрестности любой точки $\zeta\in B^-$ якобиан отображения G (если $G(\zeta)\neq\infty$) или $1/G$ (если $G(\zeta)=\infty$) непрерывен и положителен, т.е. функция $G(\zeta)$ локально однолистна и сохраняет ориентацию. Привлекая лемму Ф. Г. Авхадиева о склейке, как в статье [1], получим локально гомеоморфное, следовательно, и глобально гомеоморфное отображение $\mathcal{F}:\overline{\mathbb{C}}\to\overline{\mathbb{C}}$. Это влечет однолистность $f(z_r)$, а значит, однолистность $f(z)$ в B в силу произвольности r.

В случае внешности круга D^- условия (43) и (44) совпадают с (P,Q)-условием Ф. Г. Авхадиева $|z|\;|P(z)|+(|z|^2-1)|Q(z)|\leqslant(|z|^2-1)^{-1}$, $z\in D^-$ (см. [11], а также [10], с. 74).

Три частных случая выбора $P(z)$ и $Q(z)$, упомянутые во введении, дают следующие утверждения.

Следствие 6. *Если $f(z)$ мероморфна и локально однолистна в шварциановой области B первого типа, и для всех $z_r\in B$ выполняется одно из условий*

$$\frac{1}{2}|(\delta\circ z_r)|\big|\{f,z_r\}\big|+\left|\frac{\Phi''(z_r)}{\Phi'(z_r)}\right|\leqslant\left|\frac{(\delta_{\overline{z}}\circ z_r)}{(\delta\circ z_r)}\right|\frac{2}{K+1}\,\frac{1}{r|\Phi'(z_r)|};\qquad(50)$$

$$\frac{1}{2}\big|\delta\circ z_r\big|\big|\{f,z_r\}-\{g,z_r\}\big|+\left|\frac{g''(z_r)}{g'(z_r)}\right|+\left|\frac{\Phi''(z_r)}{\Phi'(z_r)}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\frac{(\delta_{\overline{z}}\circ z_r)}{(\delta\circ z_r)}\right|\frac{2}{(K+1)}\frac{1}{r|\Phi'(z_r)|};\tag{51}$$

то $f(z)$ однолистна в B. Здесь $g(z)$ – любая мероморфная и локально однолистная в области B функция.

Следствие 7. *Предположим, что B – щварцианова область первого типа. Если $f(z)$ мероморфна и локально однолистна в B, имеет полюс первого порядка в точке $z_0\in B\setminus\{\infty\}$, и для всех $z_r\in B$ выполняется условие*

$$\frac{|(\delta\circ z_r)|}{|z_r-z_0|}\left|\frac{f''(z_r)}{f'(z_r)}+\frac{2}{z_r-z_0}\right|+\left|\frac{f''(z_r)}{f'(z_r)}+\frac{2}{z_r-z_0}\right|+\left|\frac{\Phi''(z_r)}{\Phi'(z_r)}\right|\leqslant$$

$$\frac{(\delta_{\overline{z}}\circ z_r)}{(\delta\circ z_r)}\frac{2}{K+1}\frac{1}{r|\Phi'(z_r)|};\tag{52}$$

то $f(z)$ однолистна в B.

(P,Q)-условие (43) при $P(z)=-f''(z)/f'(z)$, $Q(z)\equiv 0$, дает условие инъективности (21), полученное в [1].

Соотношение (50) является аналогом условия Нехари (41). Неравенство (51) есть обобщение условия $|z|(|z|^2-1)\left|\frac{g''}{g'}\right|+(|z|^2-1)^2\frac{|\{f,z\}-\{g,z\}|}{2}\leqslant 1$, $z\in D^-$, Авхадиева–Эпштейна (см. [11, 12]), на шварцианову область B первого типа.

Можно получить еще четыре следствия, соответствующие тем же частным случаям выбора P и Q, из соотношения (44). Для этого достаточно в правой части неравенств (50), (21), (51), (52) заменить величину $|\delta_{\overline{z}}\circ z_r|2(K+1)^{-1}$ на разность $|\lambda_{\overline{z}}\circ z_r|-|\lambda_z\circ z_r|$.

10. (P,Q)-условие для шварциановой области третьего типа. Примеры звездообразной и спиралеобразной области.

Теорема 8. *Пусть $f(z)$ мероморфна и локально однолистна в шварциановой области B третьего типа, функции $P(z)$ и $Q(z)$ аналитичны в B и удовлетворяют для всех $z\in B$ соотношению (39). Если для любого $z_r\in B$ выполняется условие*

$$\frac{1}{|\Phi'(z_r)|}\big|\delta(z)\big|^2\big|Q(z_r)\big|+\big|\delta(z)\big|\ \big|P(z_r)\big|+\big|\delta(z)\big|\left|\frac{\Phi''(z_r)}{\Phi'(z_r)}\right|\leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{r(K+1)}\left|\delta_{\overline{z}}\circ z_r\right|, \tag{53}$$

то $f(z)$ однолистна в B.

Для доказательства теоремы 8 заметим, что из неравенств (8) и (53) следует справедливость оценки $|\mu_{\widehat{G}}(z)|^{-1} < 1$.

Уже упоминавшиеся во введении четыре частных случая выбора функций $P(z)$ и $Q(z)$ в теореме 8 дают

Следствие 8.

1. *Пусть $f(z)$ мероморфна и локально однолистна в швациановой области B третьего типа. Если для всех $z_r \in B$ выполняется одно из условий*

$$\frac{1}{|\Phi'(z_r)|}\left|\delta(z)\right|^2\frac{|\{f,z_r\}|}{2}+\left|\delta(z)\right|\left|\frac{\Phi''(z_r)}{\Phi'(z_r)}\right|\leqslant\frac{2}{r(K+1)}\left|(\delta_{\overline{z}}\circ z_r)\right|;$$

$$\frac{1}{|\Phi'(z_r)|}\left|\delta(z)\right|^2\frac{|\{f,z_r\}-\{g,z_r\}|}{2}+|\delta(z)|\left|\frac{g''(z_r)}{g'(z_r)}\right|+$$
$$+\left|\delta(z)\right|\left|\frac{\Phi''(z_r)}{\Phi'(z_r)}\right|\leqslant\frac{2}{r(K+1)}\left|(\delta_{\overline{z}}\circ z_r)\right|; \tag{54}$$

то $f(z)$ однолистна в B. В соотношении (54) функция $g(z)$ – произвольная мероморфная и локально однолистная в области B функция.

2. *Если функция $f(z)$ аналитична в шварциановой области B третьего типа, за исключением простого полюса в бесконечности, и для всех $z_r \in B$ выполняется условие*

$$\left|\frac{f''(z_r)}{f'(z_r)}\right|+\left|\frac{\Phi''(z_r)}{\Phi'(z_r)}\right|\leqslant\frac{2}{K+1}\,\frac{|(\delta_{\overline{z}}\circ z_r)|}{r|(\delta\circ z)|};$$

то $f(z)$ однолистна в B.

3. *Предположим, что B – шварцианова область третьего типа. Если $f(z)$ мероморфна и локально однолистна в B, имеет простой полюс в точке $z_0 \in B\setminus\{\infty\}$ и для всех $z_r \in B$ выполняется условие*

$$\frac{1}{|\Phi'(z_r)|}\,\frac{|\delta(z)|}{|z_r-z_0|}\cdot\left|\frac{f''(z_r)}{f'(z_r)}+\frac{2}{z_r-z_0}\right|+|\delta(z)|\left|\frac{f''(z_r)}{f'(z_r)}+\frac{2}{z_r-z_0}\right|+$$
$$+\left|\delta(z)\right|\left|\frac{\Phi''(z_r)}{\Phi'(z_r)}\right|\leqslant\frac{2}{r(K+1)}\left|\delta_{\overline{z}}\circ z_r\right|,$$

то $f(z)$ однолистна в B.

В качестве примера шварциановой области первого типа рассмотрим звездообразные области B^*_α. Используемые обозначения даны в ([1], п. 2), там же ([1], п. 5) вычислены необходимые величины. Неравенства (50), (51), (52) запишутся для звездообразной области B^*_α так:

$$\big|\{f, |z|e^{i\theta}\}\big| \leqslant \frac{2R(R^2+R^2_\theta)^{1/2}}{(|z|^2-R^2|^2} 2\sin^2\frac{\beta}{2}; \tag{55}$$

$$\left|\frac{g''(z)}{g'(z)}\right| + \frac{(|z|^2-R^2)}{|z|}\frac{|\{f,z\}-\{g,z\}|}{2}$$

$$\leqslant \frac{R(R^2+R^2_\theta)^{1/2}}{|z|(|z|^2-R^2)} 2\sin^2\frac{\beta}{2};$$

$$\left|\frac{f''(z)}{f'(z)}+\frac{2}{z-z_0}\right| + \frac{(|z|^2-R^2)}{|z|\;|z-z_0|}\left|\frac{f''(z)}{f'(z)}+\frac{2}{z-z_0}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{R(R^2+R^2_\theta)^{1/2}}{|z|(|z|^2-R^2|} 2\sin^2\frac{\beta}{2};$$

здесь $z=|z|e^{i\theta}$, $|z|>R$, $R=R(\theta)$, $R_\theta = dR/d\theta$, $\theta\in[0,2\pi]$, $\beta = (1-\alpha)\pi/2$.

В частном случае, если $B^*_\alpha = B^*(1)$ – внешность эллипса с полуосями a_0, b_0, $b_0>a_0$ (см. [1], пример 1), то $K=b_0^2/a_0^2$, и аналог условия Нехари (55) будет иметь вид

$$\big|\{f,z\}\big| \leqslant \frac{2R^2(1+(R_\theta/R)^2)^{1/2}}{(|z|^2-R^2)^2}\,\frac{2a_0^2}{b_0^2+a_0^2}, \quad \forall\, z\in B^*(1),$$

здесь $\theta = \arg z$, $R_\theta/R = c^2\mathrm{tg}^2\theta/(b_0\mathrm{tg}^2\theta + a_0)$, $R^2=R^2(\theta) = a_0\cos^2\theta + b_0\sin^2\theta$, $c^2 = b_0^2-a_0^2$.

С. Р. Насыров и М. А. Севодин в [13] получили следующее условие однолистности мероморфной в звездообразной области B^*_α функции $f(z)$: $|\{f,z\}| \leqslant 4\sin^2\beta/2\ \cdot R^{-2}(\theta)\cdot S(t)$, для любого $z=re^{i\theta}\in B^*_\alpha$, $t=|z|/R(\theta)$, $\beta = \pi/2-\alpha\pi/2$, а функция $S(t)$ удовлетворяет условиям: а) $S(t)(1-t^2)^2$ не возрастает по t при $0<t<1$, б) дифференциальное уравнение $y''+S(|t|)y=0$ при $-1<t<1$ имеет решение $y_0(t)>0$.

Примером шварциановой области третьего типа является всякая α-спиралеобразная область $B_{\sigma,\alpha}$ порядка σ при $\sigma>0$. Переформулируем теорему 8 для α-спиралеобразной области $B_{\sigma,\alpha}$.

Теорема 9. *Пусть $f(z)$ мероморфна и локально однолистна в α-спиралеобразной области $B_{\sigma,\alpha}$ порядка σ, функции $P(z)$ и $Q(z)$ аналитичны в $B_{\sigma,\alpha}$ и связаны со шварцианом равенстом $2Q(z)-P'(z)-(1/2)P^2(z)=\{f,z\}$ для любого $z\in B_{\sigma,\alpha}$. Если для всякого $z_r\in B_{\sigma,\alpha}$ выполняется условие*

$$\left|P\left(zre^{-i\mathrm{tg}\sigma\ln r}\right)\right|+r\frac{|z^2-R^2e^{2i\mu}|}{|z|}\left|Q\left(zre^{-i\mathrm{tg}\sigma\ln r}\right)\right|\leqslant$$

$$\leqslant 2\sin^2\frac{\beta}{2}\frac{(1+N^2(\theta))^{1/2}R^2}{|z|r^3|z^2-R^2e^{2i\mu(\theta)}|}, \tag{56}$$

то $f(z)$ однолистна в $B_{\sigma,\alpha}$. Здесь $\theta=\arg z+\mathrm{tg}\sigma\ln|z|$, $\mu=\theta-\mathrm{tg}\sigma\ln R$, $\beta=\pi/2-\alpha\pi/2$, $N(\theta)=\mathrm{tg}\sigma-R_\theta\cos^{-2}\sigma/R$, $R_\theta=dR/d\theta$.

В качестве следствий из (56) при $P(z)\equiv 0$, $Q(z)=\{f,z\}/2$, и $P(z)=-g''(z)/g'(z)$, $2Q(z)=\{f,z\}-\{g,z\}$ соответственно, приведем два неравенства, которые являются аналогами условий Нехари и Авхадиева–Эпштейна для области $B_{\sigma,\alpha}$:

$$\left|\left\{f,zre^{-i\mathrm{tg}\sigma\ln r}\right\}\right|\leqslant 4\sin^2\frac{\beta}{2}\cdot(1+N^2(\theta))^{1/2}\cdot R^2r^{-4}|z^2-R^2e^{2i\mu}|^{-2};$$

$$\frac{|g''(zre^{-i\mathrm{tg}\sigma\ln r})|}{|g'(zre^{-i\mathrm{tg}\sigma\ln r})|}+\frac{r|z^2-R^2e^{2i\mu}|}{|z|}\,\frac{|\{f,zre^{-i\mathrm{tg}\sigma\ln r}\}-\{g,zre^{-i\mathrm{tg}\sigma\ln r}\}|}{2}$$

$$\leqslant 2\sin^2\frac{\beta}{2}\;\frac{(1+N^2(\theta))^{1/2}R^2}{|z|r^3|z^2-R^2e^{ri\mu}|}.$$

Заметим, что в статье [6] М. А. Севодин получил следующее условие однолистности мероморфной в $B^-_{\sigma,\alpha}$ функции: $|\{f,z\}|\leqslant R^{-2}4\sin^2\frac{\beta}{2}(1+|\mathrm{tg}\sigma|)^{-2}S(t)$, для любого $z\in B^-_{\sigma,\alpha}$, здесь $t=|z|/R(\theta)$, $S(t)$ удовлетворяет условиям: а) $S(t)$ непрерывна, $S(t)\geqslant 0$ для $t\in[0,1)$, $S(t)(1-t^2)^2$ не возрастает на $[0,1)$, б) наименьшее собственное значение задачи $y''(t)+\Lambda S(t)y(t)=0$, $t\in[0,1)$, $y(1)=y'(0)=0$, не меньше единицы.

Литература

1. Е. Л. Пацевич, *Условия инъективности для некоторых классов областей, I.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **255** (1998), 104–124.
2. L. Špaček, *Contribution à la théorie des fonctions univalentes.* — Časopos. Pest. Math. **62** (1933), 12–19.
3. О. А. Бусовская, В. В. Горяйнов, *О гомеоморфном продолжении спиральных функций.* — Укр. мат. ж. **33:5** (1981), 656–660.

4. Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного*. Наука, М. (1966), 628с.
5. Ф. Г. Авхадиев, Л. А. Аксентьев, *Основные результаты в достаточных условиях однолистности аналитических функций*. — УМН **30, No. 4** (1975), 3–60.
6. М. А. Севодин, *Условия однолистности в спиралеобразных областях*. Тр. семин. по краевым задачам, Изд-во Каз. ун-та, Казань, 1987, вып. 23, 193–200.
7. L. V. Ahlfors, G. Weil, *A uniqueness theorem for Beltrami equations*. — Proc. Am. Math Soc. **13, No. 6** (1962), 975–978.
8. Ф. Г. Авхадиев, Л. А. Аксентьев, А. М. Елизаров, *Достаточные условия конечнолистности аналитических функций их приложения*. Итоги науки и техники. Матем. анализ. М., ВИНИТИ, 1987, т. 25. с. 3–21.
9. Z. Nehari, *The Schwarzian derivative and schlicht functions*. — Bull Am. Math. Soc. **55:6** (1949), 545–551.
10. Ф. Г. Авхадиев, *Конформные отображения и краевые задачи*. Казанский фонд “Математика”1996, 215с.
11. Ф. Г. Авхадиев, *Достаточные условия однолистности квазиконформных отображений*. — Матем. заметки **18, No. 6** (1975), 793–802.
12. Ch. Pommerenke, *On the Epstein univalence criteria*. — Results in Mathematics **10** (1986), 143–146.
13. С. Р. Насыров, Севодин М. А., *Условия однолистности типа Нехари–Покорного в α-звездообразных областях*. — Изв. вузов, Математика **No. 11** (1981), 78–80.

Patsevich E. L. Injectivity criteria for some domains. II.

New sufficient conditions are found for continuously differentiable mappings in some plane domains to be injective. This result is obtained by using the locally homeomorphic extension method. New univalence criteria for meromorphic functions are given by means of the quasiconformal extension method. These criteria are stated in terms of the coefficients of a differential equation related to the Schwarzian derivative of the function under consideration.

Новгородский
государственный университет
patsev@pdmi.ras.ru

Поступило 15 декабря 1997 г.