Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 255, 1998 г.

**А. Н. Петров**

# МОНОТОННОСТЬ УСРЕДНЕННЫХ СРЕДНИХ СТЕПЕННЫХ

**1. Введение.** В этой заметке приводится одно новое числовое неравенство для средних степенных. Его интересно сопоставить со знаменитым неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим или, более общо, с возрастанием средних степенных (см., например, [1, 2]). Приводимые доказательства совершенно элементарны и основаны на простейшем исследовании некоторых функций одной вещественной переменной на экстремум. Автору стало известно об этом неравенстве от Л. Д. Курляндчика, которому, в свою очередь, оно было устно сообщено в виде предположения польским математиком H. Pavlovski. В заключение этого краткого введения, автор считает своим приятным долгом выразить искреннюю признательность Л. Д. Курляндчику за постановку задачи, стимулирующий интерес в процессе ее решения и дружеское участие в подготовке рукописи к печати, а также В. И. Васюнину, прочитавшему рукопись и сделавшему ряд ценных замечаний.

**2. Постановка задачи.** Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n$ – положительные числа. Рассмотрим набор средних арифметических

$$a_1, \frac{a_1+a_2}{2}, \dots, \frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}.$$

Среднее геометрическое этого набора чисел есть

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot \frac{a_1+a_2}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}}. \tag{1}$$

Теперь возьмем набор средних геометрических

$$a_1, \sqrt{a_1a_2}, \dots, \sqrt[n]{a_1a_2\dots a_n}$$

и его среднее арифметическое

$$\frac{a_1+\sqrt{a_1a_2}+\dots+\sqrt[n]{a_1a_2\dots a_n}}{n}. \tag{2}$$

Кажется естественным следующий вопрос: какое из полученных таким образом усредненных средних больше – (1) или (2)?

**3. Основное неравенство.** Оказывается, что (1). Доказательство этого утверждения и является целью данного пункта.

**Теорема.** *Для любых положительных чисел* $a_1, a_2, \dots, a_n$ *справедливо неравенство*

$$\frac{a_1 + \sqrt{a_1 a_2} + \ldots + \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}}{n} \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt[n]{a_1 \cdot \frac{a_1 + a_2}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}}.$$

**Доказательство.** Проведем его индукцией по $n$. База ($n = 1$) очевидна (отметим также, что при $n = 2$ неравенство сравнивает среднее арифметическое и среднее квадратическое двух чисел $a_1$ и $\sqrt{a_1 a_2}$). Для осуществления индукционного перехода от $n$ к $(n+1)$, положим

$$t_1 = a_1,\ t_2 = \sqrt{a_1 a_2}, \dots,\ t_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}.$$

Неравенство примет вид

$$\frac{t_1 + t_2 + \ldots + t_n}{n} \leqslant \sqrt[n]{t_1 \cdot \frac{t_1 + \frac{t_2^2}{t_1}}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{t_1 + \frac{t_2^2}{t_1} + \ldots + \frac{t_n^n}{t_{n-1}^{n-1}}}{n}}. \qquad (3)$$

Обозначения

$$x_k = t_1 + t_2 + \ldots + t_k, \quad y_k = t_1 + \frac{t_2^2}{t_1} + \ldots + \frac{t_k^k}{t_{k-1}^{k-1}}, \quad z_k = \frac{y_1 y_2 \ldots y_k}{k!}$$

приведут неравенство (3) к более простому виду

$$\sqrt[n]{z_n} \geqslant \frac{x_n}{n}. \qquad (4)$$

Предположив справедливость (4), установим, что верно следующее неравенство

$$\sqrt[n+1]{z_{n+1}} \geqslant \frac{x_{n+1}}{n+1}.$$

В нем отделим от остальных переменную $t_{n+1}$, то есть, запишем в виде

$$\sqrt[n+1]{z_n \cdot \frac{y_n + \frac{t_{n+1}^{n+1}}{t_n^n}}{n+1}} \geqslant \frac{x_n + t_{n+1}}{n+1}$$

или

$$\frac{y_n + \frac{t_{n+1}^{n+1}}{t_n^n}}{(x_n + t_{n+1})^{n+1}} \geqslant \frac{1}{(n+1)^n z_n}.$$

Правая часть полученного неравенства от $t_{n+1}$ не зависит, найдем наименьшее значение левой части, как функции от $t_{n+1}$. Дифференцируя функцию

$$f(u) = \frac{y_n + \frac{u^{n+1}}{t_n^n}}{(x_n + u)^{n+1}}, \quad u > 0,$$

имеем

$$f'(u) = \frac{n+1}{(x_n + u)^{n+2}} \left( x_n \frac{u^n}{t_n^n} - y_n \right),$$

а значит

$$u_0 = t_n \sqrt[n]{\frac{y_n}{x_n}} \text{ – точка минимума функции } f.$$

Поэтому,

$$f(t_{n+1}) \geqslant f(u_0) = \frac{y_n}{x_n} \frac{1}{\left( x_n + t_n \sqrt[n]{\frac{y_n}{x_n}} \right)^n}.$$

Тем самым, остается доказать неравенство

$$\frac{y_n}{x_n} \frac{1}{\left( x_n + t_n \sqrt[n]{\frac{y_n}{x_n}} \right)^n} \geqslant \frac{1}{(n+1)^n z_n}$$

или

$$\sqrt[n]{z_n} \geqslant \frac{x_n + t_n \sqrt[n]{\frac{y_n}{x_n}}}{(n+1) \sqrt[n]{\frac{y_n}{x_n}}}.$$

Ввиду неравенства (4), достаточно показать, что

$$\frac{x_n}{n} \geqslant \frac{x_n + t_n \sqrt[n]{\frac{y_n}{x_n}}}{(n+1) \sqrt[n]{\frac{y_n}{x_n}}}. \qquad (5)$$

Докажем это неравенство также по индукции. База ($n = 1$) очевидна, а индукционный переход от $n$ к $(n+1)$ заключается, при предположении (5), в установлении неравенства

$$\frac{x_{n+1}}{n+1} \geqslant \frac{x_{n+1} + t_{n+1}\sqrt[n+1]{\frac{y_{n+1}}{x_{n+1}}}}{(n+2)\sqrt[n+1]{\frac{y_{n+1}}{x_{n+1}}}}$$

или

$$\left(\frac{n+2}{n+1}\,x_{n+1} - t_{n+1}\right)\sqrt[n+1]{\frac{y_{n+1}}{x_{n+1}}} \geqslant x_{n+1}.$$

Отделяя в нем переменную $t_{n+1}$ от остальных, получаем

$$\left(\frac{n+2}{n+1}\,x_n + \frac{1}{n+1}t_{n+1}\right)\sqrt[n+1]{\frac{y_n + \frac{t_{n+1}^{n+1}}{t_n^n}}{x_n + t_{n+1}}} \geqslant x_n + t_{n+1}$$

или

$$\frac{y_n + \frac{t_{n+1}^{n+1}}{t_n^n}}{(x_n + t_{n+1})^{n+1}} \geqslant \frac{x_n + t_{n+1}}{\left(\frac{n+2}{n+1}\,x_n + \frac{1}{n+1}\,t_{n+1}\right)^{n+1}}. \tag{6}$$

Полагая

$$g(v) = \frac{x_n + v}{\left(\frac{n+2}{n+1}\,x_n + \frac{1}{n+1}\,v\right)^{n+1}}, \quad v > 0,$$

запишем неравенство (6) в виде $f(t_{n+1}) \geqslant g(t_{n+1})$. Найдем наибольшее значение функции $g$. Имеем

$$g'(v) = \frac{\frac{1}{n+1}\,x_n - \frac{n}{n+1}\,v}{\left(\frac{n+2}{n+1}\,x_n + \frac{1}{n+1}\,v\right)^{n+2}},$$

и значит

$$v_0 = \frac{x_n}{n} \text{ – точка максимума функции } g.$$

Поэтому,

$$g(t_{n+1}) \leqslant g(v_0) = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\,x_n\right)^n}.$$

Следовательно, для доказательства неравенства $f(t_{n+1}) \geqslant g(t_{n+1})$ достаточно убедиться в том, что $f(u_0) \geqslant g(v_0)$, то есть

$$\frac{y_n}{x_n}\,\frac{1}{\left(x_n + t_n\sqrt[n]{\frac{y_n}{x_n}}\right)^n} \geqslant \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\,x_n\right)^n}.$$

Наконец, перепишем это последнее неравенство в виде

$$\frac{x_n}{n} \geqslant \frac{x_n + t_n \sqrt[n]{\frac{y_n}{x_n}}}{(n+1) \sqrt[n]{\frac{y_n}{x_n}}}.$$

Осталось заметить, что оно совпадает с индукционным предположением (5). Таким образом, теорема доказана полностью. •

Отметим, что доказанное неравенство строгое, кроме того случая, когда все $a$ равны.

**4. Обобщение.** Пусть $a = (a_n)_{n \geqslant 1}$, $b = (b_n)_{n \geqslant 1}$ – две последовательности вещественных чисел. Говорят, что последовательность $b$ мажорирует последовательность $a$ и пишут $a \leqslant b$, если $a_n \leqslant b_n$ для всех $n = 1, 2, \ldots$ .

Пусть параметры $\alpha, \beta \in [-\infty, +\infty]$ и $a = (a_n)_{n \geqslant 1}$ – последовательность положительных чисел. Символом $M_\alpha$ будем обозначать оператор (нелинейный) степенного усреднения порядка $\alpha$. Он переводит последовательность $a = (a_n)_{n \geqslant 1}$ в последовательность

$$M_\alpha(a) = \left\{ \left( \frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \ldots + a_n^\alpha}{n} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right\}_{n \geqslant 1}$$

с естественной модификацией при $\alpha = 0, \pm\infty$. Будем рассматривать также композицию операторов усреднения $M_\beta \circ M_\alpha$. Так, например, если $\alpha, \beta \neq 0, \pm\infty$, то

$$M_\beta \circ M_\alpha(a) = \left\{ \left( \frac{a_1^\beta + \left(\frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha}{2}\right)^{\frac{\beta}{\alpha}} + \ldots + \left(\frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \ldots + a_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{\beta}{\alpha}}}{n} \right)^{\frac{1}{\beta}} \right\}_{n \geqslant 1}.$$

Доказанное выше неравенство означает, что $M_1 \circ M_0(a) \leqslant M_0 \circ M_1(a)$. Оно является частным случаем следующего более общего результата.

**Теорема.** *Если $\alpha < \beta$, то $M_\beta \circ M_\alpha(a) \leqslant M_\alpha \circ M_\beta(a)$.*

Доказательство теоремы разобьем на несколько шагов.

**Лемма 1.** *Если* $u > 0$, $v \geqslant 1$, $p > 1$, *то* $v^{1-\frac{1}{p}}(u+1)^{\frac{1}{p}} - u^{\frac{1}{p}} \geqslant (v-1)^{1-\frac{1}{p}}$.

**Доказательство.** При $v = 1$ утверждение очевидно. С $v > 1$ свяжем функцию $f(t) = v^{1-\frac{1}{p}}(t+1)^{\frac{1}{p}} - t^{\frac{1}{p}}$, $t > 0$. Имеем $f'(t) = \frac{1}{p}\left(\left(\frac{t+1}{v}\right)^{\frac{1}{p}-1} - t^{\frac{1}{p}-1}\right)$, $t_0 = \frac{1}{v-1}$ – точка минимума $f$, $f(u) = v^{1-\frac{1}{p}}(u+1)^{\frac{1}{p}} - u^{\frac{1}{p}} \geqslant f(t_0) = (v-1)^{1-\frac{1}{p}}$. •

Пусть параметр $p \neq 0$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ – положительные числа. Обозначим

$$t_k = \left(\frac{b_1^p + b_2^p + \ldots + b_k^p}{k}\right)^{\frac{1}{p}}, \quad x_k = t_1 + t_2 + \ldots + t_k,$$

$$y_k = \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_k}{k}, \quad z_k = y_1^p + y_2^p + \ldots + y_k^p.$$

**Лемма 2.** *Если* $p > 1$, *то*

$$k^{1-\frac{1}{p}}\left(\frac{z_k}{k} + z_{k-1}\right)^{\frac{1}{p}} - \left(\frac{z_k}{k}\right)^{\frac{1}{p}} \geqslant \left((k-1)^{p-1} z_{k-1}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

**Доказательство.** Положим $u = \frac{z_k}{k z_{k-1}}$, $v = k$ в лемме 1. •

**Лемма 3.** *Если* $p > 1$, *то* $t_k \geqslant (k^{p-1} z_k)^{\frac{1}{p}} - ((k-1)^{p-1} z_{k-1})^{\frac{1}{p}}$.

**Доказательство.** Проведем его индукцией по $k$. База ($k = 1$) очевидна, а переход от $k$ к $(k+1)$ заключается в доказательстве неравенства

$$t_{k+1} \geqslant ((k+1)^{p-1} z_{k+1})^{\frac{1}{p}} - (k^{p-1} z_k)^{\frac{1}{p}} \tag{7}$$

при соответствующем индукционном предположении.

Перепишем (7) в виде

$$(t_{k+1} + (k^{p-1} z_k)^{\frac{1}{p}})^p \geqslant (k+1)^{p-1} z_{k+1}$$

и, отделяя переменную $b_{k+1}$ от остальных, получим

$$\left(\left(\frac{k t_k^p + b_{k+1}^p}{k+1}\right)^{\frac{1}{p}} + (k^{p-1} z_k)^{\frac{1}{p}}\right)^p - (k+1)^{p-1}\left(\frac{k y_k + b_{k+1}}{k+1}\right)^p \geqslant$$

$$\geqslant (k+1)^{p-1} z_k. \tag{8}$$

Дифференцируя функцию

$$f(u) =$$

$$= \left( \left( \frac{kt_k^p + u^p}{k+1} \right)^{\frac{1}{p}} + (k^{p-1} z_k)^{\frac{1}{p}} \right)^p - (k+1)^{p-1} \left( \frac{ky_k + u}{k+1} \right)^p, \quad u > 0,$$

имеем

$$f'(u) =$$

$$= \frac{p}{k+1} \left( \left( u \left( 1 + (k^{p-1} z_k)^{\frac{1}{p}} \left( \frac{kt_k^p + u^p}{k+1} \right)^{-\frac{1}{p}} \right) \right)^{p-1} - (ky_k + u)^{p-1} \right),$$

а значит

$$u_0 = \frac{k^{\frac{1}{p}} t_k y_k}{\left( \frac{z_k}{k} + z_{k-1} \right)^{\frac{1}{p}}} \text{ – точка минимума функции } f,$$

причем

$$f(u_0) = \frac{k}{k+1} \left( t_k + k^{1-\frac{1}{p}} \left( \frac{z_k}{k} + z_{k-1} \right)^{\frac{1}{p}} \right)^p.$$

Для доказательства неравенства (8), достаточно убедиться в том, что $f(u_0) \geqslant (k+1)^{p-1} z_k$, то есть

$$t_k \geqslant (k+1) \left( \frac{z_k}{k} \right)^{\frac{1}{p}} - k^{1-\frac{1}{p}} \left( \frac{z_k}{k} + z_{k-1} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Но это немедленно вытекает из индукционного предположения и леммы 2, так как

$$\begin{aligned} t_k &\geqslant (k^{p-1} z_k)^{\frac{1}{p}} - ((k-1)^{p-1} z_{k-1})^{\frac{1}{p}} \geqslant \\ &\geqslant (k^{p-1} z_k)^{\frac{1}{p}} + \left( \frac{z_k}{k} \right)^{\frac{1}{p}} - k^{1-\frac{1}{p}} \left( \frac{z_k}{k} + z_{k-1} \right)^{\frac{1}{p}} = \\ &= (k+1) \left( \frac{z_k}{k} \right)^{\frac{1}{p}} - k^{1-\frac{1}{p}} \left( \frac{z_k}{k} + z_{k-1} \right)^{\frac{1}{p}}. \quad \bullet \end{aligned}$$

**Лемма 4.** *Если $p > 1$, то $M_p \circ M_1(b) \leqslant M_1 \circ M_p(b)$.*

**Доказательство.** Во введенных выше обозначениях доказываемое неравенство записывается в виде $x_n \geqslant (n^{p-1} z_n)^{\frac{1}{p}}$. Суммируя неравенства леммы 3, получаем требуемое. $\bullet$

Отметим, что леммы 1–4 справедливы с обратными знаками неравенств при $p < 0$ (доказательства копируются).

**Доказательство теоремы.** Рассмотрим отдельно несколько случаев. При $0 < \alpha < \beta$, $\alpha < 0 < \beta$ возьмем в лемме 4 $p = \frac{\beta}{\alpha}$, $b = a^{\alpha}$. При $\alpha < \beta < 0$ возьмем в лемме 4 $p = \frac{\alpha}{\beta}$, $b = a^{\beta}$. Случаи, когда среди параметров $\alpha, \beta$ есть $0$, $\pm\infty$, получаются из рассмотренных предельным переходом (первый из них был рассмотрен также в предыдущем пункте). $\bullet$

## Литература


1. Г. Г. Харди, Дж. Е. Литтлвуд, Г. Полиа, *Неравенства.* Гос. изд. иностр. лит., М., 1948.
2. Э. Беккенбах, Р. Беллман, *Неравенства.* М., Мир, 1965.



Petrov A. N. The monotonicity of average power means.

A new numerical inequality for average power means is presented. Let $\alpha, \beta \in [-\infty, +\infty]$, and let $a = (a_k)_{k \geqslant 1}$ be a sequence of positive numbers. Consider the operator $M_\alpha(a) = \left\{ \left( \frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \ldots + a_k^\alpha}{k} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right\}_{k \geqslant 1}$. We denote by $M_\beta \circ M_\alpha$ the superposition of these operators. The following assertion is proved: if $\alpha < \beta$, then $M_\beta \circ M_\alpha(a) \leqslant M_\alpha \circ M_\beta(a)$.



С.-Петербургский
государственный университет
petrov@ agspbu.spb.su


Поступило 23 февраля 1998 г.