Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 255, 1998 г.

А. А. Рахимов

К СТРУКТУРЕ ИНЪЕКТИВНЫХ ВЕЩЕСТВЕННЫХ W^*–ФАКТОРОВ ТИПА III_λ, $0<\lambda<1$

Введение

Классические работы А. Конна [1, 2] о классификации факторов и их автоморфизмов, в частности, полная классификация инъективных факторов, сыграли значимую роль в развитии теории операторных алгебр. Для вещественных факторов аналог классификации Конна был получен в работах [3, 4]. Оказывается, когда вещественый фактор имеет тип II_1, или II_∞, или III_1, результаты полностью совпадают с комплексным случаем. Но, если вещественный фактор имеет тип III_λ, $0<\lambda<1$, тогда, в отличие от случая комплексных факторов, оказалось, что имеются ровно две конструкции скрещенного произведения алгебры на ее автоморфизм. В [3] было показано, что структура вещественного фактора R типа III_λ, $0<\lambda<1$, определяется либо парой (Q,θ), где Q – вещественный фактор типа II_∞, θ – его $*$-автоморфизм с $\mathrm{mod}(\theta)=\lambda$, либо парой (N,β), где N – фактор типа II_∞, β – его $*$-антиавтоморфизм с $\mathrm{mod}(\beta)=\sqrt{\lambda}$ (в смысле [5, 6]). Отсюда следует, что существуют два неизоморфных вещественных инъективных W^*-фактора типа III_λ, $0<\lambda<1$ (см. [5, 6]).

Настоящая работа посвящена исследованию $*$-автоморфизмов вещественных факторов и $*$-антиавтоморфизмов комплексных факторов. Получена их классификация в духе работы [7], и для каждого $\lambda\in(0,1)$ показана единственность (с точностью до внешней сопряженности) как класса $*$-автоморфизмов с $\mathrm{mod}(\cdot)=\lambda$ инъективного вещественного фактора типа II_∞, так и класса $*$-антиавтоморфизмов с $\mathrm{mod}(\cdot)=\lambda$ инъективного комплексного фактора типа II_∞. Заметим, что в доказательстве этих результатов используется некоммутативный аналог леммы Рохлина. Однако, некоммутативный вещественный аналог леммы Рохлина отличается от случая доказанного для W^*-алгебр (см. лемму 2.4). Один из основных результатов работы получен в последнем параграфе. Здесь рассматриваются два вышеупомянутых класса неизоморфных вещественных инъективных факторов типа III_λ, $0 < \lambda < 1$. Показано, что в одном классе – это гиперфинитные вещественные факторы, а во втором классе – инъективные, но негиперфинитные. Отсюда вытекает, что для вещественных алгебр понятия гиперфинитности и инъективности, вообще говоря, неэквивалентны, в то время как в комплексном случае понятия гиперфинитности и инъективности совпадают. Результаты и техника, используемые при их получении, тесно связаны с работами [3, 7].

1. Предварительные сведения

Пусть $B(H)$ – алгебра всех ограниченных линейных операторов на комплексном гильбертовом пространстве H. Вещественная $*$-подалгебра с единицей $\mathbb{1}$ R алгебры $B(H)$ называется вещественной W^*-алгеброй, если она замкнута в слабой операторной топологии и $R \cap iR = \{0\}$. W^*-алгебра N (соотв. вещественная W^*-алгебра R) называется фактором (соотв. вещественным фактором), если в ее центре $Z(N)$ (соотв. $Z(R)$) лежат только элементы вида $\{\lambda\mathbb{1}\}$, $\lambda \in \mathbf{C}$ (соотв. $\lambda \in \mathbb{R}$). Обозначим через $\mathcal{U}(R)$ наименьшую W^*-алгебру, содержащую R (т.н. обертывающую W^*-алгебру для R). Она имеет вид: $\mathcal{U}(R) = R + iR$ (см. [8], стр. 22). Будем говорить, что вещественная W^*-алгебра R имеет тип $\mathrm{I}_{\mathrm{fin}}$, I_∞, II_1, II_∞, III_λ $(0 \le \lambda \le 1)$, если $\mathcal{U}(R)$ имеет соответствующий тип в обычной классификации W^*-алгебр (см., например, [1, 9]).

Пусть M – комплексная или вещественная W^*-алгебра. Линейное отображение α алгебры M в себя называется *$*$-автоморфизмом* (соотв. *$*$-антиавтоморфизмом*), если $\alpha(x^*) = \alpha(x)^*$ и $\alpha(xy) = \alpha(x)\alpha(y)$ (соотв. $\alpha(xy) = \alpha(y)\alpha(x)$) для всех x, $y \in M$. $*$-Автоморфизм α называется внутренним, если существует некоторый унитарный u, такой, что $\alpha(x) = uxu^*$ для всех $x \in M$. Будем обозначать через $\mathrm{Aut}M$ группу всех $*$-автоморфизмов M, через $\mathrm{Int}M$ группу всех внутренних $*$-автоморфизмов M, через $\mathrm{Ant}M$ группу всех $*$-антиавтоморфизмов M. $*$-Автоморфизмы или $*$-антиавтоморфизмы α и β называются *сопряженными* (соотв. *внешне сопряженными*), если $\alpha = \theta \cdot \beta \cdot \theta^{-1}$ (соотв. $\mathrm{Ad}u \cdot \alpha = \theta \cdot \beta \cdot \theta^{-1}$), для некоторого $*$-автоморфизма θ и внутреннего $*$-автоморфизма $\mathrm{Ad}u(x) = uxu^*$. Все остальные используемые определения и результаты см. [1, 5–7, 9].

2. Лемма Рохлина для антиавтоморфизмов W^*-алгебр и автоморфизмов вещественных W^*-алгебр

Пусть M – W^*-алгебра или вещественная W^*-алгебра, $\theta \in \mathrm{Aut}M$, $p(\theta)$ – наибольший проектор $e \in M$, такой, что $\theta(e) = e$ и $\theta^e = \theta|_{eMe} = \mathrm{Ad}u$, u – унитарный из eMe. Если θ – $*$-антиавтоморфизм W^*-алгебры, тогда положим $p(\theta) = p(\theta^2)$. $*$-Автоморфизм $\theta \in \mathrm{Aut}M$ (соотв. $*$-антиавтоморфизм $\theta \in \mathrm{Ant}M$) называется *собственно внешним*, если $p(\theta) = 0$.

Пусть R – σ-конечная вещественная W^*-алгебра, α – инволютивный $*$-антиавтоморфизм $\mathcal{U}(R)$, порождающий R (см. [8]), $\theta \in \mathrm{Aut}R$, $\mathcal{U}(R) = R + iR$ – обертывающая W^*-алгебра для R, $\overline{\theta} \in \mathrm{Aut}(\mathcal{U}(R))$, $*$-автоморфизм, линейно продолжающий θ на $\mathcal{U}(R)$.

Лемма 2.1. *$p(\theta) = 0$ тогда и только тогда, когда $p(\overline{\theta}) = 0$.*

Доказательство. Очевидно, что если $p(\overline{\theta}) = 0$, то $p(\theta) = 0$. Покажем обратное. Предположим, что $p(\theta) = 0$, но $p(\overline{\theta}) \neq 0$. Тогда существует проектор e из $\mathcal{U}(R)$, такой, что $\overline{\theta}(e) = e$, $\overline{\theta}^e = \mathrm{Ad}w$, $w \in e\mathcal{U}(R)e$. Так как $\overline{\theta}(\alpha(e)) = \alpha(e)$ и $\alpha(e)$, $e \in \mathcal{U}(R)^{\overline{\theta}}$, а также $\alpha(e) \sim e$ в $\mathcal{U}(R)$, то проекторы $\alpha(e)$ и e эквивалентны в $\mathcal{U}(R)^{\overline{\theta}}$. Тогда существует некоторый унитарный u из $\mathcal{U}(R)^{\overline{\theta}}$ такой, что $ueu^* = \alpha(e)$ и $\alpha(u) = u$. Рассмотрим $*$-антиавтоморфизм $\alpha_1 = \mathrm{Ad}u \cdot \alpha$. Так как $\alpha(u) = u$, $*$-антиавтоморфизмы α и α_1 сопряжены. Легко проверить, что $\alpha_1(e) = e$ и $\alpha_1\overline{\theta} = \overline{\theta}\alpha_1$, поскольку $\overline{\theta}(u) = u$. По лемме 1.1 из [5] существует унитарный v элемент из $\mathcal{U}(R)^{\overline{\theta}}$, такой, что $u = v\alpha(v)$. Пусть $\sigma = \mathrm{Ad}v$. Очевидно, что $\overline{\theta}\sigma = \sigma\overline{\theta}$. Положим: $f = \sigma^{-1}(e)$. Легко видеть, что $\alpha(f) = f$ и $\theta(f) = f$. Пусть $u_1 = \sigma^{-1}(w)$. Непосредственно проверяется, что $\theta^f = \mathrm{Ad}u_1$, $\quad u_1^*u_1 = u_1u_1^* = f$. Следовательно, $p(\theta) \neq 0$, $p(\theta) \geq f$, $f \neq 0$. Лемма доказана.

Лемма 2.2. *Если $\theta \notin \mathrm{Int}(R)$, тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует проектор $e \neq 0$, такой, что $\|e\theta(e)\| \leq \varepsilon$.*

Доказательство леммы проводится аналогично доказательству леммы 1.2.3 из [7].

Аналогичный результат получим для $*$-антиавтоморфизмов. Пусть M – σ-конечная W^*-алгебра и $\theta \in \mathrm{Ant}M$.

Лемма 2.3. *Если $\theta^2 \notin \mathrm{Int}M$, тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует проектор $f \in M$, $f \neq 0$, такой, что $\|f\theta(f)\| \leq \varepsilon$.*

Доказательство. Пусть β – инволютивный $*$-антиавтоморфизм M, такой, что $\theta\beta = \beta\theta$ (см. [10], лемма 1.4.1). Положим $\gamma = \theta\beta$. Пусть $M^\beta = \{x \in M : \beta(x) = x^*\}$ – вещественная W^*-алгебра, порожденная β. Применяя лемму 2.2 к $*$-автоморфизму γ, получим: $\|f\gamma(f)\| \le \varepsilon$, где f – некоторый проектор из M^β. Следовательно, $\|f\gamma(f)\| = \|f\theta\beta(f)\| = \|f\theta(f)\| \le \varepsilon$. Лемма доказана.

Теперь докажем один из аналогов леммы Рохлина, который отличается от случая доказанного для W^*-алгебр (см. теорему 1.2.1 из [7]).

Лемма 2.4.

(A) *Пусть R – σ-конечная вещественная W^*-алгебра, $\theta \in \mathrm{Aut}R$.*

(i) *Если θ собственно внешний, тогда*

$$\left.\begin{array}{l} \text{для любого ненулевого проектора } e \in R \\ \text{и любого } \varepsilon > 0, \text{ существует ненулевой} \\ \text{проектор } f \le e \text{ такой, что } \|f\theta(f)\| \le \varepsilon. \end{array}\right] \qquad (*)$$

(ii) *Пусть выполнено условие $(*)$. Если не существует проектора $g \in R$ такого, что $\theta^g = \mathrm{Ad}v$ и $\mathrm{Sp}v = \{\pm i\}$, тогда θ собственно внешний.*

(B) *Пусть M – σ-конечная W^*-алгебра, $\theta \in \mathrm{Ant}M$.*

(iii) *Если θ собственно внешний, тогда для антиавтоморфизма θ имеет место условие $(*)$.*

(iv) *Пусть для антиавтоморфизма θ выполнено условие $(*)$. Если не существует проектора $g \in M$ такого, что $(\theta^2)^g = \mathrm{Ad}v$ и $\mathrm{Sp}v = \{\pm i\}$, тогда θ собственно внешний.*

Доказательство. Доказательство утверждений (i) и (iii) легко проводится аналогично доказательству теоремы 1.2.1 из [7] с применением лемм 2.2–2.4.

Докажем (ii). Предположим, что автоморфизм θ не является собственно внешним, т.е. $p(\theta) \ne 0$. Тогда, не ограничивая общности, можем считать, что $\theta = \mathrm{Ad}u$, $\mathrm{Sp}u \ne \{\pm i\}$, где u – некоторый унитарный элемент из R. Пусть e – спектральный проектор унитарного u, такой, что $\|ue - \lambda e\| \le \varepsilon/2$, где $\lambda \in C$, $|\lambda| = 1$. Заметим, что $e \in \mathcal{U}(R)$. Предположим, что не существует проектора e_1 из

R, такого, что $e_1 \le e$, $e_1 \ne 0$. Тогда легко доказывается, что проекторы e и $\alpha(e)$ ортогональны, причем $e = \frac{1}{2}f + iq$, где $f = \alpha(e) + e$ и q косоэрмитовый элемент из R. Очевидно, что $\|u\alpha(e) - \overline{\lambda}e\| \le \varepsilon/2$. Тогда $\|\mathrm{Ad}(uf) - \mathrm{Ad}(\lambda e + \overline{\lambda}\alpha(e))\| \le \varepsilon$, т.е. $\|\theta^f - \mathrm{Ad}w\| \le \varepsilon$, где $w = \lambda e + \overline{\lambda}\alpha(e)$ является унитарным в R^f. Так как $\lambda \ne \pm i$, то $\lambda = a + ib$, где $a, b \in \mathbb{R}$ и $a \ne 0$. Следовательно, $w = af - 2bq$.

Пусть g произвольный проектор из $R^f, g \ne 0$. Тогда легко показать, что

$$\|g\mathrm{Ad}w(g)\|^2 = \|g\mathrm{Ad}w(g)g\| \ge \|a^2 g\|,$$

т.е. $\|g\mathrm{Ad}w(g)\| \ge |a| > 0$. Это противоречит условию $(*)$. Если существует вещественный подпроектор $g \le e$, $g \ne 0$, то положим: $f = g$.

Теперь докажем утверждение (iv). Пусть θ $*$-антиавтоморфизм M, не являющийся собственно внешним. Положим: $\gamma = \theta\beta$, где β $*$-антиавтоморфизм, построенный в лемме 1.4.1 из [10]. Поскольку $*$-автоморфизм γ^2 – не собственно внешний, тогда $*$-автоморфизм γ также не собственно внешний. Рассмотрим вещественную W^*-алгебру $M^\beta = \{x \in M : \beta(x) = x^*\}$, порожденную $*$-антиавтоморфизмом β. По лемме 2.1 автоморфизм $\theta_1 = \gamma|_{M^\beta}$ также не собственно внешний. Как и в первой части доказательства леммы, построим проектор $e \in M^\beta$ такой, что для любого проектора $f \le e$, $f \ne 0$ имеет место: $\|\theta_1(f)f\| \ge \frac{1}{2}$. Отсюда получим: $\|\theta_1(f)f\| = \|\theta(\beta(f))f\| = \|\theta(f)f\| \ge \frac{1}{2}$. Следовательно, мы построили проектор e такой, что для любого проектора $f(\le e)$, $f \ne 0$ выполняется: $\|f\theta(f)\| > \varepsilon$, и мы получили противоречие.

Замечание 2.5. В дискретном случае из условия $(*)$ не следует сразу, что θ собственно внешний.

Действительно, пусть $R = M_2(\mathbb{R})$ и $\theta = \mathrm{Ad}u$, где u унитарный определенный следующим образом:

$$u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть f произвольный проектор из R. Легко показать, что f имеет следующий вид

$$f = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & 1-\alpha \end{pmatrix}, \quad \text{если} \ \ \beta \ne 0,$$

$$\text{и} \quad f = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}, \quad \text{если} \quad \beta = 0.$$

Непосредственно проверяется, что если $f \neq \mathbb{1}$, то $f\theta(f) = 0$.

Замечание 2.6. Если R – непрерывная *σ-конечная вещественная W^*-алгебра*, то из условия $(*)$ следует, что *θ является собственно внешним.*

Действительно, пусть выполнено условие $(*)$ и предположим, что $p(\theta) \neq 0$. По лемме 2.1 имеем $p(\overline{\theta}) \neq 0$, следовательно, существует некоторый унитарный $u \in R$, такой, что $\theta = \mathrm{Ad}u$. Тогда, как доказано в теореме 1.2.1 из [7], для некоторого спектрального проектора $e \in M$ (унитарного u) выполняется: $\|e_1\overline{\theta}(e_1)\| \geq 1/2$ для всех $e_1 \leq e$, $e_1 \neq 0$.

Пусть e произвольный спектральный проектор унитарного u. Рассмотрим подалгебру $\mathcal{U}(R)^{\overline{\theta}} = R^\theta + i \cdot R^\theta$. Ясно, что $u, e \in \mathcal{U}(R)^{\overline{\theta}}$. Легко построить проектор f из R^θ, который эквивалентен e. Тогда $e = wfw^*$ для некоторого частичного изометрия w из $\mathcal{U}(R)^{\overline{\theta}}$. Положим $e_1 = wf_1w^*$, где f_1 подпроектор f, который удовлетворяет условию $(*)$. Тогда

$$\|e_1\theta(e_1)\| = \|wf_1w^*\theta(w)\theta(f_1)\theta(w^*)\| =$$

$$= \|wf_1\theta(f_1)w^*\| = \|f_1\theta(f_1)\| \leq \varepsilon.$$

Это противоречие. Значит, $p(\theta) = 0$.

Замечание 2.7. Напомним, что в комплексном случае автоморфизм θ собственно внешний тогда и только тогда, когда выполняется условие $(*)$.

Теперь, используя лемму 2.4 и следуя доказательству теоремы 1.2.5 из [7], мы получаем некоммутативный вещественный аналог леммы Рохлина.

Теорема 2.8.

1) *Пусть R – конечная вещественная W^*-алгебра, τ – точный нормальный след на R с $\tau(1) = 1$ и пусть $*$-автоморфизм $\theta \in \mathrm{Aut}R$ – апериодический и $\tau \cdot \theta = \tau$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ и любого $n \in N$ существует разбиение единицы $\{F_i, i = 1, \dots, n\}$ в R, такое, что:*

$$\|\theta(F_1) - F_2\|_2 \le \varepsilon, \dots ,$$

$$\|\theta(F_k) - F_{k+1}\|_2 \le \varepsilon, \dots , \|\theta(F_n) - F_1\|_2 \le \varepsilon;$$

2) *Пусть M – конечная W^*-алгебра, τ – точный нормальный след на M с $\tau(1) = 1$ и пусть $*$-антиавтоморфизм $\theta \in \mathrm{Ant}M$ – апериодический и такой, что $\tau \cdot \theta = \tau$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ и любого четного $n \in N$ существует разбиение единицы $\{F_i, i = 1, \dots, n\}$ в M, такое, что:*

$$\|\theta(F_1) - F_2\|_2 \le \varepsilon, \dots ,$$

$$\|\theta(F_k) - F_{k+1}\|_2 \le \varepsilon, \dots , \|\theta(F_n) - F_1\|_2 \le \varepsilon.$$

3. Стабильность апериодических автоморфизмов и антиавтоморфизмов алгебр фон Неймана

Пусть R – вещественная W^*-алгебра, $\theta \in \mathrm{Aut}R$. По аналогии с комплексным случаем, введем понятие центрально тривиального $*$-автоморфизма для вещественных W^*-алгебр.

Определение. *$*$-Автоморфизм $\theta \in \mathrm{Aut}R$ называется центрально тривиальным, если $\theta(x_n) - x_n \to 0$ $*$-сильно при $n \to \infty$, для любой центральной последовательности $(x_n)_{n \in N}$ из R.*

Будем обозначать через $Ct(R)$ подгруппу всех центрально тривиальных $*$-автоморфизмов R в $\mathrm{Aut}R$.

Очевидно, что $\theta \in \mathrm{Aut}R$ – центрально тривиальный тогда и только тогда, когда $\overline{\theta}$ – центрально тривиальный в $\mathcal{U}(R)$, где $\overline{\theta}$ линейное продолжение θ на $\mathcal{U}(R)$.

Пусть в дальнейшем ω – свободный ультрафильтр на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$, R_ω – вещественная W^*-алгебра центральных последовательностей [11], θ_ω из $\mathrm{Aut}R_\omega$ [7, 11] (соотв. если $\theta \in \mathrm{Ant}M$, то θ_ω из $\mathrm{Ant}M_\omega$ [5]).

Лемма 3.1. *Пусть R – вещественный фактор с сепарабельным предсопряженным, $\theta \in \mathrm{Aut}(R)$. Тогда эквивалентны следующие условия:*
1) $\theta \notin Ct(R)$;
2) $\theta_\omega \neq id$;
3) θ_ω – *собственно внешний.*

Доказательство леммы легко следует из леммы 2.1 и предложения 2.1.2 из [7].

Определение. *Пусть R – вещественный фактор, $\theta \in \mathrm{Aut}(R)$. Асимптотическим периодом $*$-автоморфизма θ называется натуральное число $p_a(\theta)$, такое, что $\theta^n \in Ct(R)$ тогда и только тогда, когда $n \in p_a(\theta)Z$.*

Для $*$-антиавтоморфизма θ W^*-алгебры будем полагать: $p_a(\theta) = p_a(\theta^2)$.

Лемма 3.2. *Пусть M – вещественный (соотв. комплексный) W^*-фактор с сепарабельным предсопряженным и пусть $\theta \in \mathrm{Aut}(M)$ (соотв. $\theta \in \mathrm{Ant}(M)$) с $p_a(\theta) = 0$. Тогда для $\forall n \in N$ и любой счетной подпоследовательности $(x^m)_{m\in N}$ из M_ω существует разбиение единицы $(f_k)_{k=\overline{1,n}}$ в M_ω такое, что:*

$$(a) \qquad f_k \text{ коммутирует со всеми } (x^m)_{m\in N};$$

$$(b) \qquad \theta_\omega(f_k) = f_{k+1}, \quad k = \overline{1,n}, \quad f_{n+1} = f_1.$$

Доказательство. В силу леммы 3.1 и по теореме 2.8 существует разбиение единицы $(\tilde{f}_j)_{k=\overline{1,n}}$ в M_ω, такое, что $\|\theta_\omega(\tilde{f}_j) - \tilde{f}_{j+1}\|_2 < \delta$. Пусть ϕ – точное нормальное состояние на M и $(\psi_\nu)_{\nu\in N}$ – плотная последовательность в M_*. Тогда с помощью индукции по ν и теоремы 2.8 строится последовательность $(f_k^\nu)_{k=\overline{1,n}}$ разбиений единиц в M, такая, что

$$(a) \qquad \| \, [\psi_l, f_k^\nu] \, \| \le \frac{1}{\nu}, \quad l = \overline{1,\nu}, \quad k = \overline{1,n};$$

$$(b) \qquad \| \, [x_\nu^k, f_j^\nu] \, \| \le \frac{1}{\nu}, \quad k = \overline{1,\nu}, \quad j = \overline{1,n};$$

$$(c) \qquad \| \, \theta(f_j^\nu) - f_{j+1}^\nu \, \|_\phi^\sharp \le \frac{1}{\nu}, \quad j = \overline{1,n},$$

где последовательность $(x_\nu^k)_{\nu\in N}$ из M является представителем для (x^k). Пусть $(f_j)_{j=\overline{1,n}}$ – набор разбиений единицы в M_ω, для которого последовательность $(f_j^\nu)_{\nu\in N}$ является представителем. По условию (b) этот набор коммутирует с каждым (x^k) и в силу (c) имеем: $\theta_\omega(f_j) = f_{j+1}$, $j = \overline{1,n}$. Лемма доказана.

Используя теорему 2.8 и лемму 3.2 и, следуя доказательству теоремы 2.1.3 из [7], получим следующую теорему о стабильности.

Теорема 3.3.

1) *Пусть R – вещественная W^*-алгебра с сепарабельным предсопряженным, $\theta \in \mathrm{Aut}(R)$, такой, что $p_a(\theta) = 0$. Тогда для любого унитарного u из R_ω существует некоторый унитарный v из R_ω такой, что $\theta_\omega(v) = uv$.*
2) *Пусть M – W^*-алгебра с сепарабельным предсопряженным, $\theta \in \mathrm{Ant}(M)$, такой, что $p_a(\theta) = 0$. Тогда для любого унитарного u из M_ω существует некоторый унитарный v из M_ω такой, что $\theta_\omega(v) = uv^*$.*

4. Классификация вещественных инъективных факторов типа III_λ, $0 < \lambda < 1$

Напомним [2], что W^*-алгебра M в $B(H)$ называется инъективной, если существует проекционное отображение P из $B(H)$ на M, такое, что $P(\mathbb{I}) = \mathbb{I}$ и $\|P\| = 1$. Вещественная алгебра R называется инъективной, если обертывающая алгебра $\mathcal{U}(R)$ является инъективной (см. [8]). Пусть S_p – канонический чисто периодический $*$-автоморфизм R (соотв. $*$-антиавтоморфизм M) с периодом p (см. [12, 10]).

Теперь, используя теорему 3.3, сформулируем аналог теоремы 2.3.1 из [7].

Лемма 4.1. *Пусть R – вещественный (соотв. M – комплексный) инъективный фактор с сепарабельным предсопряженным, $\theta \in \mathrm{Aut}(R)$ (соотв. $\theta \in \mathrm{Ant}(M)$), $p \in N$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(a) $p_a(\theta) = 0 \pmod p$;
(b) *$\theta \otimes S_p$ внешне сопряжен с θ;*
(c) *для любого $\varphi \in R_*^+$, $\delta > 0$, существует унитарный P из R (соотв. P из M), такой, что $\| P - 1 \|_\varphi^\# < \delta$ и автоморфизм $\mathrm{Ad}P \cdot \theta$ сопряжен с $S_p \cdot \theta \otimes S_p$.*

Доказательство. Покажем, что (a) $\Rightarrow$(c). Пусть φ – точное нормальное состояние на R (соотв. на M) и $\{(\psi_j), j \in N\}$ последовательность из R_*, плотная в R_* (соотв. из M_* и плотная в M_*). Аналогично доказательству теоремы 2.3.1 из [7] по индукции ν строятся последовательность $\{(P_\nu), \nu \in N\}$ унитарных из R (соотв. из M) и последовательность $\{(e^\nu_{i,j}), i, j = \overline{1, n_\nu}\}$ систем матричных единиц, такие, что

(1) вещественный (соотв. комплексный) фактор K_ν, порожденный системой $\{(e^\nu_{i,j}), i, j = \overline{1, n_\nu}\}$, коммутирует с каждым $K_1, \ldots, K_{\nu-1}$;
(2) $\| [e^\nu_{i,j}, \psi_k] \| \leq n_\nu^{-2} 2^{-\nu}$, для $k \leq \nu$ и $i, j = \overline{1, n_\nu}$;
(3) $P_\nu \in (K_1 \cup \ldots \cup K_{\nu-1})$;
(4) $\theta_\nu = \mathrm{Ad}(P_\nu P_{\nu-1} \ldots P_1)\theta : \theta_\nu(e^k_{i,j}) = e^k_{i+1,j+1}$ (соотв. $\theta_\nu(e^k_{i,j}) = e^k_{j+1,i+1}$ в M), $k \leq \nu$;
(5) $\| (P_\nu P_{\nu-1} \ldots P_1) - (P_{\nu-1} P_{\nu-2} \ldots P_1) \|^\#_\varphi < \delta 2^{-\nu}$,

где $n_\nu \in N : p_a(\theta) = 0 \ (\mathrm{mod}(n_\nu))$.

В силу (5) последовательность $\{(P_\nu P_{\nu-1} \ldots P_1),\ \nu \in N\}$ $*$-сильно сходится к некоторому унитарному $P \in R$ (соотв. к унитарному $P \in M$), такому, что $\| P - 1 \|^\#_\varphi \leq \delta$. Так как $\theta_\nu \longrightarrow \theta_\infty$ при $\nu \longrightarrow \infty$, то положим: $\theta_\infty = \mathrm{Ad}P \cdot \theta$. Тогда в силу (4) имеем:

(6) $\theta_\infty(e^k_{i,j}) = e^k_{i+1,j+1}$ (соотв. $\theta_\infty(e^k_{i,j}) = e^k_{j+1,i+1}$ в M)

для всех i, j, k. Используя условие (2) и лемму 2.2.10 из [10] (соотв. лемму 2.3.6 из [7]), получим: $R = K \otimes K'$ (соотв. $M = K \otimes K'$), где K – подфактор типа II_1 в R (соотв. в M), порожденный всеми K_ν. Очевидно, что в силу (6) сужение θ_∞ на подфактор K сопряжено с S_p. Поэтому, используя сопряженность $S_p \sim S_p \otimes S_p$, получим:

$$\theta_\infty = \theta_\infty \mid_K \otimes \theta_\infty \mid_{K'} \sim S_p \otimes \theta_\infty \mid_{K'} \sim S_p \otimes S_p \otimes \theta_\infty \mid_{K'} \sim S_p \otimes \theta_\infty.$$

Это доказывает условие (c). Импликации (c)$\Rightarrow$(b) $\Rightarrow$(a) являются очевидными. Лемма доказана.

Используя лемму 4.1, а также следуя доказательству леммы 3.2.7 из [7], получим следующую лемму.

Лемма 4.2. *Пусть R – вещественный (соотв. M – комплексный) инъективный фактор, R_* (соотв. M_*) – его сепарабельное предсопряженное и $\theta \in \overline{\mathrm{Int}}(R)$ (соотв. $\theta^2 \in \overline{\mathrm{Int}}(M)$), с $p_a(\theta) = 0$. Пусть φ*

– точное нормальное состояние на R (соотв. состояние на M), $\{(\psi_j), j \in N\}$ – последовательность из $[0, \varphi]_{R_*}$ (соотв. последовательность из $[0, \varphi]_{M_*}$). Тогда существуют последовательность $\{(K_n), n \in N\}$ – подфакторов R (соотв. подфакторов M) и последовательность $\{(P_n), n \in N\}$ – унитарных элементов из R (соотв. унитарных из M), такие, что:

(a) *K_n коммутирует с K_m, $m < n$;*
(b) *K_n порождается некоторым семейством $\{(F_j^n), j = 1, \ldots, m_\nu\}$ – разбиений единиц и некоторым унитарным $U_n^{m_\nu} = 1$, такими, что: $U_n F_j^n U_n^* = F_{j+1}^n$, $j = 1, \ldots, m_\nu$;*
(c) *$\| [\psi_i, U_n] \| \leq \delta_n$, $\| [\psi_i, F_j^n] \| \leq \delta_n$, $\forall n \in N$, $i < n$, $j = 1, \ldots, m_\nu$;*
(d) *для всех $n \in N$, P_n коммутирует с каждым $K_1, \ldots, K_{n-1}$;*
(e) *$\| (P_n - 1) P_{n-1} \ldots P_1 \|_\varphi^\# \leq 8/m_\nu$;*
(f) *положим: $\theta_n = \mathrm{Ad}(P_n \ldots P_1) \cdot \theta$, тогда $\theta_n \mid_{K_j} = \mathrm{Ad} U_j$ (соотв. $\theta_n^2 \mid_{K_j} = \mathrm{Ad} U_j$), $j \leq n$;*
(g) *для $j \leq n$ $\| \psi_j \theta_n^{-1} - \psi_j \mathrm{Ad}(U_n U_{n-1} \ldots U_1)^{-1} \| \leq \varepsilon_n$ (соотв. $\| \psi_j \theta_n^{-2} - \psi_j \mathrm{Ad}(U_n U_{n-1} \ldots U_1)^{-1} \| \leq \varepsilon_n$).*

Рассмотрим $\mathrm{Out} R = \mathrm{Aut} R / \mathrm{Int} R$, и пусть ε – канонический гомоморфизм $\varepsilon : \mathrm{Aut} R \longrightarrow \mathrm{Out} R$. Тогда, используя лемму 4.2, по аналогии с доказательством теоремы 2 из [7], получим следующий результат.

Теорема 4.3.

1) *Пусть R – вещественный инъективный фактор с сепарабельным предсопряженным, θ_1, θ_2 $*$-автоморфизмы R, такие, что $\theta_1, \theta_2 \in \overline{\mathrm{Int}} R$, $p_a(\theta_1) = p_a(\theta_2) = 0$. Тогда существует $*$-автоморфизм σ из $\overline{\mathrm{Int}} R$, такой, что $\varepsilon(\theta_2) = \varepsilon(\sigma \theta_1 \sigma^{-1})$.*
2) *Пусть M – инъективный фактор с сепарабельным предсопряженным, θ_1, θ_2 $*$-антиавтоморфизмы M, такие, что $\theta_1^2, \theta_2^2 \in \overline{\mathrm{Int}} M$, $p_a(\theta_1) = p_a(\theta_2) = 0$. Тогда существует $*$-автоморфизм σ из $\overline{\mathrm{Int}} M$ и унитарный $u \in M$ такие, что $\mathrm{Ad} u \cdot \theta_2 = \sigma \theta_1 \sigma^{-1}$.*

Теперь рассмотрим $\mathcal{B}(R)$ (соотв. $\mathcal{B}(M)$) – множество всех классов внешней сопряженности апериодических $*$-автоморфизмов (соотв. $*$-антиавтоморфизмов) вещественного фактора R (соотв. комплексного фактора M). В множествах $\mathcal{B}(R)$ и $\mathcal{B}(M)$ введем алгебраическую операцию $\mathrm{class}\,(\alpha) + \mathrm{class}\,(\beta) = \mathrm{class}\,(\alpha \otimes \beta)$. Пусть $\mathrm{mod}(\cdot)$ – фундаментальный гомоморфизм в $\mathrm{Aut}(R)$ (соотв. в $\mathrm{Ant}(M)$) [5], то есть положительное число, такое, что $\tau \cdot \alpha = \mathrm{mod} \cdot \tau$, где τ – точный нормальный полуконечный след на R (соотв. след на M). Тогда, с помощью теоремы 4.3 и теоремы 2 из [13] о классификации периодических $*$-автоморфизмов и $*$-антиавтоморфизмов, доказывается следующая теорема.

Теорема 4.4.

1) *Пусть R – вещественный инъективный фактор типа II_∞. Тогда отображение* $\mathrm{mod} : \mathcal{B}(R) \to [0, \infty)$ *является изоморфизмом между группами $\mathcal{B}(R)$ и $[0, \infty)$.*
2) *Пусть M – инъективный фактор типа II_∞. Тогда отображение* $\mathrm{mod} : \mathcal{B}(M) \to [0, \infty)$ *является изоморфизмом между группами $\mathcal{B}(R)$ и $[0, \infty)$.*

Здесь $[0, \infty)$ рассматривается, разумеется, как группа по умножению.

Из теоремы 4.4 получим следующие следствия.

Следствие 4.5. *Пусть R – вещественный инъективный фактор типа II_∞. Тогда для каждого $\lambda \in (0, \infty)$, $\lambda \neq 1$ существует единственный (с точностью до внешней сопряженности) класс $*$-автоморфизмов R с* $\mathrm{mod}(\cdot) = \lambda$.

Следствие 4.6. *Пусть M – инъективный фактор типа II_∞. Тогда для каждого $\lambda \in (0, \infty)$, $\lambda \neq 1$ существует единственный (с точностью до внешней сопряженности) класс $*$-антиавтоморфизмов M с* $\mathrm{mod}(\cdot) = \lambda$.

Заметим, что результат следствия 4.6 независимо получен Т. Джиордано [14].

Из теоремы 3.3 из [3] и следствий 4.5 и 4.6 вытекает

Следствие 4.7. *С точностью до изоморфизма существуют два класса вещественных инъективных факторов типа III_λ, $\lambda \in (0, 1)$.*

Этот результат дополняет работу [3].

5. Вещественный гиперфинитный фактор типа III_λ, $0 < \lambda < 1$

Определение [11]. *Вещественный фактор R называется гиперфинитным, если существует возрастающая последовательность $\{R_n\}$ конечномерных подалгебр R, такая, что $\mathbb{1} \in R_n$ и $\bigcup\limits_{n\geq 1} R_n$ слабо плотно в R.*

Пусть $\|x\|_\psi^\# = \psi((x^*x+xx^*)/2)^{1/2}$ полунорма, порожденная нормальным состоянием ψ. Легко видеть, что для любого унитарного $u \in R$ имеем $\|u\|_\psi^\# = 1$, и последовательность $\{x_n\}$ в R σ-сильно сходится к элементу x тогда и только тогда, когда $\lim\limits_n \|x_n - x\|_\psi^\# = 0$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 5.1. *Пусть R вещественный фактор типа III_λ, $0 < \lambda < 1$. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *R гиперфинитный;*
(2) *R счетно порожден и для набора $x_1, x_2, \dots, x_n$ элементов из R и для любого нормального состояния ψ в R, $\forall \varepsilon > 0$, существуют B – конечномерная подалгебра R и набор $y_1, y_2, \dots, y_n$ элементов из B такие, что $\|y_k - x_k\|_\psi^\# \leq \varepsilon, k = 1, 2, \dots, n$;*
(3) *Существует возрастающая последовательность $\{R_n\}$ подалгебр R, изоморфных алгебре $2^n \times 2^n$-вещественных матриц, такая, что $\mathbb{1} \in R_n$ и $\bigcup\limits_{n\geq 1} R_n$ слабо плотно в R.*

Доказательства импликаций (1) $\Rightarrow$ (2), (3) $\Rightarrow$ (1) являются очевидными. Доказательство импликации (2) $\Rightarrow$ (3) проводится аналогично доказательству теоремы 3 из [15]. Покажем, что конечномерный подфактор B, а следовательно и подфакторы $\{R_n\}$ являются вещественными матричными алгебрами. Действительно, пусть B не изоморфен алгебре $2^n \times 2^n$ вещественных матриц, и пусть R_4 – алгебра 4×4 вещественных матриц в коммутанте B'. Так как R_4 изоморфна алгебре $Q \otimes Q$, то алгебру B отождествим с $B \otimes Q$, где Q – алгебра 2×2 матриц над полем кватернионов. Тогда по следствию 2.3 из [11] подфактор B изоморфен алгебре $2^k \times 2^k$ вещественных матриц для некоторого k.

Заметим, что если вещественная W^*-алгебра R конечна, то этот результат доказан в работе [11].

Используя теорему 5.1, аналогично следствию 2.10 из [11] докажем следующую теорему.

Теорема 5.2. *Пусть* M – W^**-фактор типа* III_λ, $0 < \lambda < 1$.

Тогда класс инволютивных $*$*-антиавтоморфизмов, порождающих гиперфинитные вещественные факторы, единственен.*

Доказательство. Пусть α – инволютивный $*$-антиавтоморфизм в M и пусть $R = \{x \in M : \alpha(x) = x^*\}$ вещественный фактор, порожденный α, который по условию теоремы является гиперфинитным. По теореме 5.1 существует возрастающая последовательность $\{R_n\}$ подалгебр R, изоморфных алгебре $2^n \times 2^n$-вещественных матриц, такая, что $\mathbb{I} \in R_n$ и $\bigcup\limits_{n\geq 1} R_n$ слабо плотно в R. Пусть $M_n = R_n + iR_n$ фактор типа I_{2^n}. Если через t_n мы обозначим транспозицию на M_n, которая является инволютивным $*$-антиавтоморфизмом в M_n, тогда $R_n = \{x \in M_n : t_n(x) = x^*\}$, следовательно, $\alpha(x) = t_n(x)$ для всех $x \in M_n$. Таким образом, всякий $*$-антиавтоморфизм α является индуктивным пределом таких отображений. Поскольку любые инволютивные $*$-антиавтоморфизмы есть пределы таких отображений, то они сопряжены в $\bigcup\limits_{n\geq 1} M_n$. Так как каждый автоморфизм $\bigcup\limits_{n\geq 1} M_n$ сходится к единственному автоморфизму в M, то они будут сопряженными и в M. Теорема доказана.

По следствию 4.7 существуют два класса неизоморфных вещественных инъективных факторов типа III_λ, $0 < \lambda < 1$, комплексно порождающих изоморфные факторы типа III_λ. Один из них порождается инволютивным $*$-антиавтоморфизмом с $\mathrm{mod}\,\alpha = 1$, а другой порождается инволютивным $*$-антиавтоморфизмом с $\mathrm{mod}\,\alpha = \sqrt{\lambda}$. Поскольку легко построить вещественный гиперфинитный фактор R типа III_λ, $0 < \lambda < 1$, с $\mathrm{mod}\,\alpha = 1$ (например, вещественный фактор Пауэрса, т.е. бесконечное тензорное произведение 2×2 вещественных матриц), из теоремы 5.2 вытекает

Следствие 5.3. *Вещественный инъективный* W^**-фактор* R *типа* III_λ, $0 < \lambda < 1$, *является гиперфинитным тогда и только тогда, когда* $\mathrm{mod}\,\alpha = 1$.

Отсюда вытекает, что во втором классе содержатся инъективные, но негиперфинитные вещественные факторы типа III_λ, $0 < \lambda < 1$, т.е. имеет место следующее

Следствие 5.4. *Для вещественных факторов понятия инъективности и гиперфинитности неэквивалентны.*

Напомним [2], что в комплексном случае эти понятия совпадают.

Автор выражает благодарность Ш. А. Аюпову и В. И. Чилину за полезные обсуждения.

Литература

1. A. Connes, *Une classification des facteurs de type* III. — Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. **6** (1973), 133–252.
2. A. Connes, *Classification of injective factors.* — Ann. Math. **104, No. 1** (1976), 73–115.
3. P. J. Stacey, *Real structure in σ-finite factors of type* III_λ *where* $0 < \lambda < 1$. — Proc. London Math. Soc. **47 (3)** (1983), 275–284.
4. Ш. М. Усманов, *Классификация вещественных W^*-факторов типа* III_λ, $\lambda \in (0,1)$. — Функ. анализ и его прилож. **19, вып. 3** (1985), 94–95.
5. T. Giordano, *Antiautomorphismes involutifs des facteurs de von Neumann injectifs.* Thèse, Université de Neuchatel (1981), p. 106.
6. T. Giordano, *Antiautomorphismes involutifs des facteurs de von Neumann injectifs.* II. — J. Funct. Anal. **51, No. 3** (1983), 326-360.
7. A. Connes, *Outer conjugacy classes of automorphisms of factors.* — Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 4^e serie **8** (1975), 383–420.
8. Ш. А. Аюпов, *Классификация и представление упорядоченных йордановых алгебр.* Изд. "ФАН", Ташкент (1986).
9. M. Takesaki, *Theory of operator algebras,* I. Springer, Berlin (1979).
10. А. Рахимов, *Периодические автоморфизмы и антиавтоморфизмы инъективных факторов типа* II_1. Диссертация на соискание учен. степ. канд. физ.-мат. наук, ИМ АН РУз, Ташкент (1992).
11. E. Stormer, *Real structure in the hyperfinite factor.* — Duke Math. J. **47, No. 1** (1980), 145–153.
12. A. Connes, *Periodic automorphisms of the hyperfinite factor of type* II_1. — Acta Sci. Math. **No. 39** (1977), 39–66.
13. А. А. Рахимов, Ш. М. Усманов, *Периодические $*$-автоморфизмы и $*$-антиавтоморфизмы инъективных факторов.* — Функ. анализ и его прилож. **29, вып. 1** (1995), 87–89.
14. T. Giordano, *Classification of antiautomorphisms of injective factors of type* III_λ, $\lambda \neq 0$. Current topics in operator algebras (Nara, 1990), 425–431, World Sci. Publishing, River Edge, NJ (1991).
15. G. A. Elliott, E. J. Woods, *The equivalence of various definition for a properly infinite von Neumann algebra to be approximately finite dimensional.* — Proc. Amer. Math. Soc. **60** (1976), 175–179.

Rakhimov A. A. On the structure of real injective W^*-factors of type III_λ, $0 < \lambda < 1$.

We consider $*$-automorphisms and $*$-antiautomorphisms of real and complex factors. We establish both the uniqueness of the class of $*$-automorphisms (with $\mathrm{mod}(\cdot) = \lambda$, $\lambda \neq 1$) of a real injective II_∞ factor and the uniqueness of the class of $*$-antiautomorphisms (with $\mathrm{mod}(\cdot) = \sqrt{\lambda}$, $\lambda \neq 1$) of a complex injective II_∞ factor. It is well known that for complex factors the notions of hyperfiniteness and injectivity are equivalent. Here we prove that for real factors the two notions are no longer equivalent.

Университет Мировой
Экономики и Дипломатии
Узбекистан
aratex@hal.freenet.uz
root@im.tashkent.su

Поступило 2 июня 1997г.