Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 255, 1998 г.

М. М. Рогинская

ДВА МНОГОМЕРНЫХ АНАЛОГА ТЕОРЕМЫ Ф. И М. РИССОВ

Введение

Напомним классическую теорему братьев Риссов.

Теорема 0.1. *Пусть μ – мера на $\mathbb{T}$ такая, что $\widehat{\mu}(k) = 0$ при $k < 0$. Тогда мера μ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега.*

В [1] можно найти несколько многомерных аналогов этого результата, использующих понятия $\boldsymbol{R}$-множеств и p-множеств.

Определение 0.1. *$\boldsymbol{R}_n$-множеством будем называть всякое множество $F \subset \mathbb{Z}^n$, для которого выполнено следующее условие: если μ – мера на $\mathbb{T}^n$ и $\widehat{\mu}(m) = 0$ при всех $m \notin F$, то мера μ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега на $\mathbb{T}^n$.*

Определение 0.2. *Для всякого положительного p, F будет называться p-множеством, если отображение $f \to \widehat{f}(k)(k \in \mathbb{Z}^n)$ будет непрерывно относительно L^p-топологии на пространстве линейных комбинаций мономов $z^n, n \in F$.*

Множество F будет называться стабильным p-множеством, если $F \cup k$ – p-множество для всякого $k \in \mathbb{Z}^m$.

Одним из наиболее ярких примеров результатов, использующих понятие p-множества, является следующая теорема.

Теорема 0.2 (Александров, Шапиро)**.** *Если все сечения множества F по первой координате являются $\boldsymbol{R}_{n-1}$-множествами, а проекция множества F на первую координату является стабильным p-множеством для некоторого $p \in (0,1)$, то F является $\boldsymbol{R}_n$-множеством.*

В настоящей работе получен новый результат в данном направлении.

Работа частично поддержана грантом ProMatematica.

Определение 0.3. *Множество F будем называть ε-асимметричным множеством, если для всякого $x \in F$ шар с центром в $(-x)$ и радиусом $\varepsilon|x|$ не пересекается с множеством F.*

Основной результат статьи применим как к мерам, заданным на торе $\mathbb{T}^n$, так и к мерам, заданным в пространстве $\mathbb{R}^n$ (соответственно, $\boldsymbol{R}_n$ будет подмножеством множества $\mathbb{Z}^n$ или $\mathbb{R}^n$).

Теорема 0.3. *Если преобразование Фурье конечной меры μ (заданной на $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{T}^n$) сосредоточено на ε-асимметричном множестве, то мера μ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега.*

В частном случае, когда преобразование Фурье меры сосредоточено в замкнутом конусе K, для которого $K \cap (-K) = \varnothing$, этот результат был получен в [3] (другим методом).

Уже в одномерном случае теорема 0.3 позволяет получить следующие "равноправные по направлениям" множества.

Пример 1. $E = \bigcup_{i\in\mathbb{Z}}(-1)^i a^i[1, a(1-\varepsilon)]$, $a > 1/(1-\varepsilon)$. (По этому принципу можно строить $\boldsymbol{R}$-множества и в более высоких размерностях.)

Несколько примеров $\boldsymbol{R}$-множеств, доставляемых теоремой 0.3 в двумерном случае показаны на рисунках 1-4.

В отличии от теоремы 0.2, которая носит индуктивный характер, т.е. позволяет построить $\boldsymbol{R}$-множество на основе $\boldsymbol{R}$-множеств в пространствах меньшей размерности, теорема 0.3 доставляет $\boldsymbol{R}$-множества "коренные" для данной размерности, в том числе и не удовлетворяющие условию теоремы 0.2 (см.рис.1). В то же время существуют $\boldsymbol{R}$-множества, удовлетворяющие условию теоремы 0.2 и не являющиеся ε-асимметричными множествами (например, множество $E = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : x > 0, y < x^2\}$).

Совмещением теорем 0.2 и 0.3 новые примеры $\boldsymbol{R}$-множеств могут быть получены в качестве несложного упражнения.

Доказательство теоремы 0.3 основанно на нижней асимптотической оценке мультипликаторных преобразований сингулярных мер на $\mathbb{R}^n$, которую мы сейчас приведем.

Определение 0.4. *Пусть $f_1, \dots, f_k \in H^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$ (под пространством $H^{1,\infty}$ мы будем понимать пространство распределений f,*

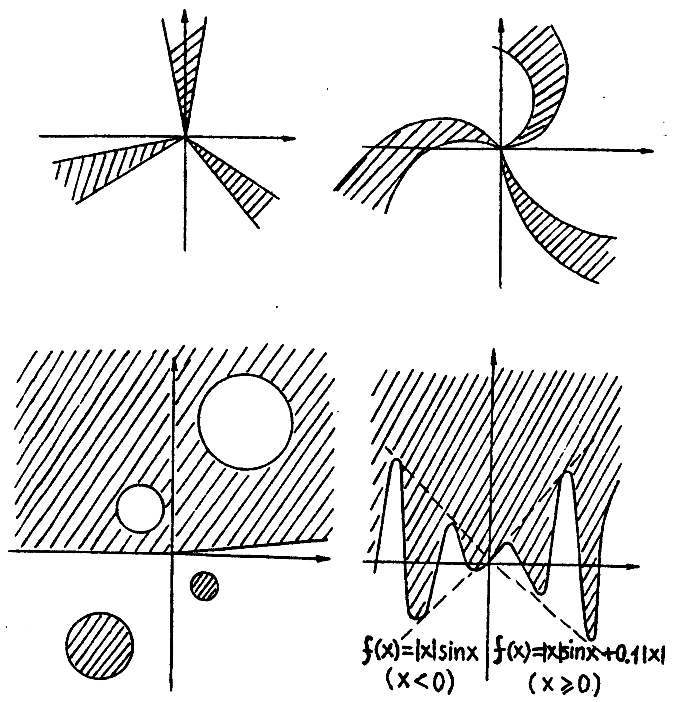

Рис. 1–4.

для которых $\sup\limits_{\lambda>0} \lambda|\{N(f) > \lambda\}| < \infty$, *где* $N(f)$ – *некасательная максимальная функция). Введем следующее обозначение:*

$$\rho(f_1, \dots, f_k) = \varlimsup_{\lambda\to\infty} \lambda \cdot \mathrm{mes}\{|(N(f_1), \dots, N(f_k))|_k > \lambda\}.$$

Теорема 0.4. *Пусть набор мультипликаторов* $\{T_i\}_{i=1}^k$ *с бесконечно гладкими вне нуля символами (под символами понимаются функции* $\{m_i\}_{i=1}^k$ *из соотношений* $T_i f = (m_i \widehat{f})^\vee$, *задающих мультипликаторы) таков, что*

i) $|D^\alpha m_i(\xi)| < S_\alpha |\xi|^{-|\alpha|}$ *при всех* $1 \le i \le k$ *и* $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$;[1]

[1]Достаточно, чтобы это условие выполнялось при $|\alpha| \le (n+1)$.

ii)
$$\inf_{\xi\in\mathbb{R}^n,\xi\neq 0}\left(\sum_i |m_i(\xi)|^2+\sum_i |m_i(-\xi)|^2\right)>0.$$

Тогда существует константа $c>0$, такая что для всякой конечной меры μ выполняется оценка

$$\rho(T_1\mu,\dots,T_k\mu)\geq c\|\mu_s\|, \tag{1}$$

где μ_s означает сингулярную составляющую меры μ.

Автор приносит искреннюю благодарность своему научному руководителю С. В. Кислякову за постановку задачи, ценные советы в ходе ее решения и помощь при подготовке рукописи.

1. Доказательство теоремы 0.4

Теорема 0.4 – усиление первой части основного результата статьи [2], и ее доказательство проходит по той же схеме.

Шаг 1. Докажем следующее утверждение.

Предложение 1.1. *Пусть набор мультипликаторов удовлетворяет условию* i) *теоремы* 0.4 *и условию*

ii$'$)
$$\inf_{\xi\in\mathbb{R}^n,\xi\neq 0}\left\{\sum_i |m_i(\xi)|^2\right\}>0.$$

Тогда существует константа $c>0$, такая, что для всякой сингулярной меры μ выполняется оценка

$$\rho(T_1\mu,\dots,T_k\mu)\geq c\|\mu\|. \tag{2}$$

Доказательство. Воспользуемся следующим предложением.

Предложение 1.2. *Если мультипликатор T удовлетворяет условию* i) *теоремы* 0.4, *то он ограничен на $H^{1,\infty}$ и $\rho(Tf)\leq C\rho(f)$ при $f\in H^{1,\infty}$.*

Доказательство последнего результата приведено в [2][2].

[2] Там это доказано только для мультипликаторов с однородным символом, но однородность нигде не используется.

Далее следует рассмотреть набор мультипликаторов $\{T'\}$, чьи символы задаются равенством

$$m_i'(\xi) = \frac{\overline{m}_i(\xi)}{\sum\limits_j |m_j(\xi)|^2}.$$

Вследствие условия ii$'$), введенные операторы удовлетворяют условию i) теоремы 0.4. Поэтому, воспользовавшись предложением 1.2, получаем, что для всякой сингулярной меры μ верна оценка

$$\|\mu\|_M \leq c_0\rho(T_1'T_1\mu + \ldots + T_k'T_k^\mu) \leq c_0'(\rho(T_1'T_1\mu) + \ldots + \rho(T_k'T_k\mu) \leq$$

$$c_0'(\tau_1\rho(T_1\mu) + \ldots + \tau_k\rho(T_k\mu)) \leq c_2\rho(T_1\mu, \ldots, T_k\mu),$$

что доказывает предложение 1.1. □

Шаг 2. Мультипликатор называется вещественным, если он переводит вещественные распределения в вещественные. Для вещественного мультипликатора вещественная составляющая его символа будет четной, а мнимая – нечетной функцией. Верно и обратное: если вещественная составляющая символа мультипликатора четна, а мнимая – нечетна, то мультипликатор является вещественным.

Следовательно, для вещественных мультипликаторов $\sum\limits_i |m_i(\xi)|^2 = \sum\limits_i |m_i(-\xi)|^2$, и условия ii) и ii$'$) эквивалентны. Поэтому для вещественных мультипликаторов теорема 0.4 доказана.

Из эквивалентности всех норм конечномерного пространства немедленно вытекает следующее.

Лемма 1.3. *Для семейства наборов распределений $\{f_i\}_{i=1}^k$ из пространства $H^{1,\infty}$ (k фиксированно)*

$$\rho(f_1, \ldots, f_k) \asymp \rho(\mathrm{Re}f_1, \ldots, \mathrm{Re}f_k, \mathrm{Im}f_1, \ldots, \mathrm{Im}f_k).$$

Рассмотрим теперь действие набора мультипликаторов, удовлетворяющего условиям i) и ii), на сингулярную вещественную меру.

Поскольку условям i) и ii) удовлетворяет также набор мультипликаторов $\{\mathrm{Re}T_i\} \cup \{\mathrm{Im}T_i\}$, имеем:

$$\rho(T_1\mu, \ldots, T_k\mu) \asymp \rho(\mathrm{Re}(T_1\mu), \ldots, \mathrm{Re}(T_k\mu), \mathrm{Im}(T_1\mu), \ldots, \mathrm{Im}(T_k\mu)) \asymp$$

$$\rho(\mathrm{Re}(T_1)\mu, \dots, \mathrm{Re}(T_k)\mu, \mathrm{Im}(T_1)\mu, \dots, \mathrm{Im}\mu) \geq c\|\mu\|_M,$$

то есть оценка (2) верна для любого набора мультипликаторов удовлетворяющего условиям i) и ii) и сингулярных вещественных мер.

Шаг 3. Докажем что, если набор мультипликаторов удовлетворяет условию i), то из выполнения оценки (2) для вещественных мер следует ее выполнение для всех мер (с другой константой).

Лемма 1.4. *Пусть мультипликатор T с символом m удовлетворяет условию i). Для конечной меры μ и точки $x \in \mathbb{R}^n$ таких, что $\|\mu\|_M = 1$, $|\mu|(B_d(x)) = 0$, выполняется оценка $N(T\mu)(x) \leq C(d)$, где $C(d)$ не зависит от меры μ и точки x.*

Доказательство. По определению

$$N(T\mu)(x) = \sup\{|T\mu * P_t(y)| : |y - x| < t\},$$

где $P_t(y) = \frac{c_n t}{(t^2+|y|^2)^{\frac{n+1}{2}}}$ – ядро Пуассона. Рассмотрим $T\mu * P_t$ при фиксированном t. Перейдем к преобразованию Фурье в смысле распределений (хотя здесь и далее имеются в виду распределения из пространства D', на которых действие мультипликатора определяется как продолжение оператора, заданного на $S' \cap H^{1,\infty}$, все участвующие распределения являются медленно растущими и, следовательно, можно рассматривать их преобразование Фурье в смысле медленно растущих распределений): $(T\mu * P_t)^\wedge = (m\widehat{\mu})\widehat{P_t} = (m\widehat{P_t})\widehat{\mu}$. Обозначим через T_t мультипликатор с символом $m\widehat{P_t}$. Поскольку символ оператора T_t суммируем, этот оператор является оператором свертки с некоторой ограниченной функцией K_t. Из суммируемости символа $m\widehat{P_t}$ получается непрерывность функции K_t и оценка $|K_t(x)| \leq C/t^n$.

Пусть, далее, φ – положительная, бесконечно гладкая функция на $\mathbb{R}^n$ с носителем в множестве $\{1/2 < |x| < 2\}$ такая, что для набора функций $\varphi_j(x) = \varphi(2^{-j}x), j \in \mathbb{Z}$, выполняется равенство $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_j(2x) = 1$ при всех $x \in \mathbb{R}^n$. Зафиксировав некоторое целое число l, рассмотрим следующий набор функций: $g_{t,i} = m\widehat{P_t}\varphi_{l+i}$ при $i > 0$ и $h_t = m\widehat{P_t} - \sum\limits_i g_{t,i}$.

Оценим величину $|D^{\alpha}g_{t,i}(\xi)|$ (при $\xi \neq 0$), исходя из равенства

$$D^{\alpha}(m\widehat{P}_t\varphi_{l+i}) = \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=\alpha,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{Z}^n_+} (D^{\alpha_1}m)(D^{\alpha_2}\widehat{P}_t)(D^{\alpha_3}\varphi_{l+i}).$$

Из условия i) следует оценка $|D^{\alpha_1}m(\xi)| \leq c_{\alpha_1}\frac{1}{|\xi|^{|\alpha_1|}}$. Из равенства $\widehat{P}_t(\xi) = e^{-t|\xi|}$, того, что $D^{\beta}(|.|)(\xi) \leq c_{\beta}|\xi|^{(1-|\beta|)}$ при $\beta \in \mathbb{Z}^n_+$, и оценки $t^k e^{-t|\xi|} \leq c_k|\xi|^{-k}$ вытекает оценка $|D^{\alpha_2}\widehat{P}_t(\xi)| \leq c_{\alpha_2}|\xi|^{-|\alpha_2|}$. Поскольку $|D^{\alpha_3}\varphi_{l+i}| \leq 2^{-(l+i)|\alpha_3|}\|D^{\alpha_3}\varphi(\xi)\|_{\infty}$ и функция φ_{l+i} сосредоточена на множестве $\Phi_{l+i} = \{\frac{1}{2}2^{l+i} < |\xi| < 2\cdot 2^{l+i}\}$, получаем, что функция $D^{\alpha}g_{t,i}$ сосредоточена на множестве Φ_{l+i} и $|D^{\alpha}g_{t,i}| \leq c2^{-(l+i)|\alpha|}$, где константа c не зависит от l, i, t. Кроме того, поскольку в дальнейшем будут использоваться только те мультииндексы α, для которых $|\alpha| \leq n+2$, можно считать, что c не зависит от α.

Пусть далее $f_{t,i} = g^{\vee}_{t,i}$ при $i > 0$, тогда $f_{t,i}$ бесконечно гладкая быстро убывающая функция, для которой, при $|\alpha| = (n+1)$, вышеприведенные оценки для $D^{\alpha}g_{t,i}$ дают оценку $|x|^{n+1}|f_{t,i}(x)| \leq c2^{-(l+i)}$. Сложив эти оценки, получим, что непрерывная вне нуля функция $\sum\limits_i f_{t,i}(x)$ не превосходит $c2^{-l}/|x|^{n+1}$. Осталось заметить, что, так как функция h_t сосредоточена на шаре радиуса $2\cdot 2^l$, $|h^{\vee}_t(x)| \leq c2^{nl}$, и, следовательно, $|K_t(x)| \leq c(2^{-l}/|x|^{n+1} + 2^{nl})$. Теперь, выбирая l так, чтобы $2^l < \frac{1}{|x|} \leq 2^{l+1}$, получаем оценку $|K_t(x)| \leq c\frac{1}{|x|^n}$.

Вернемся к рассмотрению функции $T\mu * P_t$. Как распределение, эта функция равна $K_t * \mu$. Поскольку K_t ограниченная непрерывная функция, а μ конечная мера, их свертка является непрерывной функцией. Следовательно, $T\mu * P_t(y) = K_t * \mu(y)$. При $t > d/2$ выполняется оценка

$$|T\mu * P_t(y)| = |K_t * \mu(y)| \leq \frac{c2^n}{d^n}\|\mu\|_M = C(d).$$

При $t \leq d/2$ нас интересуют только те точки y, для которых $|x-y| < d/2$, а для них расстояние от y до носителя меры μ не меньше $d/2$ и, следовательно, выполняется оценка

$$|T\mu * P_t(y)| = |K_t * \mu(y)| \leq c\frac{2^n}{d^n}\|\mu\|_M = C(d). \qquad (3)$$

Исходя из последних двух оценок, получаем: $N(T\mu)(x) \leq C(d)$. $\square$

Лемма 1.5. *Пусть конечные меры μ^* и μ^{**} имеют непересекающиеся компактные носители, а мультипликатор T удовлетворяет условию i). Тогда $\rho(T(\mu^* + \mu^{**})) \geq \rho(T\mu)$.*

Доказательство. Согласно лемме 1.4, если $N(T\mu^*)(x) > \lambda$, то точка x должна лежать достаточно близко к носителю меры μ. Будем рассматривать настолько большие значения λ, что расстояние от точек, для которых $N(T\mu^*) > \lambda$, до носителя меры μ^* меньше, чем расстояние до носителя меры μ^{**}. Применив для этих точек и меры μ^{**} лемму 1.4, получаем для них неравенство

$$N(T(\mu^* + \mu^{**})) \geq N(T\mu^*) - C(\mathrm{dist}(\mathrm{supp}\mu^*, \mathrm{supp}\mu^{**})/2).$$

Таким образом, при достаточно больших λ

$$\{N(T\mu^*) > \lambda\} \subset \{N(T(\mu^* + \mu^{**})) > \lambda - C\},$$

что доказывает лемму, поскольку C не зависит от λ. □

Лемма 1.6. *Пусть $\varphi(x)$ – кусочно-постоянная функция, представимая как линейная комбинация M характеристических функций с непересекающимися носителями, и пусть $\|\varphi\|_\infty = 1$. Пусть μ – мера, $\|\mu\|_M = 1$. Тогда $\rho(T(\varphi\mu)) \leq C(M)\rho(T\mu)$.*

Доказательство. Сначала рассмотрим случай, когда носители характеристических функций компактны. Представим $\mathbb{R}^n$ как объединение M компактных множеств, являющихся носителями вышеуказанных характеристических функций и их открытого дополнения.

Для сужения меры μ на объединение этих компактных множеств оценка следует из леммы 1.5 и того, что $\rho(f + g) \leq 2(\rho(f) + \rho(g))$.

Остальную часть меры можно представить как сумму двух мер: одна из них сосредоточена на компакте, не пересекающемся с носителем φ, другая имеет произвольно малую норму. Теперь, поскольку все рассматриваемые меры и множества борелевские, условие компактности можно убрать. □

Из леммы 1.6 можно убрать условие $\|\mu\|_M = 1$ в силу однородности относительно μ обеих частей неравенства.

Осталось рассмотреть функцию $\varphi = (|\mu|/\mu)(x)$ (эта функция задана на компакте, являющемся носителем меры μ, вне этого компакта ее можно продолжить нулем). Для каждого фиксированного M ее можно представить как сумму функции φ_1, принимающей значения $e^{i2\pi k/M}$, и функции φ_2, не превосходящей по модулю A/M. (При этом A не зависит от M и меры μ).

Имеем (для краткости будем обозначать набор мультипликаторов через T):

$$\rho(T|\mu|) \leq 2(\rho(T\varphi_1\mu) + \rho(T\varphi_2\mu)) \leq C(M)\rho(T\mu) + C_T\|\varphi_2\|_\infty\|\mu\|.$$

Поскольку $|\mu|$ – вещественная мера, левая часть оценивается снизу через $c\|\mu\|$. Итак,

$$c\|\mu\| \leq \rho(T|\mu|) \leq C(M)\rho(T\mu) + \frac{C'}{M}\|\mu\|.$$

Выбрав M так, чтобы $C'/M \leq (1/2)c$, получаем

$$(c/2)\|\mu\| \leq C(M)\rho(T\mu).$$

Шаг 4. Для окончательного доказательства теоремы 0.4 осталось избавиться от условия сингулярности меры μ.

Произвольную меру μ представим как сумму ее сингулярной и абсолютно непрерывной относительно меры Лебега частей μ_s и μ_a. Тогда $\rho(T_1\mu_a, \dots, T_k\mu_a) = \rho(\mu_a) = 0$. Таким образом, по лемме 1.4 из [2],

$$\rho(T_1\mu, \dots, T_k\mu) = \rho(T_1\mu_s, \dots, T_k\mu_s) \geq c\|\mu_s\|_M$$

2. Теорема 0.3 для $\mathbb{R}^n$

Пусть F ε-асимметричное множество в $\mathbb{R}^n$ (предполагается, что $\varepsilon < 1/2$). Рассмотрим положительную пробную функцию φ, сосредоточенную на шаре $B_{\varepsilon/8}(0)$, такую, что $\int \varphi = 1$. Построим множество F_ε следующим образом: $F_\varepsilon = \bigcup_{x\in F} B_{|x|\varepsilon/4}(x)$. Построенное множество F_ε асимметрично, т.е. $F \cap (-F) = \emptyset$. Рассмотрим функцию $m(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\mathbb{R}^n\setminus F_\varepsilon}(y)|x|^{-n}\varphi(\frac{x-y}{|x|})dy$. Эта функция равна 1 вне множества $(F_\varepsilon)_\varepsilon$, которое является асимметричным, что дает выполнение условия ii) для мультипликатора T, символом которого является m. Выполнение условия i) проверяется прямым дифференцированием. Кроме того, функция m равняется нулю на множестве F.

Пусть теперь μ – конечная мера, преобразование Фурье которой сосредоточено на множестве F. Рассмотрим распределение $T\mu$. С одной стороны, его преобразование Фурье равняется нулю, следовательно, это распределение – тождественный ноль. С другой стороны, применив теорему 0.4, получим оценку $\rho(T\mu) \geq c\|\mu_s\|_M$. Итак, $\|\mu_s\|_M = 0$, и теорема 0.3 для пространства $\mathbb{R}^n$ доказана.

3. Теорема 0.3 для $\mathbb{T}^n$

Пусть μ – конечная мера на торе $\mathbb{T}^n$, преобразование Фурье которой сосредоточено на ε-асимметричном подмножестве решетки $\mathbb{Z}^n$. Отождествим тор $\mathbb{T}^n$ с кубом $\mathbb{I}^n = (t_1 - \pi, t_1 + \pi] \times \ldots \times (t_n - \pi, t_n + \pi]$ ("точки разреза" $t_i \in (-\pi, \pi]$ будут зафиксированы позже). Мере μ соответствует мера μ^* на $\mathbb{I}^n$.

На естественном вложении $\mathbb{Z}^n$ в $\mathbb{R}^n$ преобразования Фурье мер μ и μ^* совпадают. Рассмотрим F – подмножество решетки $\mathbb{Z}^n$, на котором преобразование Фурье меры μ^* отлично от нуля. По условию, это ε-асимметричное множество в $\mathbb{R}^n$. Построим мультипликатор T (для $\mathbb{R}^n$), удовлетворяющий условию теоремы 0.4 и такой, что его символ m равен нулю на множестве F (построение было приведено в параграфе 2.

Рассмотрим распределение $T\mu^*$. Функции $K_t * \mu^* = T\mu^* * P_t$ сходятся к $T\mu^*$ в смысле распределений при $t \to 0$. Согласно оценке (3), для всякой точки y, расстояние от которой до носителя меры μ^* не меньше d, выполнена оценка $|T\mu^* * P_t(y)| < C(d)$.

Отметим теперь, что 0 не может принадлежать ни одному ε-асимметричному множеству, и, следовательно, $\int_{\mathbb{R}^n} d\mu^* = 0$. Кроме того, носитель меры μ^* лежит в шаре с центром в нуле и радиуса $c_n = (2\pi)^n\sqrt{n}$ (точнее, носитель меры лежит в кубе $(-2\pi, 2\pi]^n$, а куб лежит в шаре). При этих условиях уточним оценку значения $T\mu^*(x)$ для достаточно больших значений $|x|$.

Проведем оценку величины $|\mathrm{grad}(K_t)(x)|$.

Для этого представим функцию K_t, как это было сделано в доказательстве леммы 1.4, в виде суммы $h_t^\vee + \sum\limits_{i>0} g_{t,i}^\vee$, где $g_{t,i} = m\widehat{P}_t\varphi_{l+i}$, $h_t = m\widehat{P}_t - \sum\limits_{i>0} g_{t,i}$. Так как

$$|D^\alpha(\xi_k \cdot g_{t,i})(\xi)| \leq$$

$$\leq c(\sum_{|\beta|=|\alpha|-1} |D^{\beta}(g_{t,i})(\xi)| + |\xi_k||D^{\alpha}(g_{t,i})(\xi)|) \leq c'_{\alpha}|2|^{(l+i)(1-|\alpha|)},$$

причем $g_{t,i}$ сосредоточена на множестве $\Phi_{l+i} = \{\frac{1}{2}2^{l+i} < |\xi| < 2 \cdot 2^{l+i}\}$, для $|\alpha| = (n+2)$, сложив оценки по всем базисным направлениям ξ_k, получим оценку $|x|^{n+2}|\mathrm{grad} g^{\vee}_{t,i}(x)| \leq C_n 2^{-(l+i)}$. Функция h_t сосредоточена на шаре радиуса $2 \cdot 2^l$, следовательно, $|x \cdot h_t| \leq c2^l$ и $|\mathrm{grad}(h^{\vee}_t)(x)| \leq c2^{l(n+1)}$. Выбрав для данного $x \in \mathbb{R}^n$ целое l так, чтобы $2^{-l} < |x| \leq 2 \cdot 2^{-l}$, получим оценку $|\mathrm{grad}(K_t)(x)| \leq C|x|^{-(n+1)}$, где константа C не зависит от t и x.

Таким образом при $|y| < c_n$ и $|x| > 2c_n$ верна следующая оценка: $|K_t(x-y) - K_t(x)| \leq C(|x|)^{-(n+1)}$. Из нее, учитывая то, что $\int d\mu^* = 0$, получаем при $|x| > 2c_n$ оценку $|T\mu^* * P_t(x)| = |\int K_t(x-y)d\mu^*(y)| \leq \int |K_t(x-y) - K_t(x)|d\mu^*(y) \leq c|x|^{-(n+1)}$, где константа c не зависит t и x.

Рассмотрим δ-окрестность границы куба $\mathbb{I}^n$ – множество e. Введем в рассмотрение следующие характеристики

$$\rho_e(f) = \overline{\lim}_{\lambda\to\infty} \lambda \mathrm{mes}(\{N(f) > \lambda\} \cap e)$$

$$\rho_{e'}(f) = \overline{\lim}_{\lambda\to\infty} \lambda \mathrm{mes}(\{N(f) > \lambda\} \cap (\mathbb{R}^n \backslash e))$$

Оценим обе характеристики по-отдельности.

Рассмотреть распределение ψ_t на торе, заданное по правилу $(\psi_t, f) = (T\mu^* * P_t, f^*)$, где f пробная функция на торе, а f^* – периодическое продолжение ее копии с куба $\mathbb{I}^n$. Для тех x, для которых $|x| > 2c_n$, верна оценка

$$|T\mu^* * P_t(x)| = |K_t * \mu^*(x)|$$

$$\leq |\mathrm{grad}(K_t)(x)|c_n|||\mu^*||_M \leq c_n||\mu^*||_M|x|^{-(n+1)},$$

следовательно, распределение заданно корректно, а так как преобразование Фурье функции $T\mu^* * P_t$ равно нулю на $\mathbb{Z}^n$, то $\psi_t \equiv 0$ и поточечно верно равенство $T\mu^* * P_t(x) = -\sum_{k\in 2\pi\mathbb{Z}^n\backslash 0} T\mu^* * P_t(\tau_k(x))$, где τ_k означает сдвиг на вектор k. Значит, для $x \in \mathbb{I}^n$, лежащих на расстоянии d от границы куба $\mathbb{I}^n$, верна оценка $|T\mu^* * P_t(x)| \leq C_1(d)$, где константа $C_1(d)$ не зависит от t и x. Учитывая оценку $|T\mu^* * P_t| \leq c\frac{1}{t^n}||\mu^*||_M$, получаем, что на множестве $\mathbb{R}^n\backslash e$ функция $N(T\mu^*)$ ограничена, что доказывает, что $\rho_{e'}(T\mu^*) = 0$.

Пусть мера μ_δ^* – сужение меры μ^* на 2δ-окрестность границы куба. Тогда по лемме 1.4 верна оценка

$$\rho_e(T\mu^*) \le 2(\rho_e(T(\mu^* - \mu_\delta^*) + \rho_e(T\mu_\delta^*)) = \rho_e(T\mu_\delta^*) \le \rho(T\mu_\delta^*) \le C\|\mu_\delta^*\|_M.$$

Применяя теорему 0.4, получаем оценку

$$\|\mu_s\|_M = \|\mu_s^*\|_M \le C\rho(T\mu^*) \le (\rho_e(T\mu^*) + \rho_{e'}(T\mu^*) \le \|\mu_\delta^*\|_M.$$

Осталось заметить, что для любого заданного $\eta > 0$ можно таким образом выбрать значения $t_1, \dots, t_n$, определяющие "линии разреза" тора при исходном вложении, что $\|\mu_\delta^*\|_M$ будет меньше η при достаточно малых δ. Действительно, введем функцию $\tau_\delta(t_1, \dots, t_n) = \|\mu_\delta^*\|$ (мера μ_δ^* зависит от набора $(t_1, \dots, t_n)$. Интеграл от этой функции по тору $\mathbb{T}^n$ не превосходит $2n(2\pi)^{n-1}\delta\|\mu\|$. Следовательно, $\tau_\delta(t_1, \dots, t_n)$ не может быть больше η при всех $(t_1, \dots, t_n)$ и δ.

Итак, при предположениях, сделанных в начале параграфа о мере μ, имеем: $\|\mu_s\|_M = 0$.

4. Замечание об аналоге теоремы Рудина–Карлесона

Воспользовавшись теоремой 0.4 вместо основного результата статьи [2], теорему 4.1 статьи [2] можно дополнить следующим образом.

Теорема 4.1. *Если набор мультипликаторов $\{T_j\}_{j=1}^k$ удовлетворяет условию теоремы 0.4, то*

$$C(E) = \{\sum_{j=1}^{k} T_j f_j|_E : f_j \in C_0(\mathbb{R}^n, T_j)\}$$

Применив данную теорему к мультипликатору, построенному в параграфе 2, получим следующий результат.

Предложение 4.2. *Всякая заданная на множестве нулевой меры непрерывная функция может быть расширена до непрерывной функции, чье преобразование Фурье обращается в ноль на заданном ε-асимметричном множестве.*

Литература

1. V. Havin, B. Jörice, *The Uncertainty Principle in Harmonic Analysis.* Springer-Verlag, 1994.
2. М. М. Рогинская, *Асимптотическая оценка снизу для многомерных операторов Кальдерона–Зигмунда на сингулярных мерах.* — Алгебра и анализ т.**9**, вып. **2** (1997).
3. R. G. M. Brummelhuis, *A microlocal F. and M. Riesz theorem with applications. Revista Mathemática Iberoamericana*, **5**, No. 1, 1989.

Roginskaya M. M. Two multidimensional analogues of the F. and M. Riesz theorem.

A new collection of Riesz sets for $\mathbb{R}^n$ and $\mathbb{Z}^n$ is exhibitize. The results are new even in 1-dimensional case. An asymptotic estimate of Fourier multipliers on finite measures in $H^{1,\infty}$ space used for the proof is interesting in itself.

Санкт-Петербургский
государственный университет
e-mail:rog@post.tepkom.ru

Поступило 28 января 1998 г.