Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 255, 1998 г.

О. Л. Семенова

ОДНО СВОЙСТВО ЧИСТО ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ФУКСОВЫХ ГРУПП ВТОРОГО РОДА

1. Введение.

В настоящей работе изучается функция логарифм расстояния до предельного множества фуксовой группы и устанавливается ограниченность осцилляции этой функции. Данное свойство устанавливается для произвольной конечно порожденной фуксовой группы G, удовлетворяющей следующим условиям: G – неэлементарная, чисто гиперболическая группа второго рода (чистая гиперболичность группы G означает, что помимо единичного все элементы группы G представляют собой гиперболические преобазования Мебиуса); G-инвариантным кругом является единичный круг Δ.

Предельное множество Λ и произвольный выпуклый фундаментальный многоугольник P такой группы обладают следующими известными (см. [1], гл. 5, 10) свойствами:

Предложение 1.

(1) *Λ есть наименьшее непустое G-инвариантное замкнутое подмножество в $\widehat{\mathbf{C}}$.*

(2) *Λ лежит на единичной окружности $\mathbf{T}$ и является совершенным множеством.*

(3) *Произвольный выпуклый фундаментальный многоугольник P имеет конечное число сторон и не имеет вершин в Δ, то есть все вершины P лежат на $\mathbf{T}$.*

(4) *Для любого положительного ε найдется лишь конечный набор элементов g группы G, таких что евклидов диаметр множества $g(P)$ превышает ε.*

В статье [2] приводится (без полного доказательства) следующий результат:

Теорема 2. *В вышеперечисленных предположениях на группу G функция $\varphi(x) = \log(\operatorname{dist}(x, \Lambda))$ является функцией ограниченной ос-*

цилляции на единичной окружности $\mathbf{T}$*, то есть*

$$\varphi \in \mathrm{BMO}(\mathbf{T}).$$

Здесь и далее $\operatorname{dist}(x, \Lambda)$ обозначает расстояние на единичной окружности между точкой x и множеством Λ, определяемое длиной кратчайшей дуги.

Цель данной работы – доказательство этого свойства (методически отличающееся от предполагаемого в работе [2]). Теорема 2 является следствием предложений 3 и 4, приведенных ниже:

Предложение 3. *Предельное множество* Λ *группы* G*, обладающей перечисленными выше свойствами, является пористым.*

Определение пористости приведено в пункте 2, посвященном обсуждению необходимых понятий и терминов.

Предложение 4. *Пусть* K *– пористое подмножество единичной окружности* $\mathbf{T}$*. Тогда существует положительное число* M*, зависящее только от* K*, при котором для всякой дуги* I*, такой что* $E \cap \mathbf{I} \neq \varnothing$*, справедлива оценка:*

$$\int_I |\varphi - \log|I|\,|dm \leqslant M|I|.$$

Здесь и далее m – мера Лебега на единичной окружности $\mathbf{T}$.

Предложение 3 доказывается в пункте 3. Доказательство предложения 4 опущено, поскольку оно аналогично доказательству леммы 5.2 из работы [3].

2. Терминология и некоторые предварительные замечания.

Обозначения φ, G, Λ, P на протяжении всей статьи отвечают объектам, описанным во введении, V – это множество вершин многоугольника P, а E – множество его свободных сторон (то есть сторон, лежащих на единичной окружности $\mathbf{T}$). Для остальных сторон используется термин “Δ-сторона”. Названия “геодезическая”, “полуплоскость”, “выпуклость” и т.д. используются для обозначения соответствующих понятий в гиперболической метрике круга Δ.

К ранее перечисленным свойствам выпуклого фундаментального многоугольника P группы G добавим еще одно: количество свободных сторон многоугольника P не меньше двух.

Действительно, наличие у многоугольника P лишь одной свободной стороны означало бы (так как P не имеет вершин вне единичной окружности), что и Δ-сторон многоугольник P имеет не более одной. В силу последнего обстоятельства возможны лишь два случая: либо P совпадает со всем кругом Δ, и в этом случае группа G является тривиальной, либо множество $G(P)$ состоит только из двух полуплоскостей, то есть G содержит всего два элемента. Оба этих варианта несовместимы с неэлементарностью группы G.

Множество K на единичной окружности называем пористым, если

$$\inf\{\lambda(I,K) : I \in \mathrm{Arc}\} > 0,$$

где символ Arc обозначает совокупность дуг единичной окружности $\mathbf{T}$, число $\lambda(I,K)$ есть доля максимальной компоненты дополнения множества K, лежащей на дуге I:

$$\lambda(I,K) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{\sup\{|J| : J \in \mathrm{Arc},\, J \in I \setminus K\}}{|I|},$$

а $|I|$ – это длина дуги I.

Для краткости обозначение $\lambda(I,\Lambda)$ сокращается до $\lambda(I)$.

Если a и b – две произвольные точки единичной окружности, символ $a^\frown b$ обозначает минимальную замкнутую дугу в $\mathbf{T}$, соединяющую точки a и b (в случае, когда $b=-a$, в качестве $a^\frown b$ может быть выбрана любая из двух полуокружностей).

Отметим следующие очевидные соотношения, выполняющиеся для любых точек единичной окружности a и b при любом выборе точки x на дуге $a^\frown b$:

$$|\, a^\frown b \,| \geqslant |\, a-b \,| \geqslant (2/\pi)\, |\, a^\frown b \,|, \tag{1}$$

$$|\, a^\frown b \,| = |\, a^\frown x \,| + |\, x^\frown b \,|, \tag{2}$$

$$|\, a^\frown x \,| \leqslant |\, a^\frown b \,| \,. \tag{3}$$

Обозначения $\overline{K}$ и ∂K отвечают соответственно евклидовым замыканию и границе множества K.

3. Доказательство предложения 3.

Доказательство предложения 3 проведем от противного. Предположим, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такая дуга I единичной окружности, что

$$\lambda(I) < \varepsilon, \tag{5}$$

то есть для любой дуги $J \in \mathrm{Arc}$, удовлетворяющей условию $J \subseteq I \setminus \Lambda$, выполняется соотношение $|J| < \varepsilon |I|$.

Положим

$$\eta = \inf \left\{ \frac{|a-b| \cdot |c-d|}{|a-b| \cdot |b-d|} : a, b, c, d \text{ -- попарно различные вершины } P \right\}$$

(в силу отмеченного выше свойства многоугольника P число его вершин не меньше четырех). В силу того, что мебиусовы преобразования сохраняют двойное отношение, требуемое противоречие будет получено, если в последнем предположении будет найден такой элемент g группы G и такие попарно различные вершины c, d, c' и d' многоугольника $g(P)$, что

$$\frac{|c-b| \cdot |c'-d'|}{|c-c'| \cdot |d-d'|} < \eta.$$

Заметим, что для произвольного положительного ε дугу I, удовлетворяющую условию (5), можно выбрать сколь угодно малой. Таким образом, фиксировав $\varepsilon = \min\left\{\frac{\eta}{\pi}, \frac{1}{4}\right\}$, можно потребовать, чтобы длина дуги $I = a^\frown b$, $I \in \mathrm{Arc}$, удовлетворяющей условию (5) при таком ε, не превосходила наименьшего из чисел σ и $\pi/4$, где σ – такое положительное число, что для всякого элемента g группы G из условия $\min\{| g(e) | : e \in E\} \leqslant \sigma$ справедлива оценка евклидова диаметра множества $g(P)$:

$$\operatorname{diam} g(P) \leqslant \pi/4 \tag{6}$$

(число σ, обладающее указанным свойством, найдется вследствие предложения 1 п. 4).

Кроме того, мы можем предполагать, что

$$a, b \in \Lambda. \tag{7}$$

Действительно, пусть $I' = a'^\frown b'$ – дуга из Arc, такая что $\lambda(I') < \varepsilon/2$ и $|I'| \leqslant \sigma$. Так как $\lambda(I') < \varepsilon/2$, на дуге I' найдутся точки a и b множества Λ, для которых справедливы соотношения $| a'^\frown a | \leqslant (\varepsilon/2)|I'|$ и $| b'^\frown b | \leqslant (\varepsilon/2)|I'|$. Тогда дуга $I = a^\frown b$ – искомая, ибо

$$\lambda(I) = \frac{\sup\{|J| : J \in \mathrm{Arc},\, J \subseteq I \setminus \Lambda\}}{|I|} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\sup\{|J| : J \in \mathrm{Arc},\, J \subseteq I' \setminus \Lambda\}}{|I'|} \cdot \frac{|I'|}{|I|} = \lambda(I') \cdot \frac{|I'|}{|I|} =$$

$$= \lambda(I') \cdot \frac{|I'|}{|I'| - |a^\frown a'| - |b^\frown b'|} \leqslant \lambda(I') \cdot \frac{1}{1-\varepsilon} < \varepsilon$$

(так как $\varepsilon < 1/4$ и $\lambda(I') < \varepsilon/2$), и $|I| \leqslant |I'| \leqslant \sigma$.

Очевидно, без ограничения общности можно считать, что $b = \overline{a}$ и $\operatorname{Im} a > 0$. Далее, пусть L – это геодезическая, соединяющая точки a и $\overline{a}$, w – это точка, лежащая на пересечении геодезической L и отрезка вещественной прямой $(-1, 1)$, H обозначает открытую полуплоскость в Δ, ограниченную в замкнутом круге $\overline{\Delta}$ дугой I и геодезической L, а g – элемент группы G, удовлетворяющей условиям

$$w \in g(\overline{P}), \tag{8}$$

$$g(P) \cap H \neq \varnothing$$

(такой элемент g найдется, поскольку группа G – фуксова, то есть действует разрывно в круге Δ). Второе из двух последних условий влечет

$$g(\overline{P}) \cap I \neq \varnothing, \tag{9}$$

так как вследствие предложения 1 п. 3, все Δ-стороны многоугольника $g(P)$ представляют собой геодезические (то есть их концы лежат на единичной окружности).

Обозначим за I' дугу $\mathbf{T} \setminus I$.

Утверждение 5. *Если g – это элемент группы G, удовлетворяющий условиям (8) и (9), то среди элементов множества $g(V)$ найдутся точки c и c', такие что $c \in I$, $c' \in I'$, и $\operatorname{Im} c \cdot \operatorname{Im} c' \leqslant 0$.*

Доказательство. Отметим сначала, что найдутся точки p и p', такие что $p \in \partial(g(P)) \cap I$, $p' \in \partial(g(P)) \cap I'$ и $\operatorname{Im} p \cdot \operatorname{Im} p' \leqslant 0$. Действительно, предположив противное, вследствие условия (9) и выпуклости множества $g(P)$ заключаем, что должно выполняться одно из трех следующих условий: $g(\overline{P}) \subseteq H$, $g(\overline{P}) \subseteq \{\operatorname{Im}(z) > 0\}$, $g(\overline{P}) \subseteq \{\operatorname{Im}(z) < 0\}$. Каждое из них несовместимо со включением (8), так как $\{w\} = L \cap (-1, 1)$ и $w \in g(\overline{P})$.

Итак, найдутся некоторые точки p и p' границы множества $g(\overline{P})$, лежащие соответственно на дугах I и I', для которых справедливо неравенство $\operatorname{Im} p \cdot \operatorname{Im} p' \leqslant 0$. Так как группа G – чисто гиперболическая, множество $\partial(g(P)) \cap \mathbf{T}$ состоит из объединения свободных сторон (которые представляют собой дуги положительной длины, и значит, найдутся свободные стороны e_p и

e'_p многоугольника $g(P)$, содержащие соответственно p и p'. Поскольку $\overline{a}$, $a \in \Lambda$, то $e_p \subseteq I$, $e'_p \subseteq I'$ и можно так выбрать обозначения концов сторон e_p и e'_p в виде $e_p = c^\frown d$, $e'_p = c'^\frown d'$, что выполняется неравенство $\operatorname{Im} c \cdot \operatorname{Im} c' \leqslant 0$. Тем самым утверждение 5 доказано.

Зафиксируем вершины c, d, c' и d' многоугольника $g(P)$, определенные при доказательстве утверждения 5. Не умаляя общности, считаем, что $\operatorname{Im} c \geqslant 0$, и $\operatorname{Im} c' \leqslant 0$.

Проверим, что вершины c, d, c' и d' многоугольника $g(P)$ – искомые, то есть, что

$$\frac{|c-d| \cdot |c'-d'|}{|c-c'| \cdot |d-d'|} < \eta.$$

Из условия $\lambda(I) < \varepsilon$ вытекает, что, во-первых, так как $c^\frown d \subseteq I \setminus \Lambda$,

$$|c-d| \leqslant |c^\frown d| < \varepsilon |I| \tag{10}$$

и, во-вторых, что среди множества точек $\Lambda \cap \{\operatorname{Im} z \leqslant 0\}$ найдется точка ν, удовлетворяющая условиям $|\nu^\frown 1| < \varepsilon |I|$ и $\operatorname{Im} \nu \leqslant 0$. Из последних соотношений вытекает включение $c^\frown d \subseteq \nu^\frown a$.

В силу условий (6) и (9) диаметр множества $\{c, d, c', d'\}$ не превосходит $\pi/4$, поэтому либо $c'^\frown d' \subseteq d^\frown d'$ либо $c'^\frown d \subseteq c'^\frown c$, и, значит,

$$\max\{|c-c'|, |d-d'|\} \geqslant |d-c'|; \tag{11}$$

кроме того,

$$\min\{|c-c'|, |d-d'|\} \geqslant \min\{|c-\overline{a}|, |d-\overline{a}|\} \geqslant |\nu - \overline{a}| \geqslant \frac{2}{\pi} \cdot |\nu^\frown \overline{a}| =$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot \left(|1^\frown \overline{a}| - |\nu^\frown 1|\right) \geqslant \frac{2}{\pi} \cdot \left(\frac{|I|}{2} - \lambda(I) \cdot |I|\right) =$$

$$\frac{2|I|}{\pi} \cdot \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right) \geqslant \frac{|I|}{2\pi}. \tag{12}$$

Последнее неравенство выполняется, так как $\varepsilon \leqslant \frac{1}{4}$, остальные следуют из соотношений (1)–(3) и выбора точки ν, либо очевидны. Из (10), (11) и (12) мы с учетом выбора ε получаем:

$$\frac{|c-d| \cdot |c'-d'|}{|c-c'| \cdot |d-d'|} \leqslant \frac{\varepsilon \cdot |I| \cdot |c'-d'|}{\min\{|c-c'|, |d-d'|\} \cdot \max\{|c-c'|, |d-d'|\}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon \cdot |I| \cdot |c' - d'|}{|c' - d'| \cdot \left(\frac{|I|}{2\pi}\right)} = 2\pi\varepsilon < \eta.$$

Доказательство предложения 3 тем самым завершено.

4. Доказательство теоремы 2.

Теорема 2 – непосредственное следствие предложений 3 и 4, так как принадлежность функции φ классу BMO($\mathbf{T}$) вытекает из существования некоторого числа M, зависящего лишь от φ и такого набора чисел $\{\alpha_I\}_{I\in \mathrm{Arc}}$, что для любой дуги I единичной окружности справедлива оценка

$$\int\limits_I |\varphi - \alpha_I| dm \leqslant M \cdot |I|$$

(см. [4] гл. 6). В силу предложения 3 для дуг I, имеющих непустое пересечение со множеством Λ, в качестве α_I можно взять $\log |I|$.

Литература

1. А. Бердон, *Геометрия дискретных групп.* Наука, М. (1986).
2. Н. А. Широков, *Фуксовы группы с карлесоновыми предельными множествами.* — Функциональный анализ и его приложения **24, No. 24** (1990), 92–93.
3. Н. А. Широков, *Свободная интерполяция в пространствах* $C^A_{r,\omega}$. — Матем. сборник **117(159), No. 3** (1982), 337.
4. Дж. Гарнетт, *Ограниченные аналитические функции, гл. VI.* Мир, М. (1984).

Semenova O. A property of purely hyperbolic Fuchsian groups of the second kind.

Let G be a purely hyperbolic finitely generated non-elementary Fuchsian group of the second kind. If Λ is the limit set of the group G, then the function $\log(\mathrm{dist}\,(x,\Lambda))$ belongs to the class BMO. This follows from the fact that Λ is porous, which is proved in the paper.

С.-Петербургский
государственный
университет

Поступило 22 декабря 1997 г.