Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 255, 1998 г.

Ф. А. Шамоян, И. С. Курсина

ОБ ИНВАРИАНТНОСТИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ ОТНОСИТЕЛЬНО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Пусть $D = \{z : |z| < 1\}$ – единичный круг в комплексной плоскости, Γ – его граница, $H(D)$ – множество всех голоморфных в D функций, ω – положительная функция из $L^1(0,1]$. Символом N^p_ω обозначим множество тех функций $f \in H(D)$, для которых

$$\|T(f)\|_{L^p_{(\omega)}} = \left(\int\limits_0^1 \omega(1-r) T^p(f,r)dr \right)^{1/p} < +\infty,$$

где $T(f,r) = 1/2\pi \int_{-\pi}^{\pi} \ln^+ \left|f(re^{i\varphi})\right| d\varphi$ – характеристика Неванлинны (см. [1]). Введем также класс функций

$$\widetilde{N}^p_\omega = \left\{ f \in H(D) : \int\limits_0^1 \int\limits_{-\pi}^{\pi} \omega(1-r) \left(\ln^+ |f(re^{i\varphi})|\right)^p \, rdrd\varphi < +\infty \right\}.$$

Очевидно, что класс N^∞_ω совпадает с классом N голоморфных в единичном круге функций, имеющих в нем ограниченную характеристику. В работе [2] О. Фростман установил, что существуют функции класса N, производная которых имеет неограниченную характеристику. В дальнейшем В. К. Хейман (см. [3]) показал, что класс N не инвариантен и относительно оператора интегрирования.

Естественно возникает вопрос: при каких p и ω классы N^p_ω и $\widetilde{N}^p_\omega$ инвариантны относительно операторов дифференцирования и интегрирования?

Пусть

$$D(f)(z) = f'(z), \quad I(f)(z) = \int\limits_0^z f(t)\,dt, \quad z \in D.$$

Первый автор частично поддержан грантом РФФИ No 96-01-00693.

Для формулировки полученного результата введем некоторые обозначения. Символом S обозначим множество всех положительных функций $\omega \in L^1(0,1)$, для которых существуют числа $m_\omega > 0$, $M_\omega > 0$, $q_\omega \in (0,1)$ такие, что

$$m_\omega \leqslant \frac{\omega(\lambda r)}{\omega(r)} \leqslant M_\omega \quad \text{при} \quad r \in (0,1), \quad \lambda \in [q_\omega, 1]. \tag{1}$$

Функции класса S, заданные на $(0,+\infty)$, изучены в [4]. В дальнейшем для функции $F \in H(D)$ обозначим $N(F,r) = \int\limits_0^r \frac{n(t)}{t} dt$, где $n(t)$ – число нулей функции F в круге $D_r = \{z : |z| < r\}$.

Теорема 1. *Пусть* $\omega \in S$, *а* X *– один из классов* N^p_ω $(0 < p < +\infty)$ *или* $\widetilde{N}^p_\omega$ $(1 \leqslant p < +\infty)$.

1) *Следующие утверждения* а) *и* б) *равносильны:*

а) *класс* X *инвариантен относительно оператора дифференцирования;*

б) $\int\limits_0^1 \omega(t) \ln^p \frac{1}{t} dt < +\infty$.

2) *Пусть выполнено условие* б), *и пусть* $f \in N^p_\omega$ $(0 < p < +\infty)$, $F = I(f)$. *Если* $N(F, \cdot\,) \in L^p(\omega)$, *то* $F \in N^p_\omega$. *И обратно, если класс* N^p_ω *инвариантен относительно оператора* I, *то условие* б) *выполняется.*

Замечание. Ясно, что утверждение теоремы остается в силе, если вместо оператора дифференцирования D или оператора интегрирования I рассмотреть операторы вида

$$A(f)(z) = \sum_{k=0}^{n} f_k(z)\, D^k(f)(z) \quad \text{или} \quad B(f)(z) = \sum_{k=0}^{n} g_k(z)\, I^k(f)(z),$$

где f_k, g_k – некоторые функции из X.

Доказательству теоремы предпошлем некоторые вспомогательные утверждения. Используя результаты [4], легко установить, что справедлива

Лемма 1. *Пусть* $\omega \in S$. *Тогда найдутся измеримые ограниченные функции* $\varepsilon(x)$, $\eta(x)$, *такие что*

$$\omega(x) = \exp\left\{\eta(x) + \int\limits_x^1 \frac{\varepsilon(u)}{u}\, du\right\}, \quad x \in (0,1), \tag{2}$$

при этом

$$\frac{\ln m_\omega}{\ln \frac{1}{q_\omega}} \leqslant \varepsilon(u) \leqslant \frac{\ln M_\omega}{\ln \frac{1}{q_\omega}}, \quad u \in (0,1). \tag{3}$$

В дальнейшем, не ограничивая общности, будем предполагать, что $\eta(x) \equiv 0$.

Лемма 2. *Пусть $f \in H(D)$, $r < R < 1$. Тогда имеет место оценка*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln^+ \left|f'(re^{i\varphi})\right| d\varphi \leqslant c\Big(\ln T(R,f) + T(r,f) + \ln\frac{1}{1-r}\Big), \tag{4}$$

где $T(r,f)$, как и прежде, обозначает характеристику Неванлинны.

Доказательство этой леммы нетрудно вывести из оценки логарифмической производной, установленной в [5].

Следующая лемма доказана в [6].

Лемма 3. *Пусть $V(z)$ – неотрицательная непрерывная функция в D. Предположим, что для каждой точки $z_0 \in D$ существует круг $K_\eta(z_0)$, $0 < \eta < 1$, с центром в точке z_0 радиуса $\eta(1-|z_0|)$, где число η не зависит от z_0 и таково, что*

$$V(z_0) \leqslant \frac{C(\eta)}{|K_\eta(z_0)|} \int_{K_\eta(z_0)} V(\zeta)\, dm_2(\zeta).$$

(Здесь и далее $|E|$ обозначает площадь множества $E \subset \mathbb{C}$.) Положим

$$\Delta_{k,l} = \left\{ z : \frac{\pi l}{2^k} \leqslant \arg z < \frac{\pi(l+1)}{2^k},\ 1 - \frac{1}{2^k} < |z| \leqslant 1 - \frac{1}{2^{k+1}} \right\}.$$

Тогда имеет место оценка

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=-2^k}^{2^k-1} \left\{ \left(\max_{z \in \Delta_{k,l}} V(z) \right) |\Delta_{k,l}| \omega\left(|\Delta_{k,l}|^{1/2} \right) \right\} \leqslant$$

$$\leqslant c \int_D V(\zeta)\omega(1-|\zeta|)\, dm_2(\zeta).$$

Доказательство теоремы.

1) Сначала докажем импликацию б)⇒а) в случае $X = N^p_\omega$ $(0 < p < +\infty)$. Пусть $f \in N^p_\omega$. Применим оценку из леммы 2, полагая $R = \frac{1+r}{2}$. Возводя обе части неравенства (4) в степень p, умножая на $\omega(1-r)$ и интегрируя по r, получим

$$\int_0^1 \omega(1-r)T^p(r,f')dr \leqslant c\left(\int_0^1 \omega(1-r)\Big(\ln\frac{1}{1-r}\Big)^p dr + \right.$$

$$\left. + \int_0^1 \omega(1-r)T^p(r,f)dr + \int_0^1 \omega(1-r)\Big(\ln T\Big(\frac{1+r}{2},f\Big)\Big)^p dr\right).$$

Заметим, что $\ln^+ T\big(\frac{1+r}{2},f\big) \leqslant T\big(\frac{1+r}{2},f\big)$. Поэтому после замены переменной $u = \frac{1+r}{2}$, будем иметь

$$\int_0^1 \omega(1-r)T^p(r,f')dr \leqslant c\left(\int_0^1 \omega(1-r)\Big(\ln\frac{1}{1-r}\Big)^p dr + \right.$$

$$\left. + \int_0^1 \omega(1-r)T^p(r,f)dr + 2\int_{1/2}^1 \omega\big(2(1-u)\big)T^p(u,f)du\right).$$

На основании оценки (1) окончательно получим

$$\int_0^1 \omega(1-r)T^p(r,f')dr \leqslant$$

$$\leqslant c\left(\int_0^1 \omega(1-r)\ln^p\frac{1}{1-r}dr + \int_0^1 \omega(1-r)T^p(r,f)dr\right) < +\infty.$$

Теперь перейдем к доказательству импликации б)⇒а) в случае $X = \widetilde{N}^p_\omega$. Пусть $p \geqslant 1$. Используя лемму 3, приходим к соотношению

$$\int_0^1\int_{-\pi}^{\pi} \omega(1-r)\left(\ln^+\left|f'\left(re^{i\varphi}\right)\right|\right)^p rdrd\varphi =$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=-2^k}^{2^k-1} \iint\limits_{\Delta_{k,l}} \omega(1-r) \left(\ln^+ \left|f'\left(re^{i\varphi}\right)\right|\right)^p rdrd\varphi \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=-2^k}^{2^k-1} \max\left\{\ln^+ \left|f'(z)\right|\right\}^p \omega\left(\left|\Delta_{k,l}\right|^{1/2}\right) \left|\Delta_{k,l}\right|. \tag{5}$$

По формуле Коши имеем:

$$f(z) = \int\limits_{K_\eta(z)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad \text{где} \quad K_\eta(z) = \{\zeta : |\zeta - z| = \eta(1-|z|)\}.$$

Тогда

$$f'(z) = \int\limits_{K_\eta(z)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \quad \text{и} \quad \left|f'(z)\right| \leqslant \frac{\max\limits_{\zeta \in K_\eta(z)} |f(\zeta)|}{1-|z|}.$$

Следовательно, справедлива оценка

$$\left(\ln^+ \left|f'(z)\right|\right)^p \leqslant c\left[\max_{\zeta \in K_\eta(z)} \left(\ln^+ \left|f(\zeta)\right|\right)^p + \ln^p \frac{1}{1-|z|}\right]. \tag{6}$$

После подстановки оценки (6) в неравенство (5) получим

$$\int\limits_0^1 \int\limits_{-\pi}^{\pi} \omega(1-r) \left(\ln^+ \left|f'\left(re^{i\varphi}\right)\right|\right)^p rdrd\varphi \leqslant$$

$$\leqslant c \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=-2^k}^{2^k-1} \left(\max_{\zeta \in \Delta_{k,l}} \left(\ln^+ \left|f(\zeta)\right|\right)^p + \ln^p \frac{1}{1-|z|}\right) \omega\left(\left|\Delta_{k,l}\right|^{1/2}\right) \left|\Delta_{k,l}\right|.$$

Согласно лемме 3 последняя сумма не превосходит величины

$$c\left(\int\limits_0^1 \int\limits_{-\pi}^{\pi} \omega(1-r) \left(\ln^+ \left|f\left(re^{i\varphi}\right)\right|\right)^p rdrd\varphi + \int\limits_0^1 \omega(1-r) \ln^p \frac{1}{1-r}\, dr\right).$$

Этим импликация б)$\Rightarrow$а) для класса $\widetilde{N}^p_\omega$ при $1 \leqslant p < +\infty$ установлена.

Перейдем к доказательству части а)$\Rightarrow$б). Проведем его одновременно для классов N^p_ω $(0 < p < +\infty)$ и $\widetilde{N}^p_\omega$ $(1 \leqslant p < +\infty)$, поскольку идея доказательства в обоих случаях одна и та же. Пусть

$$f(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}\alpha_{\lambda_k}\,z^{\lambda_k}=\sum_{k=0}^{+\infty}\lambda_k^{\alpha-1}\,z^{\lambda_k},\ \ 0<\alpha<1.$$

Положив $\lambda_k=2^{\lambda k}$ $(\lambda>0)$, получим

$$f(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}2^{\lambda k(\alpha-1)}\,z^{2^{\lambda k}}\quad\text{и}\quad f'(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}2^{\lambda k\alpha}\,z^{2^{\lambda k}-1}.$$

Так как $\alpha<1$, то, очевидно, $f(z)$ принадлежит рассматриваемым классам.

Пусть $|z|=r_n=\exp\left(-\frac{1}{2^{\lambda n}}\right)$. Заметим, что в этом случае $\frac{1}{1-r_n}\approx 2^{\lambda n}$. Для указанных z имеем:

$$f'(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}2^{\lambda k\alpha}\exp\left\{-\frac{1}{2^{\lambda n}}\left(2^{\lambda k}-1\right)\right\}.$$

Обозначим

$$u_k=2^{\lambda k\alpha}\exp\left\{-\frac{1}{2^{\lambda n}}\left(2^{\lambda k}-1\right)\right\},\ \ S_n=\sum_{k=0}^{n-1}u_k,\ \ R_n=\sum_{k=n+1}^{+\infty}u_k.$$

Тогда $f'(r_n\,e^{i\varphi})=S_n+u_n+R_n$,

$$u_n=2^{\lambda n\alpha}\exp\left\{\frac{1}{2^{\lambda n}}-1\right\}=M_1(\lambda)\,2^{\lambda n\alpha}.$$

Оценим теперь S_n и R_n:

$$S_n=\sum_{k=0}^{n-1}2^{\lambda k\alpha}\exp\left(-2^{\lambda(k-n)}\right)\exp\left(\frac{1}{2^{\lambda n}}\right)=$$

$$=\exp\left(\frac{1}{2^{\lambda n}}\right)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2^{\lambda k\alpha}}{\exp(2^{\lambda(k-n)})}\leqslant$$

$$\leqslant\exp\left(\frac{1}{2^{\lambda n}}\right)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2^{\lambda k\alpha}}{\exp(\frac{1}{2^{\lambda n}})}=\sum_{k=0}^{n-1}2^{\lambda\alpha k}\leqslant\frac{1}{2^{\lambda\alpha}-1}\,2^{\lambda n\alpha}=M_2(\lambda)2^{\lambda n\alpha}.$$

Далее,

$$R_n = \exp\left(\frac{1}{2^{\lambda n}}\right) \sum_{k=n+1}^{+\infty} 2^{\lambda k \alpha} \exp\left(-2^{\lambda(k-n)}\right) =$$

$$= \exp\left(\frac{1}{2^{\lambda n}}\right) \sum_{m=1}^{+\infty} 2^{\lambda\alpha(m+n)} \exp\left(-2^{\lambda m}\right) =$$

$$= \exp\left(\frac{1}{2^{\lambda n}}\right) 2^{\lambda n\alpha} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{2^{\lambda m\alpha}}{\exp(2^{\lambda m})}.$$

Ряд $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{2^{\lambda m\alpha}}{\exp(2^{\lambda m})}$ сходится одновременно с интегралом $\int\limits_1^{+\infty} \frac{2^{\lambda\alpha x}}{\exp(2^{\lambda x})}\,dx$. Делая в нем замену переменной $2^{\lambda x} = y$, получаем

$$\int\limits_{2^\lambda}^{+\infty} \frac{y^{\alpha-1}}{\lambda\ln(\lambda x)\exp y}\,dy \leqslant \frac{1}{\lambda\ln\lambda} \int\limits_{2^\lambda}^{+\infty} \frac{y^{\alpha-1}}{e^y}\,dy <$$

$$< \frac{1}{\lambda\ln\lambda} \int\limits_{2^\lambda}^{+\infty} e^{-y}\,dy = \frac{1}{\lambda\ln\lambda\exp\left(2^\lambda\right)}.$$

Следовательно,

$$R_n < \frac{\exp\left(\frac{1}{2^{\lambda n}}\right)}{\lambda\ln\lambda\exp\left(2^\lambda\right)}\, 2^{\lambda n\alpha} = M_3(\lambda) 2^{\lambda n\alpha}.$$

Учитывая полученные оценки, при $|z| = r_n$, получаем

$$|f'(z)| \geqslant |u_n| - |S_n| - |R_n| \geqslant 2^{\lambda n\alpha}\big(M_1(\lambda) - M_2(\lambda) - M_3(\lambda)\big).$$

Поскольку при $\lambda \to +\infty$,

$$M_1(\lambda) = \exp\left(\frac{1}{2^{\lambda n}} - 1\right) \to \frac{1}{e},$$

$$M_2(\lambda) = \frac{1}{2^{\lambda\alpha} - 1} \to 0,$$

$$M_3(\lambda) = \frac{\exp\left(\frac{1}{2^{\lambda n}}\right)}{\exp\left(2^\lambda\right)\lambda\ln\lambda} \to 0,$$

то можем записать

$$\left|f'\left(r_n\, e^{i\varphi}\right)\right| \geqslant \frac{1}{3}\, 2^{\lambda n\alpha}, \quad \lambda > \lambda_0.$$

Отсюда

$$\ln^+\left|f'\left(r_n\, e^{i\varphi}\right)\right| \geqslant c_0 + \ln\, 2^{\lambda n\alpha} \geqslant c_1\, \ln 2^{\lambda n\alpha} \approx c_1\, \ln\frac{1}{1-r_n}.$$

Из последнего неравенства имеем:

$$T^p\left(r_n, f'\right) \geqslant c_2\, \ln^p\, \frac{1}{1-r_n}, \tag{7}$$

$$\left(\ln^+\left|f'\left(r_n\, e^{i\varphi}\right)\right|\right)^p \geqslant c_2\, \ln^p \frac{1}{1-r_n}, \quad \varphi\in[0,2\pi]. \tag{7$'$}$$

Теперь заметим, что

$$\ln^p\, \frac{1}{1-r_n} \leqslant A(\lambda)\, \ln^p\, \frac{1}{1-r_{n-1}}. \tag{8}$$

Действительно, так как $\frac{1}{1-r_n} \approx 2^{\lambda n}$, то

$$\ln^p\, \frac{1}{1-r_n} \approx (\lambda n \ln 2)^p \quad \text{и} \quad \ln^p\, \frac{1}{1-r_{n-1}} \geqslant \left(c_3\lambda(n-1)\right)^p.$$

Тогда

$$\ln^p\, \frac{1}{1-r_n} \approx \left(\frac{\ln 2}{c_3}\left(c_3\lambda(n-1)+c_3\lambda\right)\right)^p \leqslant$$

$$\leqslant c_4\left\{\left(\frac{\ln 2}{c_3}\right)^p\, \ln^p\, \frac{1}{1-r_{n-1}} + (\lambda\ln 2)^p\right\} \leqslant A(\lambda)\ln^p\, \frac{1}{1-r_{n-1}}.$$

Можем записать при $R<1$

$$\int\limits_0^R \omega(1-r)\ln^p\, \frac{1}{1-r}\, dr \leqslant \sum_{n=1}^N \int\limits_{r_{n-1}}^{r_n} \omega(1-r)\ln^p\, \frac{1}{1-r}\, dr,$$

где N – наименьший из номеров n, для которых $R<r_N$. Используя теперь соотношение (8), получим

$$\int\limits_0^R \omega(1-r)\ln^p\, \frac{1}{1-r}\, dr \leqslant \sum_{n=1}^N \int\limits_{r_{n-1}}^{r_n} \omega(1-r)\ln^p\, \frac{1}{1-r_n}\, dr \leqslant$$

$$\leqslant A(\lambda)\sum_{n=1}^{N}\int\limits_{r_{n-1}}^{r_n}\omega(1-r)\ln^p\frac{1}{1-r_{n-1}}\,dr.$$

Отсюда и из неравенства (7) для класса N^p_ω следует, что

$$\int\limits_0^R\omega(1-r)\ln^p\frac{1}{1-r}\,dr\leqslant\frac{A(\lambda)}{c_2}\sum_{n=1}^{N}\int\limits_{r_{n-1}}^{r_n}\omega(1-r)T^p(r_{n-1},f')\,dr.$$

Используя монотонное возрастание функции $T(f,r)$, получаем

$$\int\limits_0^R\omega(1-r)\ln^p\frac{1}{1-r}\,dr\leqslant\mathrm{const}\sum_{n=1}^{N}\int\limits_{r_{n-1}}^{r_n}\omega(1-r)T^p(r,f')\,dr.$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $R\to 1-0$, $N\to+\infty$, окончательно будем иметь

$$\int\limits_0^1\omega(1-r)\ln^p\frac{1}{1-r}\,dr\leqslant\mathrm{const}\int\limits_0^1\omega(1-r)T^p(r,f')\,dr.$$

Аналогичным образом, используя неравенство (7′) для класса $\widetilde{N}^p_\omega$, получим

$$\int\limits_0^R\omega(1-r)\ln^p\frac{1}{1-r}\,dr\leqslant$$

$$\leqslant\frac{A(\lambda)}{c_2}\sum_{n=1}^{N}\int\limits_{r_{n-1}}^{r_n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\omega(1-r)\left(\ln^+\left|f'\left(r_{n-1}e^{i\varphi}\right)\right|\right)^p\,rdrd\varphi.$$

Так как $p\geqslant 1$ и, следовательно, $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\ln^+\left|f'\left(re^{i\varphi}\right)\right|\right)^p\,d\varphi$ монотонно возрастает, то

$$\int\limits_0^R\omega(1-r)\ln^p\frac{1}{1-r}\,dr\leqslant$$

$$\leqslant\mathrm{const}\sum_{n=1}^{N}\int\limits_{r_{n-1}}^{r_n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\omega(1-r)\left(\ln^+\left|f'\left(re^{i\varphi}\right)\right|\right)^p\,rdrd\varphi.$$

Наконец, с помощью предельного перехода из последнего неравенства следует, что

$$\int_0^1 \omega(1-r)\ln^p \frac{1}{1-r}\,dr \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{const} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \omega(1-r)\left(\ln^+ \left|f'\left(r\,e^{i\varphi}\right)\right|\right)^p \, rdrd\varphi.$$

Итак, если в классе X действует оператор дифференцирования, то

$$\int_0^1 \omega(1-r)\ln^p \frac{1}{1-r}\,dr < +\infty.$$

2) Необходимость условия б) для инвариантности класса N^p_ω относительно оператора интегрирования можно получить, используя пример из работы [3], в котором построена функция f ограниченного вида, для которой $F(z) = \int\limits_0^z f(t)dt$ удовлетворяет условию $T(F,r) \geqslant c\ln\frac{1}{1-r}$. Докажем достаточность. Пусть $F(z) = \int\limits_0^z f(t)dt = \int\limits_0^r f(te^{i\varphi})dt$, $z = re^{i\varphi}$.
Очевидно

$$\left|F(re^{i\varphi})\right| \leqslant \int_0^r \left|f(te^{i\varphi})\right|\,dt. \tag{9}$$

Покажем, что для $f(z) \in N^p_\omega$ справедлива оценка

$$|f(z)| \leqslant \exp\frac{\mathrm{const}}{(1-|z|)^{1+1/p}\left[\omega(1-|z|)\right]^{1/p}}. \tag{10}$$

Действительно, так как $\int\limits_0^1 \omega(1-r)T^p(r,f)dr \leqslant C$, то для любого $R<1$

$$\int_R^1 \omega(1-r)T^p(r,f)dr \leqslant C.$$

Отсюда в силу монотонного возрастания функции $T(f,r)$ имеем

$$T(R,f) \leqslant \frac{C^{1/p}}{\left[\int\limits_R^1 \omega(1-r)dr\right]^{1/p}}. \tag{11}$$

Используя простые оценки ядра Пуассона, легко видеть, что при любом $|z|=\rho<R<1$ выполнено неравенство $\ln|f(z)| \leqslant \frac{R+\rho}{R-\rho}T(R,f)$. Следовательно, из оценки (11) получаем

$$\ln|f(z)| \leqslant \frac{2C^{1/p}}{(R-\rho)\left[\int\limits_R^1 \omega(1-r)dr\right]^{1/p}}.$$

Пусть теперь $R=\rho+(1-q_\omega)(1-p)$. Тогда из последнего неравенства имеем

$$\ln|f(z)| \leqslant \frac{C_1}{(1-q_\omega)(1-|z|)\left[\int\limits_0^{1-|z|} \omega(q_\omega\, t)dt\right]^{1/p}}.$$

Заметим, что из оценки (1) следует

$$\int\limits_0^{1-|z|} \omega(q_\omega\, t)dt \geqslant m_\omega \int\limits_0^{1-|z|} \omega(t)dt = \int\limits_{|z|}^1 \omega(1-u)\,du.$$

Поэтому для $f \in N^p_\omega$

$$\ln|f(z)| \leqslant \frac{C_2}{(1-|z|)\left[\int\limits_{|z|}^1 \omega(1-u)\,du\right]^{1/p}}.$$

Учитывая, что $\omega \in S$ и, значит,

$$\int\limits_{|z|}^1 \omega(1-u)\,du \geqslant \frac{1}{1+\alpha_\omega}(1-|z|)\,\omega\,(1-|z|),$$

получаем оценку (10).

Подставляя ее в неравенство (9), будем иметь

$$\left|F(re^{i\varphi})\right| \leqslant \int_0^r \exp \frac{c}{(1-t)^{1+1/p}\left[\omega(1-t)\right]^{1/p}}\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \exp \frac{c}{(1-r)^{1+1/p}\left[\omega(1-r)\right]^{1/p}}.$$

Тогда

$$\ln \left|F(re^{i\varphi})\right| \leqslant \frac{\mathrm{const}}{(1-r)^{1+1/p}\left[\omega(1-r)\right]^{1/p}}. \tag{12}$$

Теперь воспользуемся соотношением (см. [5])

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln^+ \frac{\left|f(re^{i\varphi})\right|}{\left|F(re^{i\varphi})\right|}\,d\varphi \leqslant c\left(\ln^+ T(R,F) + \ln\frac{1}{1-\frac{r}{R}}\right).$$

Применяя оценку (12), отсюда получим

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln^+ \frac{\left|f(re^{i\varphi})\right|}{\left|F(re^{i\varphi})\right|}\,d\varphi \leqslant$$

$$\leqslant c_1 \ln^+ \frac{1}{(1-R)^{1+1/p}\left[\omega(1-R)\right]^{1/p}} + c_2 \ln\frac{1}{R-r}.$$

Согласно лемме 1 имеем $\omega(x) \geqslant x^{\alpha_\omega}$, где $\alpha_\omega = \frac{\ln m_\omega}{\ln q_\omega}$. Поэтому

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln^+ \frac{\left|f(re^{i\varphi})\right|}{\left|F(re^{i\varphi})\right|}\,d\varphi \leqslant c_3 \ln\frac{1}{R-r}, \quad R > r.$$

Положим $R = \frac{r+1}{2}$. Тогда из последнего неравенства получаем

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln^+ \frac{1}{\left|F(re^{i\varphi})\right|}\,d\varphi \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{const}\left(\ln\frac{1}{1-r} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln^+ \left|f(re^{i\varphi})\right|\right).$$

Возводя обе части этого неравенства в степень p, умножая на $\omega(1-r)$, интегрируя по r и учитывая условие 2) теоремы, окончательно получим

$$\int_0^1 \omega\,(1-r)\,T^p\,(r,F)\,dr \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{const}\left(\int_0^1 \omega\,(1-r)\,T^p\,(r,f)\,dr + \int_0^1 \omega\,(1-r)\,\ln^p\,\frac{1}{1-r}\,dr\right).$$

Теорема доказана.

В заключение отметим, что при дополнительном условии на вес ω класс N^p_ω, $0<p<+\infty$, инвариантен относительно оператора интегрирования:

Теорема 2. *Пусть* $\omega \in S$, M_ω *и* q_ω *определяются по формуле* (1),

$$\beta_\omega = \frac{\ln M_\omega}{\ln\frac{1}{q_\omega}}, \quad 0<p<+\infty.$$

Тогда, если $0 \leqslant \beta_\omega < 1$, *то класс* N^p_ω *инвариантен относительно оператора* $I(f)(z) = \int\limits_0^z f(t)\,dt$.

Доказательство этой теоремы проводится по схеме доказательства теоремы 1 с использованием результатов работы [7].

Литература

1. Р. Неванлинна, *Однозначные аналитические функции.* ГИТТЛ, М. (1941).
2. O. Frostman, *Sur les produits de Blaschke.* — Kungl. Fysiogr. Sällsk. Lund Förh. **12, No. 15** (1939), 1–14.
3. W. K. Hayman, *On the characteristic of functions meromorphic in the unit disk and their integrals.* — Acta Math. **112, No. 3–4** (1964), 181–214.
4. Е. Сенета, *Правильно изменяющиеся функции.* Наука, М. (1985).
5. А. А. Гольберг, И. В. Островский, *Распределение значений мероморфных функций.* Наука, М. (1970).
6. Ф. А. Шамоян, *Диагональные отображения и вопросы представления в анизотропных пространствах голоморфных в полидиске функций.* — Сиб. мат. ж. **30, No. 2** (1989), 181–214.
7. Ф. А. Шамоян, *Параметрическое представление и описание корневых множеств весовых классов голоморфных в круге функций.* — Сиб. мат. ж. (в печати).

Shamoyan F. A., Kursina I. S. On the invariance of some classes of holomorphic functions under integral and differential operators.

The following classes of functions analytic in the unit disk are considered:

$$N^p_\omega = \left\{ f \in H(D) : \|T(f)\|_{L^p_{(\omega)}} = \left(\int\limits_0^1 \omega(1-r) T^p(f,r)dr \right)^{1/p} < +\infty \right\},$$

$$\widetilde{N}^p_\omega = \left\{ f \in H(D) : \int\limits_0^1 \int\limits_{-\pi}^{\pi} \omega(1-r) \left(\ln^+ |f(re^{i\varphi})| \right)^p \, rdrd\varphi < +\infty \right\},$$

where $T(f,r) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \ln^+ \left| f(re^{i\varphi}) \right| d\varphi$ is the Nevanlinna characteristic and ω is a positive function on $(0,1]$. Necessary and sufficient conditions on ω are established, under which the classes N^p_ω and $\widetilde{N}^p_\omega$ are invariant under the operators of differentiation and integration.

Брянский государственный
педагогический университет
sham@ bgpi.bitmcnit.bryansk.su

Поступило 20 декабря 1997 г.