Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 255, 1998 г.

С. М. Шиморин

ВОСПРОИЗВОДЯЩИЕ ЯДРА И ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ В ПРОСТРАНСТВАХ ТИПА ДИРИХЛЕ

§1. Введение

Хорошо известно, что одним из основных инструментов при работе с гильбертовыми пространствами аналитических функций являются воспроизводящие ядра. Они определяют скорость роста функций вблизи границы, их свойства тесно связаны с теоремами вложения, множествами самплинга и интерполяции и другими вопросами. В последние годы, наряду с вопроизводящими ядрами, объектом исследования становятся также экстремальные функции – аналоги внутренних функций, которые во многих случаях, подобно внутренним функциям в пространствах Харди, определяют свойства z-инвариантных подпространств.

Напомним основные понятия и определения. Пусть X – некоторое гильбертово пространство аналитических функций в единичном круге $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Воспроизводящим ядром пространства X называется такая функция $K_X(z, \lambda)$, $z, \lambda \in \mathbb{D}$, что

a) $K_X(\cdot, \lambda) \in X$ для всех $\lambda \in \mathbb{D}$

b) $f(\lambda) = (f, K_X(\cdot, \lambda))$ для любой $f \in X$.

Пусть X инвариантно относительно оператора M_z умножения на независимую переменную. Подпространства X, замкнутые и инвариантные относительно оператора M_z, в дальнейшем будут называться просто z-инвариантными подпространствами. Пусть I – некоторое z-инвариантное подпространство X, такое, что $f(0) \neq 0$ для некоторой функции $f \in I$. Экстремальной функцией φ_I подпространства I называется решение следующей экстремальной задачи:

$$\sup\{\operatorname{Re} g(0) : g \in I, \|g\| \leqslant 1\}.$$

В период написания работы автор пользовался поддержкой грантов РФФИ, грант 96-01-00693 и ФЦП “Интеграция”, рег. номер 326.53.

Если I рассматривать как самостоятельное гильбертово пространство аналитических функций, то легко видеть, что

$$\varphi_I = \frac{K_I(\cdot,0)}{K_I(0,0)^{1/2}}.$$

Экстремальные функции φ_I обладают следующим свойством: $(\varphi_I, z^n\varphi_I) = 0$, $\forall n \geqslant 1$. Это приводит к следующему определению.

Определение 1. *Функция $\varphi \in X$ называется экстремальной, если $\|\varphi\| = 1$ и $(\varphi, z^n\varphi) = 0$ для всех $n \geqslant 1$.*

В случае, когда X является пространством Харди $H^2(\mathbb{D})$ экстремальные функции являются внутренними функциями. Для ряда других гильбертовых пространств аналитических функций экстремальные функции, также, как и внутренние функции в пространствах Харди, оказываются важными в таких вопросах, как характеризация z-инвариантных подпространств, выделение нулей и факторизация функций, спектральный синтез и т.д. Подробнее об этом см. работы [1–4, 7, 10, 11].

Настоящая статья посвящена воспроизводящим ядрам и экстремальным функциям в пространствах типа Дирихле – пространствах $D(\mu)$. Они были введены С. Рихтером [6] (в случае $\mu \in M_+(\mathbb{T})$) и А. Алеманом [1] (в более общей ситуации $\mu \in M_+(\bar{\mathbb{D}})$) и описываются следующим образом. Пусть μ – неотрицательная конечная борелевская мера в $\bar{\mathbb{D}}$. Рассмотрим весовую функцию $U_\mu(\zeta)$, $\zeta \in \mathbb{D}$:

$$U_\mu(\zeta) = \int\limits_{\mathbb{D}} \log\left|\frac{1-\bar{z}\zeta}{\zeta - z}\right|^2 \frac{d\mu(z)}{1-|z|^2} + \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{1-|\zeta|^2}{|\zeta - z|^2}\, d\mu(z).$$

Здесь $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$, $\bar{\mathbb{D}} = \mathbb{D} \cup \mathbb{T}$. Тогда пространство $D(\mu)$ определяется как пространство функций, аналитических в $\mathbb{D}$ и таких, что

$$\|f\|^2_{D(\mu)} := \|f\|^2_{H^2} + \int\limits_{\mathbb{D}} |f'(\zeta)|^2 U_\mu(\zeta) dm_2(\zeta) < +\infty$$

(dm_2 – нормированная двумерная мера Лебега в $\mathbb{D}$). Если $d\mu = dm_1$ – нормированная одномерная мера Лебега на $\mathbb{T}$, то пространство $D(\mu)$ совпадает с классическим пространством функций с ограниченным интегралом Дирихле. Другая, более удобная запись нормы в пространствах $D(\mu)$ получается, если воспользоваться локальным интегралом Дирихле, введенным Рихтером и К. Сандбергом [8].

Для каждой функции $f \in H^2$ рассмотрим функцию

$$(Df(u))(\zeta) := \frac{f(\zeta) - f(u)}{\zeta - u}, \quad \zeta \in \mathbb{T}. \tag{1}$$

Функция $(Df(u))(\cdot)$ понимается как элемент H^2; для $u \in \mathbb{D}$ проблем с определением не возникает, в случае $u \in \mathbb{T}$ функция $Df(u)$ определена лишь тогда, когда f имеет в точке u угловое граничное значение $f(u)$ и отношение (1), как функция переменной ζ, входит в класс Харди. Норма функции $Df(u)$ (вычисленная в пространстве H^2) называется локальным интегралом Дирихле функции f в точке u. В работах [6] (для частного случая $\mu \in M_+(\mathbb{T})$) и [1] (в общем случае) показано, что если $f \in D(\mu)$, то локальный интеграл Дирихле функции f определен и конечен для μ-почти всех $u \in \bar{\mathbb{D}}$ и

$$\|f\|^2_{D(\mu)} = \|f\|^2_{H^2} + \int_{\bar{\mathbb{D}}} \|Df(u)\|^2_{H^2}\, d\mu(u). \tag{2}$$

В дальнейшем обозначение $\|\cdot\|$ (без индексов) будет использоваться для нормы в H^2; $\|\cdot\|_\mu$ соответствует норме в пространстве $D(\mu)$. Аналогичные обозначения будут употребляться и для скалярных произведений.

Пространства $D(\mu)$ изучались в работах [1, 6, 7]. Для $\mu \in M_+(\mathbb{T})$ оператор M_z в пространстве $D(\mu)$ является 2-изометрией, т.е. для любой $f \in D(\mu)$

$$\|M_z^2 f\|^2_\mu - 2\|M_z f\|^2_\mu + \|f\|^2_\mu = 0. \tag{3}$$

В общем случае $\mu \in M_+(\bar{\mathbb{D}})$ оператор M_z обладает следующими свойствами выпуклости: для любого $n \geqslant 2$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \|M_z^k f\|^2_\mu \leqslant 0. \tag{4}$$

В определенном смысле операторы M_z в пространствах $D(\mu)$ являются простейшими примерами операторов, удовлетворяющих соотношениям (3) или (4). Более общие примеры операторов такого типа получаются, если рассматривать векторно-значные пространства $D(\mu)$ (возможно, с операторно-значными мерами).

В статье Алемана [1] установлено, что z-инвариантные подпространства в $D(\mu)$ допускают следующую характеризацию. Если $I \subset D(\mu)$ – некоторое z-инвариантное подпространство и φ_I – экстремальная функция для I, то

$$I = \varphi_I D(|\varphi_I|^2 d\mu),$$

т.е. $f \in I$ тогда и только тогда, когда $f = \varphi_I g$ для некоторой функции $g \in D(|\varphi_I|^2 d\mu)$; при этом имеет место равенство норм

$$\|\varphi_I g\|_\mu = \|g\|_{|\varphi_I|^2 d\mu}. \tag{5}$$

В той же работе установлен следующий замечательный факт:

Теорема (Алеман). *Если φ – экстремальная функция в пространстве $D(\mu)$, то $|\varphi(z)| \leqslant 1$ везде в $\mathbb{D}$.*

Отсюда следует, во-первых, что экстремальные функции в пространствах $D(\mu)$ являются сжимающими мультипликаторами. Во-вторых, из характеризации z-инвариантных подпространств и теоремы Алемана следует, что для любого z-инвариантного подпространства $I \subset D(\mu)$ сужение $M_z\big|_I$ унитарно эквивалентно оператору M_z в некотором другом пространстве $D(\nu)$, причем $d\nu \leqslant d\mu$ (поскольку $d\nu = |\varphi_I|^2 d\mu$).

В связи с той ролью, которую играют экстремальные функции в пространствах $D(\mu)$, задача их описания в тех или иных терминах приобретает принципиальное значение. В случае классического пространства Дирихле (т.е. пространства $D(dm_1)$) в работе [9] для экстремальных функций установлено некоторое тождество, связывающее значения функций и значения их локального интеграла Дирихле, являющееся характеристическим для экстремальных функций. Но описание экстремальных функций в терминах какого-либо представления со свободными параметрами остается открытым вопросом, даже в случае $d\mu = dm_1$.

Понятие экстремальной функции допускает естественное обобщение на случай векторно-значных пространств $D(\mu)$ (при этом можно говорить как о векторно-значных, так и о матрично-значных экстремальных функциях). В то же время доказательство теоремы Алемана для скалярных экстремальных функций не допускает распространения на векторно-значный случай, ибо оно основано на специальных свойствах скалярной факторизации Рисса–Неванлинны. Поэтому возникает вопрос о поиске такого доказательства этой теоремы, которое можно было бы перенести на векторно-значный случай.

Настоящая работа посвящена дальнейшему изучению воспроизводящих ядер и экстремальных функций в пространствах $D(\mu)$. В §2 для них устанавливается серия тождеств, в определенных случаях являющихся характеристическими. §3 посвящен более глубокому изучению структуры воспроизводящих ядер в $D(\mu)$. В частности, из результатов §2 и §3 получается альтернативное доказательство теоремы Алемана, которое, в отличие от оригинального, допускает распространение на векторно-значный случай. Более подробному изучению векторно-значного случая будет посвящена последующая статья.

§2. Тождества для воспроизводящих ядер и экстремальных функций

Напомним сначала некоторые свойства локального интеграла Дирихле.

Лемма 1. *Пусть $f \in H^2$, $f = \theta F$, где θ – внутренняя функция, $F \in H^2$ (F – не обязательно внешняя). Если для некоторого $u \in \bar{\mathbb{D}}$ $\|DF(u)\| < +\infty$, то*

$$\|Df(u)\|^2 = \|D\theta(u)\|^2 \cdot |f(u)|^2 + \|DF(u)\|^2.$$

При этом считается, что $0 \cdot \infty = 0$.

Доказательство леммы см. в [8, лемма 3.4].

Лемма 2. *Если θ – внутренняя функция, то*

a) *при $u \in \mathbb{D}$*

$$\|D\theta(u)\|^2 = \frac{1 - |\theta(u)|^2}{1 - |u|^2}$$

b) *при $u \in \mathbb{T}$ $D\theta(u)$ определено и имеет конечную норму тогда и только тогда, когда θ имеет конечную угловую производную $\theta'(u)$. При этом*

$$\|D\theta(u)\|^2 = |\theta'(u)|.$$

Доказательство. a) получается прямым вычислением; доказательство b) см. в [8, предложение 3.5].

В частности, мы имеем

$$\|D(zf)(u)\|^2 = |f(u)|^2 + \|Df(u)\|^2$$

откуда получается формула

$$(zf, zg)_\mu = (f, g)_\mu + \int\limits_{\bar{\mathbb{D}}} f(u)\overline{g(u)}\, d\mu(u). \tag{6}$$

Далее, через S^* мы будем обозначать стандартный оператор обратного сдвига:

$$S^* f(z) = \frac{f(z) - f(0)}{z}, \quad f \in H^2.$$

Лемма 3. *Пусть $f \in H^2$, $u \in \bar{\mathbb{D}}$. Тогда*

$$\|Df(u)\|^2 = \sum_{n \geqslant 1} |(S^*)^n f(u)|^2. \tag{7}$$

Доказательство. Установим тождество (7) сначала для полиномов. Если $f = \mathrm{const}$, то все очевидно. Пусть теперь $f = p$, $\deg p = n + 1$. Тогда $p(z) = p(0) + z(S^*p)(z)$, причем $\deg S^*p = n$, откуда $Dp(u) = D(zS^*p)(u)$ и

$$\|Dp(u)\|^2 = \|D(zS^*p)(u)\|^2 = |S^*p(u)|^2 + \|D(S^*p)(u)\|^2 =$$
$$= |S^*p(u)|^2 + \sum_{n \geqslant 1} |(S^*)^n S^* p(u)|^2 = \sum_{m \geqslant 1} |(S^*)^m p(u)|^2.$$

Теперь, если $u \in \mathbb{D}$, то справедливость (7) получается стандартным предельным переходом, ибо обе части формулы непрерывны относительно $f \in H^2$.

Пусть $u \in \mathbb{T}$. Можно считать, что $u = 1$. Если левая часть (7) конечна, то $f \in D(\delta_1)$, поэтому, по предложению 2.4 работы [8], $f = (I - S^*)g$ для некоторой функции $g \in H^2$, причем

$$\|g\|^2 = |f(1)|^2 + \|Df(1)\|^2.$$

Тогда $f(1) = \hat{g}(0)$, $(S^*)^n f(1) = \hat{g}(n)$, откуда и следует (7). Если конечна правая часть (7), то мы полагаем

$$g(z) = \sum_{n \geqslant 0} (S^*)^n f(1) \cdot z^n.$$

При этом $g \in H^2$ и $f = (I - S^*)g$, откуда, снова по предложению 2.4 работы [8], $f \in D(\delta_1)$. Следовательно, левая часть (7) также конечна и равенство (7) выполняется.

Следствие 1. *Если для некоторых* $f \in H^2$ *и* $u \in \bar{\mathbb{D}}$ $\|Df(u)\| < +\infty$, *то*

$$\|Df(u)\|^2 = |S^*f(u)|^2 + \|D(S^*f)(u)\|^2. \tag{8}$$

Замечание. Сравнение формулы (7) и определения оператора Δ_{-1} из семейства операторов Δ_α, изучаемого в работе [11], показывает, что для $f \in H^2$

$$\|Df(u)\|^2 = \Delta_{-1}|f|^2(u).$$

Переходим к работе с воспроизводящими ядрами и экстремальными функциями.

Определение 2. *Пусть* $\varphi \in D(\mu)$. *Функция* $r \in H^2$ *называется ассоциированной с* φ *относительно нормы в* $D(\mu)$, *если для любого полинома* q

$$(\varphi, q)_\mu = (r, q).$$

Замечание. Далеко не с каждой функцией $\varphi \in D(\mu)$ ассоциирована некоторая функция $r \in H^2$; в определенном смысле наличие ассоциированной функции влечет некоторые дополнительные свойства гладкости φ.

Предложение 1. *Пусть* $\varphi \in D(\mu)$ *и* $r \in H^2$ – *функция, ассоциированная с* φ *относительно нормы в* $D(\mu)$. *Тогда для любых полиномов* p *и* q

$$(\varphi p, q)_\mu - (rp, q) = \int_{\mathbb{D}} \varphi(u)(Dp(u), Dq(u))d\mu(u). \tag{9}$$

Доказательство. Проведем индукцию по $n = \max(\deg p, \deg q)$. Прежде всего, из определений нормы в $D(\mu)$ и ассоциированной функции следует, что

$$\varphi(0) = (\varphi, \mathbb{1})_\mu = (r, \mathbb{1}) = r(0).$$

Поэтому тождество (9) выполняется при $\deg q = 0$, поскольку в этом случае правая часть (9) равна нулю. Аналогичным образом, в случае $\deg p = 0$ тождество (9) справедливо по определению ассоциированной функции.

Пусть теперь $\max(\deg p, \deg q) = n + 1$. Тогда тождество (9) выполняется для функций S^*p и S^*q. Поэтому мы получаем, с учетом (6) и (8),

$$(\varphi p, q)_\mu - (rp, q) = (\varphi p(0), q)_\mu - (rp(0), q)+$$

$$+(z\varphi S^*p,q)_\mu-(zrS^*p,q)=(z\varphi S^*p,zS^*q)_\mu-(zrS^*p,zS^*q)=$$

$$=(\varphi S^*p,S^*q)_\mu-(rS^*p,S^*q)+\int\limits_{\bar{\mathbb{D}}}\varphi(u)S^*p(u)\overline{S^*q(u)}d\mu(u)=$$

$$=\int\limits_{\bar{\mathbb{D}}}\varphi(u)(S^*p(u)\overline{S^*q(u)}+(DS^*p(u),DS^*q(u)))d\mu(u)=$$

$$=\int\limits_{\bar{\mathbb{D}}}\varphi(u)(Dp(u),Dq(u))d\mu(u).\qquad\square$$

Далее, P_+ и P_- будут обозначать стандартные проекторы Рисса, определенные (на функциях $f\in L^1(\mathbb{T})$, $f(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat f(n)z^n$) равенствами

$$P_+f(z)=\sum_{n\geqslant 0}\hat f(n)z^n\quad\text{и}\quad P_-f(z)=\sum_{n<0}\hat f(n)z^n.$$

Предложение 2. *Пусть $\varphi\in D(\mu)$ и $r\in H^2$ – функция, ассоциированная с φ относительно нормы в $D(\mu)$. Тогда*

$$P_+(\bar r\varphi)=P_+(|\varphi|^2+H_\varphi),\tag{10}$$

где

$$H_\varphi(\zeta)=\int\limits_{\bar{\mathbb{D}}}\left|\frac{\varphi(\zeta)-\varphi(u)}{\zeta-u}\right|^2d\mu(u),\quad\zeta\in\mathbb{T}.$$

Доказательство. Пусть p – полином. Рассмотрим выражение $D(\varphi p)(u)-\varphi(u)Dp(u)$ как элемент H^2 (при некотором $u\in\bar{\mathbb{D}}$ таком, что выражение корректно определено):

$$D(\varphi p)(u)(\zeta)-\varphi(u)Dp(u)(\zeta)=\frac{\varphi(\zeta)p(\zeta)-\varphi(u)p(u)}{\zeta-u}-\varphi(u)\frac{p(\zeta)-p(u)}{\zeta-u}=$$

$$=p(\zeta)\frac{\varphi(\zeta)-\varphi(u)}{\zeta-u}=p(\zeta)D\varphi(u)(\zeta).$$

Затем, из тождества (9) и определения нормы в $D(\mu)$ мы получаем

$$\int\limits_{\bar{\mathbb{D}}}(D\varphi(u),D(\varphi p)(u)-\varphi(u)Dp(u))d\mu(u)=$$

$$= (\varphi, \varphi p)_\mu - (\varphi, \varphi p) - (\varphi, \varphi p)_\mu + (\varphi, rp) = (\varphi, rp) - (\varphi, \varphi p).$$

Но

$$(D\varphi(u), D(\varphi p)(u) - \varphi(u) Dp(u)) = (D\varphi(u), pD\varphi(u)) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{T}} \overline{p(\zeta)} \cdot \left| \frac{\varphi(\zeta) - \varphi(u)}{\zeta - u} \right|^2 dm_1(\zeta).$$

Таким образом,

$$\int\limits_{\mathbb{T}} \bar{r}\varphi \cdot \bar{p}\, dm_1 = \int\limits_{\mathbb{T}} |\varphi|^2 \cdot \bar{p}\, dm_1 + \int\limits_{\mathbb{T}} \overline{p(\zeta)} \cdot \int\limits_{\bar{\mathbb{D}}} \left| \frac{\varphi(\zeta) - \varphi(u)}{\zeta - u} \right|^2 d\mu(u) dm_1(\zeta) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{T}} (|\varphi|^2 + H_\varphi) \cdot \bar{p}\, dm_1.$$

В силу произвольности p отсюда следует (10). $\square$

Пусть теперь $\varphi = K(\cdot, \lambda)$, где $K(\cdot, \cdot) = K_{D(\mu)}(\cdot, \cdot)$ – воспроизводящее ядро пространства $D(\mu)$. Тогда, как легко видеть, функцией, ассоциированной с $K(\cdot, \lambda)$ относительно нормы $D(\mu)$, является воспроизводящее ядро пространства H^2, т.е. функция e_λ:

$$e_\lambda(z) = \frac{1}{1 - \bar{\lambda} z}.$$

Тождество (10) при этом принимает вид

$$P_+(\bar{e}_\lambda K(\cdot, \lambda)) = P_+(|K(\cdot, \lambda)|^2 + H_{K(\cdot, \lambda)}). \tag{11}$$

Для $n \geqslant 0$

$$\int\limits_{\mathbb{T}} \overline{e_\lambda(\zeta)} \cdot K(\zeta, \lambda) \zeta^n \, dm_1(\zeta) = \lambda^n K(\lambda, \lambda),$$

откуда

$$P_-(\bar{e}_\lambda K(\cdot, \lambda))(\zeta) = \frac{\lambda \bar{\zeta}}{1 - \lambda \bar{\zeta}} K(\lambda, \lambda)$$

и мы можем переписать (11) в виде

$$\frac{K(\zeta, \lambda)}{1 - \lambda \bar{\zeta}} - \frac{\lambda \bar{\zeta}}{1 - \lambda \bar{\zeta}} K(\lambda, \lambda) = P_+(|K(\cdot, \lambda)|^2 + H_{K(\cdot, \lambda)})(\zeta).$$

Переходя к комплексно сопряженным функциям, мы получаем

$$\frac{\overline{K(\zeta,\lambda)}}{1-\bar\lambda\zeta}-\frac{K(\lambda,\lambda)}{1-\bar\lambda\zeta}=P_-(|K(\cdot,\lambda)|^2+H_{K(\cdot,\lambda)})(\zeta),$$

откуда получается

$$2\operatorname{Re}\frac{K(\zeta,\lambda)}{1-\lambda\bar\zeta}-P_\lambda(\zeta)\cdot K(\lambda,\lambda)=|K(\zeta,\lambda)|^2+H_{K(\cdot,\lambda)}(\zeta).$$

Здесь P_λ – ядро Пуассона:

$$P_\lambda(\zeta)=\frac{1-|\lambda|^2}{|1-\bar\lambda\zeta|^2}.$$

Окончательно, мы получаем следующее тождество, справедливое для воспроизводящих ядер в $D(\mu)$:

$$\frac{1}{|1-\bar\lambda\zeta|^2}=\frac{(1-|\lambda|^2)K(\lambda,\lambda)}{|1-\bar\lambda\zeta|^2}+\left|K(\zeta,\lambda)-\frac{1}{1-\bar\lambda\zeta}\right|^2+$$
$$+\int\limits_{\bar{\mathbb D}}\left|\frac{K(\zeta,\lambda)-K(u,\lambda)}{\zeta-u}\right|^2 d\mu(u). \qquad (12)$$

Одним из следствий этого тождества является ограниченность воспроизводящих ядер в пространствах $D(\mu)$.

Следствие 2. *Если $K(\cdot,\cdot)$ – воспроизводящее ядро в пространстве $D(\mu)$, то при всех z, $\lambda\in\mathbb D$*

$$|K(z,\lambda)|\leqslant\frac{2}{1-|\lambda|}.$$

Следующее предложение устанавливает еще несколько тождеств, справедливых для воспроизводящих ядер $K(\cdot,\lambda)$.

Предложение 3. *Пусть p,q – полиномы. Тогда справедливы следующие тождества:*

$$(pK(\cdot,\lambda),q)_\mu+(p,qK(\cdot,\lambda))_\mu-\frac{1}{K(\lambda,\lambda)}(pK(\cdot,\lambda),qK(\cdot,\lambda))_\mu=$$
$$(p,q)+\int\limits_{\bar{\mathbb D}}\left(2\operatorname{Re}K(u,\lambda)-\frac{|K(u,\lambda)|^2}{K(\lambda,\lambda)}\right)(Dp(u),Dq(u))d\mu(u) \qquad (13)$$

$$(pK(\cdot,\lambda),q)_\mu+(p,qK(\cdot,\lambda))_\mu-(p,q)_\mu=$$
$$=\int\limits_{\mathbb T} p(\zeta)\overline{q(\zeta)}\cdot P_\lambda(\zeta)dm_1(\zeta)+\int\limits_{\bar{\mathbb D}}(2\operatorname{Re}K(u,\lambda)-1)(Dp(u),Dq(u))d\mu(u) \tag{14}$$
$$\frac{1}{K(\lambda,\lambda)}(pK(\cdot,\lambda),qK(\cdot,\lambda))_\mu=$$
$$\int\limits_{\mathbb T} p(\zeta)\overline{q(\zeta)}\cdot P_\lambda(\zeta)dm_1(\zeta)+\int\limits_{\bar{\mathbb D}}\frac{|K(u,\lambda)|^2}{K(\lambda,\lambda)}(Dp(u),Dq(u))d\mu(u). \tag{15}$$

Доказательство. Тождество (13) доказывается индукцией по $n=\max(\deg p,\deg q)$. При $p=\mathrm{const}$ или $q=\mathrm{const}$ оно выполняется в силу воспроизводящего свойства ядра $K(\cdot,\lambda)$ и того факта, что $K(z,0)\equiv 1$ (что сразу следует из определения нормы в $D(\mu)$). Пусть теперь $\max(\deg p,\deg q)=n+1$. Тогда (13) выполняется для полиномов S^*p,S^*q и мы получаем

$$(pK(\cdot,\lambda),q)_\mu+(p,qK(\cdot,\lambda))_\mu-\frac{1}{K(\lambda,\lambda)}(pK(\cdot,\lambda),qK(\cdot,\lambda))_\mu=$$
$$p(0)\overline{q(0)}+(zS^*p\cdot K(\cdot,\lambda),q)_\mu+(zS^*p,qK(\cdot,\lambda))_\mu-$$
$$-\frac{1}{K(\lambda,\lambda)}(zS^*pK(\cdot,\lambda),qK(\cdot,\lambda))_\mu=$$
$$=p(0)\overline{q(0)}+(zS^*pK(\cdot,\lambda),zS^*q)_\mu+(zS^*p,zS^*qK(\cdot,\lambda))_\mu-$$
$$-\frac{1}{K(\lambda,\lambda)}(zS^*pK(\cdot,\lambda),zS^*qK(\cdot,\lambda))_\mu=$$
$$=p(0)\overline{q(0)}+\int\limits_{\bar{\mathbb D}}\left(2\operatorname{Re}K(u,\lambda)-\frac{|K(u,\lambda)|^2}{K(\lambda,\lambda)}\right)S^*p(u)\overline{S^*q(u)}d\mu(u)+$$
$$+(S^*pK(\cdot,\lambda),S^*q)_\mu+(S^*p,S^*qK(\cdot,\lambda))_\mu-$$
$$-\frac{1}{K(\lambda,\lambda)}(S^*pK(\cdot,\lambda),S^*qK(\cdot,\lambda))_\mu=p(0)\overline{q(0)}+(S^*p,S^*q)+$$
$$+\int\limits_{\bar{\mathbb D}}\left(2\operatorname{Re}K(u,\lambda)-\frac{|K(u,\lambda)|^2}{K(\lambda,\lambda)}\right)(S^*p(u)\overline{S^*q(u)}+$$

$$+(DS^*p(u), DS^*q(u))d\mu(u) =$$

$$= (p,q) + \int\limits_{\mathbb{D}} \left(2\,\mathrm{Re}\,K(u,\lambda) - \frac{|K(u,\lambda)|^2}{K(\lambda,\lambda)}\right)(Dp(u), Dq(u))d\mu(u),$$

что и требуется.

Тождество (14) является непосредственным следствием формулы (9) с учетом равенства

$$e_\lambda(\zeta) + \overline{e_\lambda(\zeta)} - 1 = P_\lambda(\zeta).$$

Тождество (15) получается вычитанием (13) из (14).

Следствие 3. *Функции $K(\cdot,\lambda)$ являются мультипликаторами пространства $D(\mu)$.*

Доказательство. Действительно, положив в (15) $p = q$, мы получим

$$\|pK(\cdot,\lambda)\|_\mu^2 = K(\lambda,\lambda)\int\limits_{\mathbb{T}} |p(\zeta)|^2 P_\lambda(\zeta)dm_1(\zeta) +$$

$$+ \int\limits_{\mathbb{D}} |K(u,\lambda)|^2 \cdot \|Dp(u)\|^2 d\mu(u),$$

что мажорируется выражением $C(\lambda)\cdot\|p\|_\mu^2$ в силу следствия 2. Остатеся воспользоваться тем, что полиномы плотны в $D(\mu)$ ([6, следствие 3.8]). □

Следствие 4. *Формулы* (13)–(15) *справедливы, если p, q – произвольные функции из $D(\mu)$.*

Пусть теперь $\varphi \in D(\mu)$ – экстремальная функция. Из определения сразу следует, что $(p\varphi,\varphi)_\mu = p(0)$ для любого полинома p. Пусть $[\varphi]$ обозначает циклическое инвариантное подпространство, порожденное φ:

$$[\varphi] = \bigvee\{z^n\varphi \,:\, n \geqslant 0\}.$$

Тогда для любой функции r такой, что $r\varphi \in [\varphi]$ будет $(r\varphi,\varphi)_\mu = r(0)$. В частности, это справедливо для $r = K(\cdot,\lambda)$, поскольку включение $K(\cdot,\lambda)\varphi \in [\varphi]$ следует из [1, теорема 4.3] или [8, следствие 5.5] в случае $\mu \in M_+(\mathbb{T})$). Поэтому

$$(K(\cdot,\lambda)\varphi,\varphi)_\mu + (\varphi, K(\cdot,\lambda)\varphi)_\mu - (\varphi,\varphi)_\mu = 1,$$

что вместе с тождеством (14) приводит к следующей теореме:

Теорема 1. *Если φ – любая экстремальная функция в пространстве $D(\mu)$, то*

$$\int_{\mathbb{T}} |\varphi(\zeta)|^2 \cdot P_\lambda(\zeta) dm_1(\zeta) + \int_{\bar{\mathbb{D}}} (2\operatorname{Re} K(u,\lambda) - 1)\|D\varphi(u)\|^2 d\mu(u) = 1. \quad (16)$$

В частном случае $d\mu = dm_1$ формула (16) получена Рихтером и Сандбергом ([9, формула (5.1)]). В этом случае $K(u,\lambda) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(\bar{\lambda}u)^n}{n+1}$ и для $u \in \mathbb{T}$

$$2\operatorname{Re} K(u,\lambda) - 1 = \int_0^1 P_{r\lambda}(u) dr.$$

Теорема Алемана (неравенство $\|\varphi\|_{H^\infty} \leqslant 1$ для экстремальных функций φ) мгновенно следует из тождества (16), если проверить, что для всех $\lambda, u \in \mathbb{D}$

$$2\operatorname{Re} K(u,\lambda) - 1 \geqslant 0.$$

Подробному обсуждению этого свойства воспроизводящих ядер посвящен следующий параграф.

Для экстремальных функций в $D(\mu)$ справедливо тождество ([1, теорема 4.9] или [6, теорема 7.1])

$$\|\varphi p\|_\mu^2 = \|p\|^2 + \int_{\bar{\mathbb{D}}} |\varphi(u)|^2 \cdot \|Dp(u)\|^2 d\mu(u)$$

(p – полином). Оно может быть доказано так же, как тождество (9) или (13). Вместе с теоремой Алемана оно показывает, что экстремальные функции в $D(\mu)$ являются сжимающими мультипликаторами.

В заключение этого параграфа проверим, что формула (16) является, при некотором дополнительном условии, характеристической для экстремальных функций.

Предложение 4. *Если некоторая функция $\varphi \in D(\mu)$ является мультипликатором $D(\mu)$ и при всех $\lambda \in \mathbb{D}$ справедливо (16), то функция φ экстремальна в $D(\mu)$.*

Доказательство. Пусть $a \in \mathbb{D}$ и $r \in (0,1)$. Положим в тождестве (16) $\lambda = re^{i\theta}$, домножим на $\frac{1}{1-\bar{a}e^{i\theta}}$ и проинтегрируем по $\theta \in [0, 2\pi]$.

Тогда мы получим равенство

$$\int\limits_{\mathbb{T}} |\varphi(\zeta)|^2 \cdot \frac{1}{1-\bar{a}r\zeta} + \int\limits_{\mathbb{D}} K(u, ra) \cdot \|D\varphi(u)\|^2 d\mu(u) = 1,$$

которое равносильно, в силу (9), соотношению

$$(K(\cdot, ra)\varphi, \varphi)_\mu = 1.$$

Таким образом, мы имеем для всех $\lambda \in \mathbb{D}$

$$(K(\cdot, \lambda)\varphi, \varphi)_\mu = 1 = K(0, \lambda).$$

Затем, приближая любой полином p конечными линейными комбинациями вида $\sum\limits_k c_k K(\cdot, \lambda)$ по норме $D(\mu)$ и пользуясь тем, что φ – мультипликатор $D(\mu)$, мы получаем, что $(p\varphi, \varphi)_\mu = p(0)$, что и требуется. $\square$

Замечание. Дополнительное условие, что функция φ является мультипликатором пространства $D(\mu)$, по-видимому, несущественно. Это условие можно отбросить, если любой полином допускает аппроксимацию по норме $D(\mu)$ конечными линейными комбинациями вида $\sum\limits_k c_k K(\cdot, \lambda)$ так, что нормы этих комбинаций в $H^\infty(\mathbb{D})$ равномерно ограничены. Так будет, например, во всех пространствах $D(\mu)$ с радиальными мерами μ.

§3. Структура воспроизводящих ядер

Целью настоящего параграфа является изучение структуры воспроизводящих ядер в пространствах $D(\mu)$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Если $K(\cdot, \cdot)$ – воспроизводящее ядро в пространстве $D(\mu)$, то при всех $z, \lambda \in \mathbb{D}$*

$$2 \operatorname{Re} K(z, \lambda) - 1 \geqslant 0. \tag{17}$$

Сама по себе эта теорема является простым следствием теоремы Алемана. Действительно, рассмотрим в $D(\mu)$ z-инвариантное подпространство

$$I_\lambda = \{f \in D(\mu) \, : \, f(\lambda) = 0\}.$$

Прямое вычисление показывает, что экстремальная функция φ_λ для подпространства I_λ равна

$$\varphi_\lambda(z) = \frac{1 - K(\lambda,\lambda)^{-1} K(z,\lambda)}{\sqrt{1 - K(\lambda,\lambda)^{-1}}}.$$

По теореме Алемана, $|\varphi_\lambda(z)|^2 \leqslant 1$ в $\mathbb{D}$, что равносильно

$$2 \operatorname{Re} K(z,\lambda) - 1 \geqslant K(\lambda,\lambda)^{-1} |K(z,\lambda)|^2.$$

Но, имея своей целью последующее изучение векторно-значного случая, мы дадим в настоящем параграфе независимое доказательство неравенства (17).

Если X – произвольное гильбертово пространство аналитических функций в круге $\mathbb{D}$, то его воспроизводящее ядро $K_X(\cdot,\cdot)$ являет собой характерный пример положительно определенной функции двух переменных: функция $K_X(\cdot,\cdot)$ обладает тем свойством, что

$$\sum_{j,k} K_X(z_j, z_k) c_j \bar{c}_k \geqslant 0 \tag{18}$$

для любых финитных последовательностей $(z_j)_{j\geqslant 1}$, и $(c_j)_{j\geqslant 1}$, $z_j \in \mathbb{D}$, $c_j \in \mathbb{C}$. С другой стороны, поскольку функция $K_X(z_1, \bar{z}_2)$ аналитична в бидиске $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$, справедливо степенное разложение

$$K_X(z,\lambda) = \sum_{n,k\geqslant 0} \hat{K}_X(n,k) z^n \bar{\lambda}^k, \tag{19}$$

при этом (для $r \in (0,1)$)

$$\widehat{K_X}(n,k) = \frac{1}{r^{n+k}} \int\limits_{\mathbb{T}} \int\limits_{\mathbb{T}} K_X(r\zeta, r\eta) \bar{\zeta}^n \eta^k \, dm_1(\zeta) dm_1(\eta).$$

Стандартная проверка показывает, что матрица $(\widehat{K_X}(n,k))_{n,k\geqslant 0}$ положительно определена. Под этим понимается положительная определенность всех конечных подматриц $(\widehat{K_X}(n,k))_{0\leqslant k\leqslant N}$. Более общим образом, положительная определенность некоторой функции $A(z,\lambda)$ переменных $z, \lambda \in \mathbb{D}$, аналитической по z и антианалитической по λ, равносильна положительной определенности матрицы $(\widehat{A}(n,k))_{n,k\geqslant 0}$ в разложении

$$A(z,\lambda) = \sum_{n,k\geqslant 0} \widehat{A}(n,k) z^n \bar{\lambda}^k.$$

Далее факт положительной определенности функции A будет обозначаться $A \succcurlyeq 0$, аналогично $\widehat{A} \succcurlyeq 0$ обозначает положительную определенность матрицы $(\widehat{A}(n,k))_{n,k\geqslant 0}$. Запись $A \succcurlyeq B$ обозначает, что разность $A-B$ положительно определена.

Далее нам будет необходима следующая лемма.

Лемма 4. *Пусть X и Y – гильбертовы пространства аналитических в $\mathbb{D}$ функций, причем $Y \subset X$ и для любой функции $f \in Y$*

$$\|f\|_X \leqslant \|f\|_Y.$$

Тогда $K_X \succcurlyeq K_Y$.

Доказательство. Рассмотрим метрику, комплементарную к метрике $\|\cdot\|_Y$ в пространстве X, т.е. положим для $x \in X$

$$\|x\|_Z^2 := \sup_{y \in Y}\{\|x+y\|_X^2 - \|y\|_Y^2\}$$

и рассмотрим гильбертово пространство $Z = \{x \in X \,:\, \|x\|_Z < +\infty\}$ с нормой $\|\cdot\|_Z$. Тогда известно, что Z оказывается гильбертовым пространством функций в $\mathbb{D}$, непрерывно вложенным в X, и вопроизводящие ядра пространств X, Y и Z удовлетворяют соотношению

$$K_Y(u,\lambda) + K_Z(u,\lambda) = K_X(u,\lambda),$$

откуда и следует, что $K_X - K_Y \succcurlyeq 0$. Подробности см. в [5]. $\Box$

На бесконечных матрицах $a = (a(n,k))_{n,k\geqslant 0}$ определим операции σ и σ^* равенствами

$$(\sigma^* a)(n,k) := a(n+1,k+1)$$

$$(\sigma a)(n,k) := \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \min(n,k)=0 \\ a(n-1,k-1), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Легко видеть, что операции σ и σ^* сохраняют свойство положительной определенности матрицы и что $\sigma^*\sigma = I$.

Следующее предложение сводит доказательство неравенства (17) к установлению некоторых специальных свойств матрицы $\widehat{K}$.

Предложение 5. *Пусть матрица $a = (a(n,k))_{n,k\geqslant 0}$ такова, что*

$$1)\quad a \succcurlyeq 0;\quad (I-\sigma^*)a \succcurlyeq 0;\quad (I-\sigma^*)^2 a \succcurlyeq 0 \tag{20}$$

$$2)\quad a(0,0)=1;\quad a(0,n)=a(n,0)=0\quad \text{при } n\geqslant 1 \tag{21}$$

Тогда если для $u, v \in \mathbb{D}$

$$A(u,v) = \sum_{n,k\geqslant 0} a(n,k)u^n\bar{v}^k,$$

то

$$2\operatorname{Re} A(u,v) - 1 \geqslant 0. \tag{22}$$

Доказательство. Прежде всего, из неравенства $(I-\sigma^*)a \succcurlyeq 0$ следует, что $a(n,n) \geqslant a(n+1,n+1)$, откуда получается, что для всех членов матрицы a выполняется оценка

$$|a(n,k)| \leqslant a(n,n)^{1/2}a(k,k)^{1/2} \leqslant a(0,0),$$

т.е. члены матрицы a ограничены.

Для каждого $r \in (0,1)$ рассмотрим матрицу $a_r : a_r(n,k) := r^{n+k}a(n,k)$, и положим

$$A_r(u,v) = \sum_{n,k\geqslant 0} a_r(n,k)u^n\bar{v}^k.$$

Очевидным образом, достаточно установить неравенство (22) для всех функций A_r с $r \in (0,1)$. Покажем, что матрица a_r снова удовлетворяет условиям предложения. Выполнение (21) очевидно, а (20) вытекает из следующих равенств

$$(I-\sigma^*)a_r = (r^2(I-\sigma^*)a + (1-r^2)a)_r$$

и

$$(I-\sigma^*)^2 a_r = (r^4(I-\sigma^*)^2 a + 2r^2(1-r^2)(I-\sigma^*)a + (1-r^2)^2 a)_r,$$

где $b_r(n,k) = r^{n+k}b(n,k)$ для произвольной матрицы $b = (b(n,k))_{n,k\geqslant 0}$.

Таким образом, при доказательстве предложения 5, не умаляя общности, можно считать, что члены матрицы a стремятся к нулю при $n, k \to \infty$ быстрее, чем r^{n+k} при некотором $r \in (0, 1)$. Поэтому справедливо следующее разложение

$$a = \sum_{l \geqslant 0} (l+1)(\sigma^*)^l (I - \sigma^*)^2 a = (I - \sigma^*)^{-2} (I - \sigma^*)^2 a, \qquad (23)$$

причем ряд сходится, например, в $l^1(\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+)$.

Для $u, v \in \mathbb{D}$ рассмотрим матрицу $E_{u,v}$:

$$E_{u,v}(n, k) = u^n \bar{v}^k, \quad n, k \geqslant 0.$$

Тогда

$$A(u, v) = \langle a, E_{u,v} \rangle,$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает естественное спаривание матриц:

$$\langle a, b \rangle = \sum_{n,k \geqslant 0} a(n, k) b(n, k).$$

Поэтому для любой матрицы $h = (h(n, k))_{n,k \geqslant 0}$ такой, что

$$h(0, 0) = 0 \quad \text{и} \quad h(n, k) = 0 \quad \text{при} \quad \min(n, k) \geqslant 1 \qquad (24)$$

мы можем записать, с учетом условия (21)

$$2 \operatorname{Re} A(u, v) - 1 = \langle a, E_{u,v} + E_{v,u} - E_{0,0} + h \rangle$$

(мы учитываем также, что $A(u, v) = \overline{A(v, u)}$, что следует из того, что $a \succcurlyeq 0$). С учетом разложения (23) можно записать

$$2 \operatorname{Re} A(u, v) - 1 = \langle (I - \sigma^*)^2 a, (I - \sigma)^{-2} (E_{u,v} + E_{v,u} - E_{0,0} + h) \rangle.$$

Поскольку $(I - \sigma^*)^2 a \succcurlyeq 0$, для доказательства предложения достаточно показать, что найдется такая матрица h, удовлетворяющая условиям (24), что матрица $b = (I - \sigma)^{-2}(E_{u,v} + E_{v,u} - E_{0,0} + h)$ будет положительно определена. Если перейти к функции

$$B(z, \lambda) = \sum_{n,k \geqslant 0} b(n, k) z^n \bar{\lambda}^k,$$

то достаточно показать, что существуют такие функции H_1 и H_2, аналитические в $\mathbb{D}$, что $H_1(0) = H_2(0) = 0$ и функция

$$B(z, \lambda) = \frac{1}{(1 - \bar{\lambda} z)^2} \times$$

$$\times\left(\frac{1}{(1-uz)(1-\overline{v\lambda})}+\frac{1}{(1-vz)(1-\overline{u\lambda})}-1+H_1(z)+H_2(\bar\lambda)\right)$$

положительно определена. Положим теперь

$$H_1(z)=\frac{1}{(1-uz)(1-vz)}-\frac{1}{1-uz}-\frac{1}{1-vz}+1$$

и $H_2(\bar\lambda)=\overline{H_1(\lambda)}$. Тогда мы получим

$$B(z,\lambda)=\frac{1}{(1-\bar\lambda z)^2}\left(\frac{1}{1-uz}+\frac{1}{1-\bar u\bar\lambda}-1\right)\left(\frac{1}{1-vz}+\frac{1}{1-\overline{v\lambda}}-1\right)=$$

$$=\frac{1}{(1-\bar\lambda z)^2}\cdot\frac{1-|u|^2\bar\lambda z}{(1-uz)(1-\overline{u\lambda})}\cdot\frac{1-|v|^2\bar\lambda z}{(1-vz)(1-\overline{v\lambda})}=$$

$$=\frac{1}{(1-uz)(1-vz)}\cdot\left(\frac{1-|u|^2}{1-\bar\lambda z}+|u|^2\right)\left(\frac{1-|v|^2}{1-\bar\lambda z}+|v|^2\right)\times$$

$$\times\frac{1}{(1-\overline{u\lambda})(1-\overline{v\lambda})},$$

а эта функция, очевидным образом, положительно определена. Предложение 5 доказано.

Переходим к воспроизводящим ядрам $K(\cdot,\cdot)$ в пространствах $D(\mu)$. Для доказательства теоремы 2 достаточно проверить, что матрица $\widehat{K}$ в разложении (19) для этих ядер удовлетворяет условиям предложения 5.

Прежде всего, запишем разложение

$$D(\mu)=\bigoplus_{n\geqslant 0}(z^nD(\mu)\ominus z^{n+1}D(\mu)). \tag{25}$$

Каждое подпространство $z^nD(\mu)\ominus z^{n+1}D(\mu)$ одномерно, поэтому существует ортонормированный базис $(e_n)_{n\geqslant 0}$ пространства $D(\mu)$, подчиненный этому разложению. Запишем стандартное тождество для воспроизводящих ядер:

$$K(z,\lambda)=\sum_{n\geqslant 0}e_n(z)\overline{e_n(\lambda)}.$$

Из определения нормы в пространстве $D(\mu)$ сразу следует, что функция $\mathbb{1}$ воспроизводит значения функций в точке 0: для $f\in D(\mu)$

$$(f,\mathbb{1})_\mu=f(0).$$

Поэтому $K(z,0) = \mathbb{1} = e_0(z)$ и

$$K(z,\lambda) = 1 + \sum_{n\geqslant 1} e_n(z)\overline{e_n(\lambda)}. \tag{26}$$

Отсюда следует выполнение условий (21) предложения 5. Для проверки условий (20) рассмотрим функции

$$K'(z,\lambda) = \sum_{n,k\geqslant 0} (\sigma^* \widehat{K})(n,k) z^n \bar{\lambda}^k$$

и

$$K''(z,\lambda) = \sum_{n,k\geqslant 0} (\sigma^{*2} \widehat{K})(n,k) z^n \bar{\lambda}^k.$$

Нам достаточно проверить, что $K \succcurlyeq K'$ и $K - 2K' + K'' \succcurlyeq 0$. Рассмотрим, кроме этого, семейство норм $\|\cdot\|_{\mu,t}$ в пространстве $D(\mu)$:

$$\|f\|^2_{\mu,t} := \|f\|^2_\mu + t \int\limits_{\bar{\mathbb{D}}} |f(z)|^2 d\mu(z), \quad t \geqslant 0.$$

Нормы $\|\cdot\|_{\mu,t}$ эквивалентны нормам в $D(\mu)$, поскольку вложение $D(\mu) \subset L^2(\bar{\mathbb{D}}, d\mu)$ непрерывно ([1, утверждение 4.6]). Через $K_t(\cdot,\cdot)$ обозначим воспроизводящее ядро $D(\mu)$ относительно нормы $\|\cdot\|_{\mu,t}$.

Лемма 5. $K'(\cdot,\cdot) = K_1(\cdot,\cdot)$.

Доказательство. Из разложения (26) следует, что $K'(z,\lambda) = \frac{1}{\bar{\lambda} z}(K(z,\lambda) - 1)$. Затем, из формулы (6) следует, что $(f,g)_{\mu,1} = (zf, zg)_\mu$. Поэтому для $f \in D(\mu)$ мы получаем

$$\left(f, \frac{1}{\bar{\lambda} z}(K(z,\lambda) - 1)\right)_{\mu,1} = \frac{1}{\lambda}(zf, K(z,\lambda) - 1)_\mu = f(\lambda),$$

что и доказывает лемму. □

Следствие 5. $K \succcurlyeq K'$. *Действительно, для любой* $f \in D(\mu)$

$$\|f\|_{\mu,1} \geqslant \|f\|_\mu,$$

откуда, по лемме 4, $K \succcurlyeq K_1 = K'$. □

Лемма 6. $K'' \succcurlyeq K_2$.

Доказательство. Введем в пространстве $D(\mu)$ еще одну эквивалентную норму:

$$\|f\|^2_{\mu,*} := \|z^2 f\|^2_\mu - \frac{1}{\|z\|^2_\mu} |(z^2 f, z)_\mu|^2 =$$

$$= \|f\|^2_\mu + \int\limits_{\mathbb{D}} (1+|z|^2)|f(z)|^2 d\mu(z) - \frac{1}{\|z\|^2_\mu} |(z^2 f, z)_\mu|^2.$$

Покажем, что функция $K''(\cdot,\cdot)$ будет воспроизводящим ядром относительно этой нормы. Прежде всего, из разложения (26) следует, что

$$\frac{\partial}{\partial\bar\lambda}\bigg|_{\lambda=0} K(z,\lambda) = \overline{e_1'(0)} e_1(z),$$

т.е. для любой $f \in D(\mu)$

$$(f, \overline{e_1'(0)} e_1)_\mu = f'(0).$$

Если записать $e_1(z) = z e_1'(0) + z^2 g(z)$, то из того же разложения (26) получается

$$K''(z,\lambda) = \frac{1}{\bar\lambda^2 z^2} \left(K(z,\lambda) - 1 - \bar\lambda \overline{e_1'(0)} e_1(z) - \bar\lambda^2 \overline{g(\lambda)} z e_1'(0) \right).$$

Отсюда для любой $f \in D(\mu)$

$$(z^2 f, z^2 K''(z,\lambda))_\mu =$$

$$= \frac{1}{\lambda^2} \left(z^2 f, K(z,\lambda) - 1 - \bar\lambda \overline{e_1'(0)} e_1(z) - \bar\lambda^2 \overline{g(\lambda)} z e_1'(0) \right)_\mu =$$

$$= f(\lambda) - g(\lambda) \overline{e_1'(0)} (z^2 f, z)_\mu$$

и

$$\frac{1}{\|z\|^2_\mu} (z^2 f, z)_\mu \cdot (z, z^2 K''(z,\lambda))_\mu =$$

$$= \frac{1}{\|z\|^2_\mu} (z^2 f, z)_\mu \cdot \frac{1}{\lambda^2} (z, K(z,\lambda) - 1 - \bar\lambda \overline{e_1'(0)} e_1(z) - \bar\lambda^2 \overline{g(\lambda)} z e_1'(0))_\mu =$$

$$= -g(\lambda) \overline{e_1'(0)} (z^2 f, z)_\mu,$$

что и приводит к соотношению

$$(f, K''(\cdot,\lambda))_{\mu,*} = f(\lambda).$$

Теперь мы замечаем, что для любой $f \in D(\mu)$

$$\|f\|^2_{\mu,*} \leqslant \|f\|^2_{\mu,2}.$$

Следовательно, снова по лемме 4, мы получаем неравенство $K'' \succcurlyeq K_2$. $\square$

Таким образом, мы имеем неравенство

$$K - 2K' + K'' \succcurlyeq K_0 - 2K_1 + K_2.$$

Для завершения доказательства теоремы 2 достаточно показать, что вторая разность в правой части положительно определена. Это вытекает из следующей леммы:

Лемма 7. $\frac{\partial^2}{\partial t^2} K_t \succcurlyeq 0.$

Доказательство. Лемма доказывается стандартной процедурой дифференцирования воспроизводящего ядра по параметру. При фиксированных $z, \lambda \in \mathbb{D}$

$$K_t(z,\lambda) = (K_t(\cdot,\lambda), K_{t+\Delta t}(\cdot, z))_{\mu,t+\Delta t}$$

и

$$K_{t+\Delta t}(z,\lambda) = (K_t(\cdot,\lambda), K_{t+\Delta t}(\cdot, z))_{\mu,t},$$

откуда

$$K_{t+\Delta t}(z,\lambda) - K_t(z,\lambda) = -\Delta t \int\limits_{\bar{\mathbb{D}}} K_{t+\Delta t}(z,u) K_t(u,\lambda)\, d\mu(u).$$

Следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial t} K_t(z,\lambda) = -\int\limits_{\bar{\mathbb{D}}} K_t(z,u) K_t(u,\lambda)\, d\mu(u)$$

и

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} K_t(z,\lambda) = 2 \int\limits_{\bar{\mathbb{D}}} \int\limits_{\bar{\mathbb{D}}} K_t(z,v) K_t(v,u) K_t(u,\lambda)\, d\mu(v)\, d\mu(u). \tag{27}$$

Проверка положительной определенности функции, заданной интегралом (27), производится стандартным образом. □

Таким образом, теорема 2 полностью доказана. Приведенное доказательство допускает распространение на векторно-значный случай (при условии замены скалярных функций, мер и неравенств на соответствующие векторно- и операторно-значные). Подробному изучению этих вопросов будет посвящена последующая статья.

Литература

1. A. Aleman, *The multiplication operator on Hilbert spaces of analytic functions.* Habilitationsschrift, Hagen, 1993.
2. A. Aleman, S. Richter, C. Sundberg, *Beurling's theorem for the Bergman space.* Acta Math. **177**, No. 2 (1996), 275–310.
3. P. Duren, D. Khavinson, H. Shapiro, C. Sundberg, *Contractrive zero-divisors in Bergman spaces.* Pacific J. Math. **157** (1993), 37–56.
4. H. Hedenmalm, *A factorization theorem for square area-integrable analytic functions.* J. reine angew. Math. **422** (1991), 45–68.
5. Н. Никольский, В. Васюнин, *Квазиортогональные разложения по дополнительным метрикам и оценки однолистных функций.* Алгебра и Анализ **2**, вып. 4 (1990), 1–81.
6. S. Richter, *A representation theorem for cyclic analytic two-isometries.* Trans. Amer. Math. Soc. **328**, No. 1 (1991), 325–349.
7. S. Richter, *Invariant subspaces of the Dirichlet shift.* J. reine angew. Math. **386** (1988), 205–220.
8. S. Richter, C. Sundberg, *A formula for the local Dirichlet integral.* Michigan Math. J. **38** (1991), 355-379.
9. S. Richter, S. Sundberg, *Invariant subspaces of the Dirichlet shift and pseudocontinuations.* Trans. Amer. Math. Soc. **341** (1994), 863–879.
10. S. Shimorin, *Approximative spectral synthesis in the Bergman space.* Preprint, Bordeaux, 1997.
11. С. Шиморин, *Факторизация аналитических функций в весовых пространствах Бергмана.* Алгебра и Анализ **5**, вып. 5 (1993), 155–177.

Shimorin S. M. Reproducing kernels and extremal functions in Dirichlet type spaces.

A number of identities is established for reproducing kernels and extremal functions in Dirichlet type spaces. In certain cases these identities are characteristic. A new proof of Aleman's theorem on extremal functions as contractive multipliers is obtained. As distinct from the original one, it can be extended to vector-valued spaces.

С.-Петербургский
государственный университет
e-mail:shi@math.lgu.spb.su

Поступило 12 января 1998 г.