Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 255, 1998 г.

Н. А. Широков

ВАРИАЦИОННАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ ЯДЕР БЕРГМАНА

Целью настоящей работы является получение (при выполнении ряда условий) формулы, связывающей ядра Бергмана для некоторых строго псевдовыпуклых областей Ω_0 и Ω_1 в $\mathbb{C}^n$. Вопрос о классах областей, для которых предполагаемые требования выполняются, открыт. Тем не менее оказывается, что примеры областей Ω_0 и Ω_1, для которых соответствующая формула состоятельна, существуют. Применение вариационной формулы позволяет найти два первых слагаемых в асимптотике $B_\Omega(z,z)$ при $z \to \partial\Omega$ для определенного типа областей Ω, при этом представляет интерес сопоставить вычисляемое поведение ядра Бергмана с теоремой Кристофферса [1].

В первой части работы формулируются упоминаемые выше предположения и получается формула, во второй – приводятся примеры областей, для которых предположения из первой части удается доказать, а в третьей проводятся вычисления, показывающие, как вариационная формула позволяет изучать поведение ядра Бергмана при приближении его равных аргументов к границе.

1. Вывод формулы.

Будем предполагать, что семейство областей Ω_t удовлетворяет нескольким нижеперечисленным условиям:

$$\text{их границы равномерно } C^2\text{-гладкие;} \tag{1.1}$$

для всякого $t \in (0,1)$ и всякой $\omega \in \Gamma_t$ существует конечный предел

$$\varphi_t(\omega) = \lim_{\delta\to+0} \frac{1}{\delta}\operatorname{dist}^+(\omega, \Gamma_{t+\delta}), \tag{1.2}$$

где в формуле (1.2) dist^+ означает эвклидово расстояние от ω до $\Gamma_{t+\delta}$, взятое со знаком “+”, если ближайшая к ω точка на $\Gamma_{t+\delta}$ лежит вне Ω_t, и взятое со знаком “$-$”, если последняя находится внутри Ω_t.

В условиях (a_z)–(e_z) (см. ниже) точка z принадлежит $\bigcap\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}\Omega_t$, $B_t(w,\omega)$ означает ядро Бергмана для Ω_t. Итак, предполагается, что семейство областей $\{\Omega_t\}$ таково, что при всяком $t\in(0,1)$ выполнено

$$\int\limits_{\Omega_t\cap\Omega_{t+\delta}} |B_{t+\delta}(z,s)-B_t(z,s)|^2\, dm(s)\leqslant c\delta, \qquad (a_z)$$

где c в (a_z) не зависит от t и δ;

$$\int\limits_{\Omega_t\cap\Omega_{t+\delta}} |B_{t+\delta}(z,s)-B_t(z,s)|^2\, dm(s)=o(\delta),\quad \delta\to+0; \qquad (b_z)$$

существует функция $\lambda_{t,\delta}(z,s)$, антиголоморфная по s в области $\Omega_t\cup\Omega_{t+\delta}$, для которой имеются соотношения

$$\int\limits_{\Omega_t\cap\Omega_{t+\delta}} \bigl|\lambda_{t,\delta}(z,s)-\bigl(B_{t+\delta}(z,s)-B_t(z,s)\bigr)\bigr|\, dm(s)=o(\delta), \qquad (c_z)$$
$$\delta\to+0;$$

$$\int\limits_{(\Omega_t\setminus\Omega_{t+\delta})\cup(\Omega_{t+\delta}\setminus\Omega_t)} |\lambda_{t,\delta}(z,s)|dm(s)=o(\delta),\quad \delta\to+0 \qquad (d_z)$$

dm в (a_z)–(d_z) означает $2n$-мерную меру Лебега;

$$|B_t(z,s)|\leqslant C,\quad C\ \text{ не зависит от }\ t\ \text{ и }\ s$$
$$\text{и}\ \ B_t(z,s)\ \text{ непрерывна в }\ \overline{\Omega}_t. \qquad (e_z)$$

Теорема 1. *Если выполнены предположения* (1.1), (1.2), (a_z)–(e_z), (a_ξ)–(e_ξ) *для некоторых точек* $z,\xi\in\bigcap\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}\Omega_t$, *то справедлива формула*

$$B_1(z,\xi)=B_0(z,\xi)-\int\limits_0^1 dt\int\limits_{\Gamma_t} B_t(z,s)B_t(s,\xi)\varphi_t(s)d\nu(s), \qquad (1.3)$$

где $d\nu(s)$ *означает* $2n-1$*-мерную меру на* Γ_t*;*

если выполнены только предположения (1.1), (1.2), (a_z)–(e_z), *то имеем*

$$B_1(z,z) = B_0(z,z) - \int\limits_0^1 dt \int\limits_{\Gamma_t} |B_t(z,s)|^2 \varphi_t(s) d\nu(s). \tag{1.4}$$

Доказательство. Из условий (a_z), (a_ξ) несложно получить, что функция $B_t(z,\xi)$ как функция от t принадлежит классу Липшица на (0,1), поэтому для доказательства (1.3) достаточно проверить равенство

$$\frac{dB_t(z,\xi)}{dt} = -\int\limits_{\Gamma_t} B_t(z,s) B_t(s,\xi) \varphi_t(s) d\nu(s), \tag{1.5}$$

соответственно, для установления (1.4) в (1.5) нужно положить $z = \xi$.

Для вывода формулы (1.5) положим

$$B_{t+\delta}(z,\xi) - B_t(z,\xi) = E_{t,\delta}(z,\xi), \quad z,\xi \in \Omega_t \cap \Omega_{t+\delta}.$$

Имеем, учитывая воспроизводящее свойство ядер Бергмана:

$$B_t(z,\xi) = \int\limits_{\Omega_t} B_t(z,s)\, B_t(s,\xi)\, dm(s) = \int\limits_{\Omega_t \cap \Omega_{t+\delta}} + \int\limits_{\Omega_t \setminus \Omega_{t+\delta}}$$

$$= \int\limits_{\Omega_t \cap \Omega_{t+\delta}} \big(B_{t+\delta}(z,s) - E_{t,\delta}(z,s)\big)\big(B_{t+\delta}(s,\xi) - E_{t,\delta}(s,\xi)\big) dm(s) + \int\limits_{\Omega_t \setminus \Omega_{t+\delta}} \dots$$

$$= \int\limits_{\Omega_t \cap \Omega_{t+\delta}} B_{t+\delta}(z,s) B_{t+\delta}(s,\xi) dm(s) - \int\limits_{\Omega_t \cap \Omega_{t+\delta}} E_{t,\delta}(z,s) B_{t+\delta}(s,\xi) dm(s)$$

$$- \int\limits_{\Omega_t \cap \Omega_{t+\delta}} B_{t+\delta}(z,s) E_{t,\delta}(s,\xi) dm(s) + \int\limits_{\Omega_t \cap \Omega_{t+\delta}} E_{t,\delta}(z,s) E_{t,\delta}(s,\xi) dm(s) + \int\limits_{\Omega_t \setminus \Omega_{t+\delta}} \dots$$

$$= \int\limits_{\Omega_{t+\delta}} B_{t+\delta}(z,s) B_{t+\delta}(s,\xi) dm(s) - \int\limits_{\Omega_t \setminus \Omega_{t+\delta}} B_{t+\delta}(z,s) B_{t+\delta}(s,\xi) dm(s)$$

$$+\int\limits_{\Omega_t\setminus\Omega_{t+\delta}} B_t(z,s)B_t(z,\xi)dm(s)+[\ldots]. \tag{1.6}$$

Для дальнейших преобразований в (1.6) возьмем функции $\lambda_{t,\delta}(z,s)$, $\lambda_{t,\delta}(\xi,s)$ антиголоморфные по s в области $\Omega_t\setminus\Omega_{t+\delta}$, удовлетворяющие соотношениям (c_z), (c_ξ), (d_z), (d_ξ), и пусть $\lambda_{t,\delta}(s,\xi)=\overline{\lambda_{t,\delta}(\xi,s)}$. Тогда можно написать:

$$\int\limits_{\Omega_{t+\delta}} B_{t+\delta}(z,s)B_{t+\delta}(s,\xi)dm(s)=B_{t+\delta}(z,\xi), \tag{1.7}$$

$$-\int\limits_{\Omega_t\cap\Omega_{t+\delta}} E_{t,\delta}(z,s)B_{t+\delta}(s,\xi)dm(s)=-\int\limits_{\Omega_t\cap\Omega_{t+\delta}} \lambda_{t,\delta}(z,s)B_{t+\delta}(s,\xi)dm(s)$$

$$+\int\limits_{\Omega_t\cap\Omega_{t+\delta}} \big(\lambda_{t,\delta}(z,s)-E_{t,\delta}(z,s)\big)B_{t+\delta}(s,\xi)dm(s)$$

$$=-\int\limits_{\Omega_{t+\delta}}\lambda_{t,\delta}(z,s)B_{t+\delta}(s,\xi)dm(s)+\int\limits_{\Omega_{t+\delta}\setminus\Omega_t}\lambda_{t,\delta}(z,s)B_{t+\delta}(s,\xi)dm(s)$$

$$+\int\limits_{\Omega_t\cap\Omega_{t+\delta}} \big(\lambda_{t,\delta}(z,s)-E_{t,\delta}(z,s)\big)B_{t+\delta}(s,\xi)dm(s)$$

$$=-\lambda_{t,\delta}(z,\xi)+\int\limits_{\Omega_{t+\delta}\setminus\Omega_t} \lambda_{t,\delta}(z,s)B_{t+\delta}(s,\xi)dm(s)$$

$$+\int\limits_{\Omega_t\cap\Omega_{t+\delta}} \big(\lambda_{t,\delta}(z,s)-E_{t,\delta}(z,s)\big)B_{t+\delta}(s,\xi)dm(s)$$

$$-E_{t,\delta}(z,\xi)+\big(E_{t,\delta}(z,\xi)-\lambda_{t,\delta}(z,\xi)\big)+\int\limits_{\Omega_{t+\delta}\setminus\Omega_t} \lambda_{t,\delta}(z,s)B_{t+\delta}(s,\xi)dm(s)$$

$$+\int\limits_{\Omega_t\cap\Omega_{t+\delta}} \big(\lambda_{t,\delta}(z,s)-E_{t,\delta}(z,s)\big)B_{t+\delta}(s,\xi)dm(s). \tag{1.8}$$

В соотношении (1.8) мы опять воспользовались свойством ядра $B_{t+\delta}$ в области $\Omega_{t+\delta}$ и антиголоморфностью $\lambda_{t,\delta}(z,s)$ по s.

Из предполагаемого свойства (c_z) следует, что для $s=\xi$ выполняется

$$E_{t,\delta}(z,\xi)-\lambda_{t,\delta}(z,\xi)=o(\delta),$$

а, с учетом свойств (e_z), (d_z), (c_z), находим

$$\Big|\int\limits_{\Omega_t\setminus\Omega_{t+\delta}}\lambda_{t,\delta}(z,s)B_{t+\delta}(s,\xi)dm(s)\Big|\leqslant c\int\limits_{\Omega_t\setminus\Omega_{t+\delta}}|\lambda_{t,\delta}(z,s)|\,dm(s)=o(\delta),$$

$$\Big|\int\limits_{\Omega_t\cap\Omega_{t+\delta}}\big(\lambda_{t,\delta}(z,s)-E_{t,\delta}(z,s)\big)B_{t+\delta}(z,s)dm(s)\Big|\leqslant$$

$$\leqslant c\int\limits_{\Omega_t\cap\Omega_{t+\delta}}\big|\lambda_{t,\delta}(z,s)-E_{t,\delta}(z,s)\big|dm(s)=o(\delta),$$

и поэтому (1.8) можно переписать в виде:

$$-\int\limits_{\Omega_t\cap\Omega_{t+\delta}}E_{t,\delta}(z,s)B_{t+\delta}(s,\xi)dm(s)=-E_{t,\delta}(z,\xi)+o(\delta).\tag{1.9}$$

Аналогично получим:

$$-\int\limits_{\Omega_t\cap\Omega_{t+\delta}}B_{t+\delta}(z,s)E_{t,\delta}(s,\xi)dm(s)=-E_{t,\delta}(z,\xi)+o(\delta).\tag{1.10}$$

Из предполагаемых соотношений (b_z), (b_ξ) найдем, что

$$\Big|\int\limits_{\Omega_t\cap\Omega_{t+\delta}}E_{t,\delta}(z,s)E_{t,\delta}(s,\xi)dm(s)\Big|\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt{\int\limits_{\Omega_t\cap\Omega_{t+\delta}}\big|E_{t,\delta}(z,s)\big|^2\,dm(s)}\cdot$$

$$\cdot\sqrt{\int\limits_{\Omega_t\cap\Omega_{t+\delta}}\big|E_{t,\delta}(s,\xi)\big|^2\,dm(s)}=o(\delta),\tag{1.11}$$

и потому (1.6)–(1.11) влекут

$$B_t(z,\xi)=B_{t+\delta}(z,\xi)-2E_{t,\delta}(z,\xi)-\int\limits_{\Omega_{t+\delta}\setminus\Omega_t}B_{t+\delta}(z,s)B_{t+\delta}(s,\xi)dm(s)$$

$$+\int\limits_{\Omega_t\setminus\Omega_{t+\delta}} B_t(z,s)\,B_t(s,\xi)dm(s)+o(\delta),$$

откуда, учитывая, что $B_{t+\delta}(z,\xi)-B_t(z,\xi)=E_{t,\delta}(z,\xi)$, получаем соотношение

$$E_{t,\delta}(z,\xi)=-\int\limits_{\Omega_{t+\delta}\setminus\Omega_t} B_{t+\delta}(z,s)\,B_{t+\delta}(s,\xi)\,dm(s)+$$

$$+\int\limits_{\Omega_t\setminus\Omega_{t+\delta}} B_t(z,s)\,B_t(s,\xi)\,dm(s)+o(\delta). \tag{1.12}$$

Если теперь в достаточно малой окрестности Γ_t ввести криволинейные координаты (ω,ℓ), где $\omega\in\Gamma_t$, а ℓ – длина нормали к Γ_t в точке ω, то в силу предположения (1.1) для $2n$-мерной меры Лебега dm и $2n-1$-мерной меры Лебега на Γ_t имеем $dm=(1+o(1))d\nu(\omega)d\ell$, что вместе с определением (1.2) функции $\varphi_t(\omega)$ для равномерно по δ ограниченных функций даст равенство

$$-\int\limits_{\Omega_{t+\delta}\setminus\Omega_t} F_\delta(s)\,dm(s)+\int\limits_{\Omega_t\setminus\Omega_{t+\delta}} F_\delta(s)\,dm(s)=$$

$$=-\int\limits_{\Gamma_t} d\nu(\omega)\int\limits_0^{\delta\varphi_t(\omega)} F_\delta(\omega,\ell)d\ell+o(\delta). \tag{1.13}$$

В нашем случае

$$\left.\begin{array}{ll} F_\delta(s)=B_{t+\delta}(z,s)B_{t+\delta}(s,\xi) & \text{при}\quad s\in\Omega_{t+\delta}\setminus\Omega_t \\ \text{и}\quad F_\delta(s)=B_t(z,s)\,B_t(s,\xi) & \text{при}\quad s\in\Omega_t\setminus\Omega_{t+\delta}.\end{array}\right\} \tag{1.14}$$

Вновь, используя соотношения (d_z), (d_ξ), (e_z), (e_ξ), несложно показать, что для F_δ из соотношения (1.13) выполняется

$$-\int\limits_{\Gamma_t} d\nu(\omega)\int\limits_0^{\delta\varphi_t(\omega)} F_\delta(\omega,\ell)d\ell=-\int\limits_{\Gamma_t} d\nu(\omega)\int\limits_0^{\delta\varphi_t(\omega)} F_\delta(\omega,0)d\ell=$$

$$=-\delta\int\limits_{\Gamma_t} F_\delta(\omega,0)\,\varphi_t(\omega)\,d\nu(\omega)+o(\delta)= \tag{1.15}$$

$$= -\delta \int\limits_{\Gamma_t} B_t(z,s)\, B_t(s,\xi)\, \varphi_t(s)\, d\nu(s) + o(\delta).$$

Из (1.12)–(1.15), деля на δ и переходя к пределу при $\delta \to +0$, получаем

$$\lim_{\delta\to+0} \frac{B_{t+\delta}(z,\xi) - B_t(z,\xi)}{\delta} = \lim_{\delta\to+0} \frac{E_{t,\delta}(z,\xi)}{\delta} =$$

$$= -\int\limits_{\Gamma_t} B_t(z,s)\, B_t(s,\xi)\, \varphi_t(s)\, d\nu(s),$$

что и есть требуемая формула (1.5). Теорема 1 доказана.

2. Примеры областей Ω_t.

В этой части будут приведены примеры семейств областей $\{\Omega_t\}$, для которых выполняются условия (1.1), (1.2), (a_z)–(e_z), и, следовательно, приложима теорема 1. Пусть $n \geqslant 3$, α' – мультииндекс $(\alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_j \geqslant 0$, α_j – целое, $|\alpha'| = \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$, $z = (z_1, z')$, $z' = (z_2, \ldots, z_n)$, $|z'|^{2\alpha'} = |z_2|^{2\alpha_2} \cdot \ldots \cdot |z_n|^{2\alpha_n}$, $A = \{A_{\alpha'}\}_{\alpha'}$ – произвольный конечный набор вещественных чисел, ν – некое число.

Обозначим через $\Omega(A, \nu)$ следующее множество в $\mathbb{C}^n$:

$$z \in \Omega(A,\nu) \Longleftrightarrow |z|^2 + \nu \sum_{|\alpha'|\geqslant 2} A_{\alpha'} |z'|^{2\alpha'} \leqslant 1, \tag{2.1}$$

где в суммировании в (2.1) заведомо предполагается, что оно проводится по всем различным мультииндексам α', для которых $|\alpha'| \geqslant 2$; через $\Gamma(A,\nu)$ обозначаем границу $\Omega(A,\nu)$.

Теорема 2. *Для любого конечного набора A вещественных чисел существует ν_0, зависящее только от A и от n, такое, что при $|\nu| \leqslant \nu_0$ области $\Omega_t = \Omega(A, \nu t)$ удовлетворяют условиям* (1.1), (1.2), (a_{z^0})–(e_{z^0}) *для любой точки z^0 вида $z^0 = (z_1, 0, \ldots, 0)$, $|z_1| < 1$.*

Доказательству теоремы 2 предпошлем несколько важных вспомогательных утверждений. Если $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ – произвольная ограниченная область, $\xi \in \Omega$, то обозначим через $L^2_a(\Omega)$ пространство всех голоморфных в Ω функций, принадлежащих $L^2(\Omega)$, а через $L^2_a(\Omega,\xi)$ – подпространство $L^2_a(\Omega)$, состоящее из всех тех функций f, для которых $f(\xi) = 0$.

Лемма 1. *Пространство* $L_a^2(\Omega) \ominus L_a^2(\Omega, \xi)$ *одномерно.*

Доказательство. Ясно, что разность $L_a^2(\Omega) \ominus L_a^2(\Omega,\xi)$ не нульмерна, например, $B_\Omega(z,\xi) \in L_a^2 \ominus L_a^2(\xi)$, если же $f,\, g \in L_a^2(\Omega) \ominus L_a^2(\Omega,\xi)$, можно считать, что $f(\xi) = g(\xi) = 1$, тогда $f - g \in L_a^2(\Omega,\xi)$, и поэтому $(f, f-g) = 0$, $(g, f-g) = 0$, $(f-g, f-g) = 0$, т.е. $f \equiv g$, что и требуется.

Фиксируем теперь единственную функцию $\psi_\xi \in L_a^2(\Omega) \ominus L_a^2(\Omega,\xi)$, для которой $\psi_\xi(\xi) > 0$ и $\|\psi_\xi\|_{L_a^2(\Omega)} = 1$; единственность влечет

$$\psi_\xi(z) = \frac{B_\Omega(z,\xi)}{\sqrt{B_\Omega(\xi,\xi)}}.$$

Следствие. *Для ядра Бергмана* $B_\Omega(z,\xi)$ *имеется перезапись*

$$B_\Omega(z,\xi) = \frac{B_\Omega(z,\xi)}{\sqrt{B_\Omega(\xi,\xi)}} \cdot \sqrt{B_\Omega(\xi,\xi)} = \psi_\xi(z) \cdot \psi_\xi(\xi). \tag{2.2}$$

Заметим, что удобство перезаписи (2.2) для рассмотрения ряда ситуаций, связанных с ядрами Бергмана, ранее не использовалось.

Лемма 2. *Пусть* Ω *– строго псевдовыпуклая область с* C^2*-гладкой границей, звездообразная относительно точки* $\mathbb{O}$*, задаваемая соотношением*

$$\Omega = \{z : \Phi(|z_1|, \ldots, |z_n|) \leqslant 1\},$$

точка $\xi^0 \in \Omega$ *имеет вид* $\xi^0 = (\xi_1^0, 0, \ldots, 0)$*. В таком случае*

$$\psi_{\xi^0}(z) = \varphi_{\xi_1^0}(z_1), \tag{2.3}$$

где функция $\varphi_{\xi_1^0}$ *однозначно определяется условиями* $\varphi_{\xi_1^0}(\xi_1^0) > 0$*, а также*

$$\int\limits_\Omega \varphi_{\xi_1^0}(z_1)\overline{(z_1 - \xi_1^0)^\ell}\, dm = 0, \quad \ell \geqslant 1, \tag{2.4}$$

$$\int\limits_\Omega \left|\varphi_{\xi_1^0}(z_1)\right|^2 dm = 1. \tag{2.4^1}$$

Доказательство. Из условий леммы 2 следует [2], что полиномы плотны в $L_a^2(\Omega)$, поэтому полиномы, равные нулю в ξ^0, плотны в $L_a^2(\Omega, \xi^0)$, следовательно, в силу единственности функции ψ_{ξ^0}, достаточно найти функцию h, удовлетворяющую условиям

$$\int\limits_{\Omega} h(z)\overline{(z_1-\xi_1^0)^{\alpha_1}}\,\overline{z'}^{\,\alpha'}\,dm = 0, \quad \text{если} \quad \alpha_1 + |\alpha'| \geqslant 1.$$

Если $|\alpha'| = \alpha_2 + \ldots + \alpha_n > 0$, то для любого α_1 и любой функции $h(z_1)$ имеем (полагаем $(\alpha', \theta') = \alpha_2\theta_2 + \ldots + \alpha_n\theta_n$, $d\theta' = d\theta_2 \cdot \ldots \cdot d\theta_n$):

$$\int\limits_{\Omega} h(z_1)\overline{(z_1-\xi_1^0)^{\alpha_1}}\,\overline{z'}^{\,\alpha'}\,dm = \int\limits_{\substack{\Phi(r_1,\ldots,r_n)\leqslant 1\\ r_j\geqslant 0}} r_1\ldots r_n\,dr_1\ldots dr_n\cdot$$

$$\cdot\int\limits_0^{2\pi} h(r_1\,e^{i\theta_1})\overline{(r_1\,e^{i\theta_1}-\xi_1^0)}^{\,\alpha_1}\,d\theta_1 \underbrace{\int\limits_0^{2\pi}\ldots\int\limits_0^{2\pi}}_{n-1} r'^{\,\alpha'}\,e^{i(\alpha',\theta')}\,d\theta' = 0. \qquad (2.5)$$

Из (2.5) и единственности функции ψ_{ξ^0} получаем, что соответствующая функция $\varphi_{\xi_1^0}$, получаемая после нормировки функции h, удовлетворяющей (2.4) – требуемая. Лемма 2 доказана.

Теперь, если имеется биголоморфизм $F:\Omega\to\widetilde{\Omega}$, причем $J(z)$ – якобиан отображения F, то, как известно, для $w = F(z)$, $\omega = F(\xi)$ имеем

$$B_{\widetilde{\Omega}}(w,\omega) = B_{\Omega}(z,\xi)\,J^{-1}(z)\,\overline{J^{-1}(\xi)},$$

поэтому, если $\widetilde{\psi}_\omega$ – функция, соответствующая области $\widetilde{\Omega}$, то

$$\widetilde{\psi}_\omega(w) = \frac{B_{\widetilde{\Omega}}(w,\omega)}{\sqrt{B_{\widetilde{\Omega}}(\omega,\omega)}} = \frac{B_{\Omega}(z,\xi)\,J^{-1}(z)\,\overline{J^{-1}(\xi)}}{\sqrt{B_{\Omega}(\xi,\xi)|J(\xi)|^{-2}}} = \psi_\xi(z)\cdot J^{-1}(z)\cdot\frac{|J(\xi)|}{\overline{J(\xi)}},$$

$$\psi_\xi(z) = \widetilde{\psi}_\omega(w)\,J(z)\frac{\overline{J(\xi)}}{|J(\xi)|}. \qquad (2.6)$$

Для доказательства теоремы 2, как несложно убедиться (см. замечание ниже), достаточно установить следующее утверждение:

Лемма 3. *Если функция $\varphi_{\xi_1^0}(z_1,\nu)$ определена в (2.3) для $\Omega(A,\nu)$, то существует ν_0, зависящее только от A и n, такое, что при $|\nu|\leqslant\nu_0$ она будет вещественно-аналитической функцией от ν.*

Начнем доказательство леммы 3. Число ν_0 должно будет удовлетворять нескольким соотношениям. Прежде всего, предполагаем, что при $|z'|\leqslant 1$

$$\nu_0\sum_{|\alpha'|\geqslant 2}|A_{\alpha'}|\;|z'|^{2\alpha'}\leqslant\frac{1}{2}|z'|^2. \tag{2.7}$$

Замечание. При выполнении (2.7) граница $\Gamma(A,\nu)=\{z:|z|^2+\nu\sum_{|\alpha'|\geqslant 2}A_{\alpha'}|z'|^{2\alpha'}=1\}$ содержится между поверхностями $\Gamma_+=\{|z_1|^2+\frac{3}{2}|z'|^2=1\}$ и $\Gamma_-=\{|z_1|^2+\frac{1}{2}|z'|^2=1\}$ и в любом случае при $|\nu|\leqslant\nu_0$ $\Omega(A,\nu)\subset T=\{z:|z_1|\leqslant 1\}$, поэтому для рассматриваемых ξ_1^0 и с учетом леммы 2 и формулы (2.2) в качестве $\lambda_{t,\delta}$ в соотношении (c_ξ) можно полагать $B_{t+\delta}(\xi,s)-B_t(\xi,s)$, поскольку $B_{t+\delta}$, B_t определены в цилиндре T; соотношения (a_z), (b_z), (d_z), (e_z) при рассматриваемых $\Omega(A,\nu)$ и ξ также заведомо будут следовать из вещественной аналитичности по ν функций $\varphi_{\xi_1^0}(z,\nu)$ и (2.2).

Кроме условия (2.7), предположим, что при $|\nu|\leqslant\nu_0$ и при $z\in\Omega(A,\nu)$ выполнено

$$\begin{gathered}2\sum_{j=1}^n|w_j|^2+2\nu\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n\frac{\partial^2}{\partial z_j\,\partial\overline{z}_k}\Bigl(\sum_{|\alpha'|\geqslant 2}A_{\alpha'}|z'|^{2\alpha'}\Bigr)w_j\,\overline{w}_k+\\ +\nu\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n\frac{\partial^2}{\partial z_j\,\partial z_k}\Bigl(\sum_{|\alpha'|\geqslant 2}A_{\alpha'}|z'|^{2\alpha'}\Bigr)w_j\,w_k+\\ +\nu\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n\frac{\partial^2}{\partial\overline{z}_j\,\partial\overline{z}_k}\Bigl(\sum_{|\alpha'|\geqslant 2}A_{\alpha'}|z'|^{2\alpha'}\Bigr)\overline{w}_j\,\overline{w}_k\geqslant\sum_{j=1}^n|w_j|^2.\end{gathered} \tag{2.8}$$

Условие (2.8) дает строгую геометрическую выпуклость областей $\Omega(A,\nu)$ при $|\nu|\leqslant\nu_0$. Далее, используя (2.6), можно считать, что $\xi_1^0=r$, $0\leqslant r<1$; пусть $\omega=F_r(z)$ – каноническое биголоморфное отображение, задаваемое равенствами

$$\omega_1=\frac{z_1-r}{1-rz_1},\quad \omega_k=\frac{\sqrt{1-r^2}}{1-rz_1}z_k,\quad k\geqslant 2,\quad \widetilde{\Omega}_r(A,\nu)=F_r(\Omega(A,\nu)). \tag{2.9}$$

Поскольку обратное отображение $F_r^{-1}(\omega)$ задается равенствами

$$z_1 = \frac{\omega_1 + r}{1 + r\omega_1}, \quad z_k = \frac{\sqrt{1 - r^2}}{1 + r\omega_1}\omega_k, \quad k \geqslant 2,$$

то область $\widetilde{\Omega}_r(A, \nu)$ определяется соотношением

$$\widetilde{\Omega}_r(A, \nu) = \left\{\omega : \left|\frac{\omega_1 + r}{1 + r\omega_1}\right|^2 + (1 - r^2)\sum_{j=2}^{n} \frac{|\omega_j|^2}{|1 + r\omega_1|^2} + \right.$$

$$\left. + \nu \sum_{|\alpha'| \geqslant 2} A_{\alpha'} \frac{(1 - r^2)^{|\alpha'|}|\omega'|^{2\alpha'}}{|1 + r\omega_1|^{2|\alpha'|}} \leqslant 1\right\}.$$

Функцию, описывающую область $\widetilde{\Omega}_r(A, \nu)$, можно упростить, если учесть, что $|1 + \omega_1 r|^2 - |\omega_1 + r|^2 = (1 - |\omega_1|^2)(1 - r^2)$:

$$\widetilde{\Omega}_r(A, \nu) = \left\{\omega : |\omega|^2 + \nu \sum_{|\alpha'| \geqslant 2} A_{\alpha'} \frac{(1 - r^2)^{|\alpha'| - 1}}{|1 + \omega_1 r|^{2|\alpha'| - 2}} |\omega'|^{2\alpha'} \leqslant 1\right\}. \quad (2.10)$$

В соответствии с (2.6) и тем, что $F_r(r, 0, \dots, 0) = \mathbb{O}$, достаточно доказать лемму 3 для областей $\widetilde{\Omega}_r(A, \nu)$ и для $\omega^0 = \mathbb{O}$. Не умаляя общности, обозначаем переменные, определяющие $\widetilde{\Omega}_r(A, \nu)$ в (2.10), вновь через z_j; различные постоянные, зависящие от n, будем обозначать c_n. Через $h = h_r(z_1, \nu)$ обозначим единственную функцию, принадлежащую $L_a^2(\widetilde{\Omega}_r(A, \nu)) \ominus L_a^2(\widetilde{\Omega}_r(A, \nu), \mathbb{O})$, для которой $h_r(0, \nu) = 1$; в соответствии с нормировкой (2.4^1), формулой (2.2) и результатами [3] для функции $\widetilde{\varphi}_{0,r}(z_1, \nu)$, определяемой в (2.3) для области $\widetilde{\Omega}_r(A, \nu)$ и точки $\mathbb{O}$, имеем равенство

$$\widetilde{\varphi}_{0,r}(z_1, \nu) = c_n\, h(z_1)\,(1 + O(\nu(1 - r)))\,, \quad (2.11)$$

причем, как будет следовать из дальнейших рассуждений, функция в $O(\nu(1 - r))$ окажется вещественно-аналитической от ν.

Положим

$$h_r(z_1, \nu) = h(z_1) = 1 + \sum_{m \geqslant 1}^{\infty} a_m\, z_1^m = \\ = (1 + rz_1) + \sum_{m=1}^{\infty} b_m (1 + rz_1)\, z_1^m, \quad (2.12)$$

где в (2.12) $a_m(r,\nu)$ и $b_m(r,\nu)$ обозначены для краткости через a_m и b_m; (u,v) далее означает $\int_{\widetilde{\Omega}_r(A,\nu)} u\overline{v}dm$; если f определена на $\Omega_1 \cup \Omega_2$, то $\int_{\Omega_1-\Omega_2} f\,dm = \int_{\Omega_1\setminus\Omega_2} f\,dm - \int_{\Omega_2\setminus\Omega_1} f\,dm$.

Лемма 4. *Существует ν_0, такое, что при $|\nu| \leqslant \nu_0$ для коэффициентов a_m и b_m из* (2.12) *справедливы соотношения*

$$|a_m| \leqslant c_n \cdot \nu \frac{\sqrt{1-r}}{\sqrt{m}}, \tag{2.13}$$

$$|b_m| \leqslant c_n \cdot \nu \cdot \begin{cases} \left(\log \dfrac{1}{1-r}\right)^{1/2}, & 1 \leqslant m \leqslant \dfrac{\log \frac{1}{1-r}}{1-r} \\ \dfrac{\log m}{m}, & \dfrac{\log \frac{1}{1-r}}{1-r} \leqslant m \leqslant \dfrac{\log \frac{1}{1-r}}{1-r} + \dfrac{1}{1-r} \\ \dfrac{1}{1-r}\dfrac{\log m}{m^2}, & \dfrac{\log \frac{1}{1-r}}{1-r} + \dfrac{1}{1-r} \leqslant m, \end{cases} \tag{2.14}$$

причем постоянная c_n в (2.13), (2.14) *не зависит от m, r и ν.*

Доказательство леммы 4. В соответствии с соотношениями (2.4) леммы 2, коэффициенты a_m и b_m однозначно определятся из равенств

$$\big(h(z_1), z_1^j\big) = 0, \quad j = 1, 2, \dots,$$

или

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m \left(z_1^m, z_1^j\right) = -\left(1, z_1^j\right), \quad j = 1, 2, \dots . \tag{2.15}$$

Обозначим $\varepsilon_{m,j} = (z_1^m, z_1^j)$, $\beta_j = (-1, z_1^j)$, $U = \{z : |z| \leqslant 1\}$, $S = \partial U$. Приступим к получению оценок для $\varepsilon_{m,j}$ и β_j; пусть

$$\mu(z) = \frac{\nu}{2} \sum_{|\alpha'| \geqslant 2} A_{\alpha'} \frac{(1-r^2)^{|\alpha'|-1}}{|1+rz_1|^{2|\alpha'|-2}} |z'|^{2\alpha'}.$$

Тогда при $j \geqslant 1$ имеем

$$\beta_j = -\int\limits_{\widetilde{\Omega}_r(A,\nu)} \overline{z}_1^j\,dm = -\int\limits_{\widetilde{\Omega}_r(A,\nu)-U} \overline{z}_1^j\,dm =$$

$$= \int\limits_S \overline{z}_1^j\,\mu(z)\,d\nu(z) + o\bigg(\int\limits_S |z_1|^j\,\mu^2(z)\,d\nu(z)\bigg), \tag{2.16}$$

где $d\nu(z)$ в (2.16) означает $2n-1$-мерную меру Лебега на S. Во втором слагаемом в (2.16) будет конечное число членов вида

$$c\nu^2 \int\limits_S |z_1|^j \frac{(1-r^2)^{|\alpha_2'|-1}}{|1+rz_1|^{2|\alpha_1'|-2}} \cdot \frac{(1-r^2)^{|\alpha_2'|-1}}{|1+rz_1|^{2|\alpha_2'|-2}} \cdot$$

$$\cdot |z'|^{2\alpha_1'+2\alpha_2'}\, d\nu(z), \quad |\alpha_1'| \geqslant 2, \quad |\alpha_2'| \geqslant 2. \tag{2.17}$$

Поскольку $|1+rz_1| \geqslant 1-r$, $|z'|^2 = 1-|z_1|^2 \leqslant 2|1+rz_1|$, $z \in S$, то любое выражение вида (2.17) не превосходит

$$c\nu^2 \int\limits_S |z_1|^j \frac{(1-r)^2}{|1+rz_1|^4} |z'|^8\, d\nu(z) \leqslant$$

$$\leqslant c\nu^2 \int\limits_S |z_1|^j (1-|z_1|^2)^3 \frac{1-r}{|1+rz_1|^2}\, d\nu(z) =$$

$$= c_n\nu^2 \int\limits_{|z_1|\leqslant 1} |z_1|^j (1-|z_1|^2)^{n+1} \cdot \frac{1-r}{|1+rz_1|^2} dm_2 =$$

$$= c_n\nu^2 \sum_{m=0}^{\infty} r^{2m} \cdot (1-r) \int\limits_{|z_1|\leqslant 1} |z_1|^j (1-|z_1|^2)^{n+1} \cdot |z_1|^{2m} dm_2 \leqslant$$

$$\leqslant c_n\nu^2(1-r) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(\frac{j}{2}+m)^{n+2}} \leqslant c_n\nu^2(1-r) \cdot \frac{1}{j^{n+1}}. \tag{2.18}$$

Займемся теперь первым слагаемым в (2.16), которое состоит из конечного числа членов вида

$$c\nu \int\limits_S \overline{z}_1^j \frac{(1-r^2)^{|\alpha'|-1}}{|1+rz_1|^{2|\alpha'|-2}} |z'|^{2\alpha'}\, d\nu(z), \quad |\alpha'| \geqslant 2. \tag{2.19}$$

Рассмотрим две возможности:

а) $j \leqslant \frac{1}{1-r}$; в таком случае, подобно (2.18), получим

$$|(2.19)| \leqslant c\nu \int\limits_S |z_1|^j \frac{(1-r)|z'|^4}{|1+rz_1|^2}\, d\nu =$$

$$= c\nu \int\limits_S |z_1|^j \frac{1-r}{|1+rz_1|^2} (1-|z_1|^2)^2\, d\nu(z) =$$

$$= c_n \nu \int\limits_{|z_1|\leqslant 1} |z_1|^j \frac{1-r}{|1+rz_1|^2}(1-|z_1|^2)^n\, d\nu =$$

$$= c_n \nu (1-r) \sum_{m=0}^{\infty} r^{2m} \int\limits_{|z_1|\leqslant 1} |z_1|^{j+2m}(1-|z_1|^2)^n\, dm_2 \leqslant$$

$$\leqslant c_n \nu (1-r) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(j+m)^{n+1}} \leqslant c_n \nu (1-r) \cdot \frac{1}{j^n} \leqslant$$

$$\leqslant c_n \nu (1-r)^{1/2} \cdot \frac{1}{j^{n+1/2}}. \tag{2.20}$$

б) $j > \frac{1}{1-r}$; учтем, что

$$\int\limits_S \overline{z}_1^j \frac{(1-r^2)^{|\alpha'|-1}}{|1+rz_1|^{2|\alpha'|-2}} |z'|^{2\alpha'}\, d\nu(z) =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_S \overline{z}_1^j (1-r^2)^{|\alpha'|-1} |z'|^{2\alpha'} \left(\frac{1}{|1+rz_1|^{2|\alpha'|-2}} - \frac{1}{|1+rz_1 e^{\frac{\pi i}{j}}|^{2|\alpha|-2}} \right) d\nu,$$

положим $z_1 = \rho e^{i\theta}$, $\frac{\pi}{j} = \gamma$, $|\alpha'| - 1 = \ell \geqslant 1$; тогда

$$\frac{1}{|1+rz_1|^{2\ell}} - \frac{1}{|1+rz_1\, e^{i\gamma}|^{2\ell}} =$$

$$= \frac{1}{(1+2r\rho\cos\theta + r^2\rho^2)^\ell} - \frac{1}{(1+2r\rho\cos(\theta+\gamma)+r^2\rho^2)^\ell} =$$

$$= -\int\limits_\theta^{\theta+\gamma} \frac{\partial}{\partial\lambda} \frac{1}{(1+2r\rho\cos\lambda + r^2\rho^2)^\ell} d\lambda =$$

$$= -\int\limits_\theta^{\theta+\gamma} \frac{2r\rho\ell\sin\lambda}{(1+2r\rho\cos\lambda + r^2\rho^2)^{\ell+1}} d\lambda$$

и

$$\left| \frac{1}{2} \int\limits_S \overline{z}_j (1-r^2)^\ell |z'|^{2\alpha'} \left(\frac{1}{|1+rz_1|^{2\ell}} - \frac{1}{|1+rz_1 e^{i\gamma}|^{2\ell}} \right) d\nu \right| \leqslant$$

$$\leqslant r\ell \int\limits_S |z_1|^{j+1}(1-r^2)^\ell(1-|z_1|^2)^{\ell+1}\left(\int\limits_\theta^{\theta+\gamma}\frac{|\sin\lambda|}{(1+2r\rho\cos\lambda+r^2\rho^2)^{\ell+1}}d\lambda\right)d\nu(z)$$

$$= c_n\cdot r\ell \int\limits_{|z_1|\leqslant 1} |z_1|^{j+1}(1-r^2)^\ell(1-|z_1|^2)^{\ell+1}(1-|z_1|^2)^{n-2}\cdot$$

$$\cdot\left(\int\limits_\theta^{\theta+\gamma}\frac{|\sin\lambda|d\lambda}{(1+2r\rho\cos\lambda+r^2\rho^2)^{\ell+1}}\right)dm =$$

$$= c_n\, r\ell\int\limits_0^1\rho^{j+1}(1-r^2)^\ell(1-\rho^2)^{n+\ell-1}\rho\, d\rho\cdot$$

$$\cdot\left(\int\limits_0^{2\pi}d\theta\int\limits_\theta^{\theta+\gamma}\frac{|\sin\lambda|d\lambda}{(1+2r\rho\cos\lambda+r^2\rho^2)^{\ell+1}}\right). \qquad (2.21)$$

Заметим, что для 2π-периодический $h(\theta)$

$$\int\limits_0^{2\pi}d\theta\int\limits_\theta^{\theta+\gamma}h(\lambda)d\lambda=\gamma\int\limits_0^{2\pi}h(\lambda)d\lambda,$$

поэтому правая часть в (2.21) равна

$$c_n\, r\ell\gamma\int\limits_0^1\rho^{j+2}(1-r^2)^\ell(1-\rho^2)^{n+\ell-1}\,d\rho\left(\int\limits_0^{2\pi}\frac{|\sin\lambda|d\lambda}{(1+2r\rho\cos\lambda+r^2\rho^2)^{\ell+1}}\right)\leqslant$$

$$\leqslant c_n\,\gamma\int\limits_0^1\rho^{j+2}(1-r)(1-\rho^2)^n\,d\rho\left(\int\limits_0^{2\pi}\frac{|\sin\lambda|d\lambda}{(1+2r\rho\cos\lambda+r^2\rho^2)^2}\right). \quad (2.22)$$

Поскольку

$$1+2r\rho\cos\lambda+r^2\rho^2=(1-\rho r)^2+4r\rho\cos^2\frac{\lambda}{2},\quad \sin\lambda=2\sin\frac{\lambda}{2}\,\cos\frac{\lambda}{2},$$

то

$$\frac{\sqrt{1-r}|\sin\lambda|}{(1+2r\rho\cos\lambda+r^2\rho^2)^{3/4}}\leqslant c$$

и

$$(2.22) \leqslant c_n \frac{1}{j}(1-r)^{1/2} \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} \rho^{j+2}(1-\rho^2)^n \frac{1}{(1+2r\rho\cos\lambda + r^2\rho^2)^{5/4}}\, d\rho\, d\lambda$$

$$= c_n \cdot \frac{1}{j}(1-r)^{1/2} \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} \rho^{j+2}(1-\rho^2)^n \frac{d\rho\, d\lambda}{|1+r\rho e^{i\lambda}|^{5/2}}. \qquad (2.23)$$

Заметим далее, что при $\alpha > 0$ имеется разложение

$$\frac{1}{(1+\xi)^\alpha} = 1 + \sum_{m=0}^{\infty} c_{m,\alpha}\, \xi^m, \quad |\xi| < 1 \quad \text{и} \quad |c_{m,\alpha}| \asymp m^{\alpha-1},$$

и

$$\frac{1}{|1+\xi|^{5/2}} = \frac{1}{(1+\xi)^{5/4}} \cdot \frac{1}{(1+\bar{\xi})^{5/4}},$$

поэтому

$$(2.23) \leqslant c_n \cdot \frac{1}{j}(1-r)^{1/2} \sum_{m=0}^{\infty} c^2_{m,5/4} \cdot \int\limits_0^1 \rho^{j+2}\, r^{2m}\, \rho^{2m}(1-\rho^2)^n\, d\rho \leqslant$$

$$\leqslant c_n \cdot \frac{1}{j}(1-r)^{1/2} \sum_{m=0}^{\infty} (m+1)^{1/2} \cdot \frac{1}{(m+j)^{n+1}} \leqslant c_n (1-r)^{1/2} \cdot \frac{1}{j^{n+1/2}}. \qquad (2.24)$$

Учитывая еще множитель ν, без которого проводились оценки (2.21)–(2.24), из (2.18)–(2.24) заключаем, что

$$|\beta_j| \leqslant c_n \cdot \nu \cdot (1-r)^{1/2} \cdot \frac{1}{j^{n+1/2}}. \qquad (2.25)$$

Рассуждая совершенно аналогично (2.18)–(2.25), но не выделяя множитель $\sqrt{1-r}$, для коэффициентов $\varepsilon_{m,j}$, определенных в (2.15), получим

$$\varepsilon_{m,m} \asymp \int\limits_U |z_1|^{2m} dm(z) =$$

$$= c_n \int\limits_{|z_1| \leqslant 1} |z_1|^{2m}(1-|z_1|^2)^{n-1}\, dm_2(z_1) = \frac{c_n}{m^n}, \qquad (2.26)$$

$$|\varepsilon_{m,j}| \leqslant c_n \cdot \nu(1-r) \cdot \frac{1}{(j+m)^n}, \quad |m-j| \leqslant \frac{1}{1-r}, \tag{2.27}$$

$$|\varepsilon_{m,j}| \leqslant c_n \cdot \nu \cdot \frac{1}{|m-j|} \cdot \frac{1}{(j+m)^n}, \quad |m-j| > \frac{1}{1-r}. \tag{2.28}$$

Кроме того, чуть более длинные оценки позволяют убедиться, что β_j, $\varepsilon_{m,j}$ – вещественно-аналитические функции от ν, радиус сходимости для рядов в которых $\geqslant \nu_1 > 0$.

Закончим доказательство соотношений (2.13) леммы 4. Перепишем систему (2.15), каждое уравнение в которой поделим на коэффициент $\varepsilon_{m,m}$. В соответствии с (2.25)–(2.27), получим систему

$$\sum_{m=1}^{\infty} b_{mj}\, a_m = t_j, \quad j = 1, \dots, \tag{2.29}$$

причем

$$\left.\begin{aligned} & b_{mm} = 1, \\ & |b_{mj}| \leqslant c_n \nu (1-r) \left(\frac{m}{m+j}\right)^n, \quad |m-j| \leqslant \frac{1}{1-r}, \\ & |b_{mj}| \leqslant c_n \nu \cdot \frac{1}{|m-j|} \left(\frac{m}{m+j}\right)^n, \quad |m-j| > \frac{1}{1-r}, \\ & |t_j| \leqslant c_n \frac{\sqrt{1-r}}{\sqrt{j}}. \end{aligned}\right\} \tag{2.30}$$

Если ввести естественные обозначения для оператора в (2.29), для $A = (a_1, \dots)$, $T = (t_1, \dots)$ имеем

$$(E+B)A = T,$$

тогда, если положить

$$A = T + \sum_{k=1}^{\infty} Y_k, \quad Y_1 = -BT, \quad Y_{k+1} = -BY_k, \tag{2.31}$$

то несложные действия с оценками (2.30) дают при $|\nu| \leqslant \nu_0$ сходимость ряда в (2.31) и требуемые неравенства (2.13).

Доказательство (2.14) проводится по той же схеме; прежде всего

$$1 + \sum_{m=1}^{\infty} b_m z^m = (1 + r z_1)^{-1} \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m z^m\right),$$

поэтому

$$b_m = a_m + \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^k\, r^k\, a_{m-k} + (-1)^m\, r^m, \quad |b_m| \leqslant \sum_{k=1}^{m} |a_k| + 1$$

и при $m \leqslant \frac{2}{1-r} \log \frac{1}{1-r}$ из (2.13) получаем

$$|b_m| \leqslant c_n \cdot \sqrt{\log \frac{1}{1-r}}. \tag{2.32}$$

Положим $m_0 = \left[\frac{2}{1-r} \log \frac{1}{1-r}\right]$. При $j \geqslant m_0 + 1, \ldots$ имеются соотношения

$$\sum_{k=m_0+1}^{\infty} b_k \left((1+rz_1)z_1^k, z_1^j\right) =$$

$$= \left(-\left[(1+rz_1) + \sum_{k=1}^{m_0} (1+rz_1) z_1^k\, b_k\right], z_1^j \right). \tag{2.33}$$

Если положим

$$\gamma_\ell = \int_U |z_1|^{2\ell}\, dm,$$

то, аналогично (2.20)–(2.24), получается, что

$$\left((1+rz_1)z_1^k, z_1^k\right) = \left(z_1^k, z_1^k\right) + r\left(z_1^{k+1}, z_1^k\right) =$$

$$= \int_U |z_1|^{2k} dm + \int_{\widetilde{\Omega}_r(A,\nu)-U} |z_1|^{2k} dm + r \int_{\widetilde{\Omega}_r(A,\nu)-U} z_1 |z_1|^{2k} dm \geqslant$$

$$\geqslant \gamma_k - c_n \cdot \nu(1-r) \frac{1}{k^n}, \tag{2.34}$$

$$\left((1+rz_1)z_1^k, z_1^{k+1}\right) = r \int_U |z_1|^{2k+2} dm + r \int_{\widetilde{\Omega}_r(A,\nu)-U} |z_1|^{2k+2} dm +$$

$$+ r \int_{\widetilde{\Omega}_r(A,\nu)-U} \overline{z}_1 |z_1|^{2k} dm \leqslant r\gamma_k + c_n \cdot \nu(1-r) \frac{1}{k^n}, \tag{2.35}$$

поэтому при $k \geqslant \frac{2}{1-r}$ и $|\nu| \leqslant \nu_2$ имеем, учитывая (2.26):

$$\left|\left((1+rz_1)z_1^k, z_1^k\right)\right| - \left|\left((1+rz_1)z_1^k, z_1^{k+1}\right)\right| \geqslant \frac{1}{2}(1-r)\gamma_k. \tag{2.36}$$

Если же $j \geqslant k+2$ или $j < k$, то

$$\left|\Big((1+rz_1)z_1^k, z_1^j\Big)\right| = \left|\int\limits_{\widetilde{\Omega}_r(A,\nu)-U} (1+rz_1)z_1^k \cdot \overline{z}_1^j\, dm\right| \leqslant$$

$$\leqslant c_n \cdot \nu \begin{cases} (1-r)\dfrac{\log(k+j)}{(k+j)^{n+1}}, & |k-j| \leqslant \dfrac{1}{1-r} \\ \dfrac{1}{|k-j|}\dfrac{\log(k+j)}{(k+j)^{n+1}}, & |k-j| > \dfrac{1}{1-r}, \end{cases} \tag{2.37}$$

после чего, деля каждую строку в (2.33) на $((1+rz_1)z_1^j, z_1^j)$, получаем систему

$$\sum_{k=m_0+1}^{\infty} p_{kj}\, b_k = q_j, \tag{2.38}$$

причем

$$p_{kk} = 1, \quad |p_{k\,k+1}| \leqslant 1 - \frac{1}{2}(1-r),$$

$$q_j \leqslant c_n \cdot \nu \begin{cases} (1-r)\dfrac{\log(j+m_0)}{j+m}, & m_0 < j \leqslant m_0 + \dfrac{1}{1-r} \\ \dfrac{1}{(j-m_0)}\dfrac{\log(j+m_0)}{j+m_0}, & m_0 + \dfrac{1}{1-r} < j, \end{cases}$$

$$p_{kj} \leqslant c_n \cdot \nu \begin{cases} (1-r)\dfrac{\log(k+j)}{k+j}, & |k-j| \leqslant \dfrac{1}{1-r} \\ \dfrac{1}{|k-j|}\dfrac{\log(k+j)}{k+j}, & |k+j| > \dfrac{1}{1-r}. \end{cases}$$

Поскольку при $k \geqslant \frac{\log\frac{1}{1-r}}{1-r}$ имеем $\frac{\log k}{k} \leqslant c(1-r)$, то при $|\nu| \leqslant \nu_3$ итеративное решение системы (2.38), подобное (2.31), дает требуемые соотношения (2.14). Лемма 4 доказана.

Теперь утверждение леммы 3, а с ней и теоремы 2, следует из леммы 4 и того, что все соответствующие функции от ν, фигурирующие в соотношениях (2.15)–(2.39), имеют радиус сходимости больше некоторого ν_1, зависящего только от A и n.

3. Пример приложения теорем 1 и 2.

Скрупулезное проведение нижеследующих рассуждений требует оценок, аналогичных приведенным в п. 2, которые для краткости пропустим.

Нас будет интересовать вид разности

$$B_{\Omega(A,\nu)}(z,z)-B_U(z,z)$$

при $z=(r,0,\ldots,0)$ и $|\nu|\leqslant\nu_0$, для чего, в силу свойств ядер Бергмана, достаточно рассмотреть

$$B_{\widetilde{\Omega}_r(A,\nu)}(\mathbb{O},\mathbb{O})-B_U(\mathbb{O},\mathbb{O})=(1-r^2)^{n+1}\left(B_{\Omega(A,\nu)}(z,z)-B_U(z,z)\right).$$

Пусть $\sigma_n=B_U(\mathbb{O},\mathbb{O})$; определим области

$$\Xi_t=\widetilde{\Omega}_r(A,t\nu),\quad \Gamma_t=\partial\Xi_t,\quad B_t=B_{\widetilde{\Omega}_r(A,\nu t)},$$

тогда $\Xi_0=U$, $\Xi_1=\widetilde{\Omega}_r(A,\nu)$ и применение формулы (1.4), что возможно по теореме 2, дает соотношение

$$B_{\widetilde{\Omega}_r(A,\nu)}(\mathbb{O},\mathbb{O})=$$

$$=B_1(\mathbb{O},\mathbb{O})=B_0(\mathbb{O},\mathbb{O})-\int_0^1 dt\int_{\Gamma_t}|B_t(\mathbb{O},\xi)|^2\varphi_t(\xi)d\nu(\xi), \tag{3.1}$$

причем в нашем случае

$$\varphi_t(\xi)=-\frac{\nu t}{2}\sum_{|\alpha'|\geqslant 2}\frac{(1-r^2)^{|\alpha'|-1}}{|1+r\xi_1|^{2|\alpha'|-2}}|\xi'|^{2\alpha'}+O\left(\nu^2t^2(1-r)^2\right).$$

Применяя к (3.1) оценки (2.13) и аналогичные им, можно обнаружить, что при $0\leqslant t\leqslant 1$

$$\int_{\Gamma_t}\left|B_t(\mathbb{O},\xi)\right|^2\varphi_t(\xi)d\nu(\xi)=\int_{\partial U}\left|B_t(\mathbb{O},\xi)\right|^2\varphi_t(\xi)d\nu(\xi)+O(\nu(1-r)^2)=$$

$$=\int_{\partial U}\left|B_U(\mathbb{O},\xi)\right|^2\varphi_t(\xi)d\nu(\xi)+O(\nu(1-r)^2)=$$

$$=-\frac{\sigma_n^2\nu t}{2}\int_{\partial U}\sum_{|\alpha'|=2}A_{\alpha'}\frac{1-r^2}{|1+r\xi_1|^2}|\xi'|^{2\alpha'}d\nu(\xi)+O(\nu(1-r)^2). \tag{3.2}$$

Из (3.1) и (3.2) находим:

$$B_{\widetilde{\Omega}_r(A,\nu)}(\mathbb{O},\mathbb{O})=$$

$$= \sigma_n + \frac{\sigma_n^2}{4}\nu(1-r^2)\sum_{|\alpha'|=2} A_{\alpha'} \int\limits_{\partial U} \frac{|\xi'|^{2\alpha'}}{|1+r\xi_1|^2}\, d\nu(\xi) + O(\nu(1-r)^2). \quad (3.3)$$

Поскольку $n \geqslant 3$, то в интегралах, фигурирующих в (3.3), имеются две возможности, которые дают разные значения: $\alpha' = (1,1,0,\dots,0)$ и $\alpha' = (2,0,\dots,0)$. Вычислим эти интегралы.

Имеем

$$\int\limits_{\partial U} \frac{|\xi_2|^4}{|1+r\xi_1|^2}\, d\nu(\xi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} r^{2\ell} \int\limits_{\partial U} |\xi_1|^{2\ell}\, |\xi_2|^4\, d\nu(\xi), \quad (3.4)$$

при этом

$$\int\limits_{\partial U} |\xi_1|^{2\ell}\, |\xi_2|^4\, d\nu(\xi) = 2(n+\ell+2) \int\limits_{U} |\xi_1|^{2\ell}\, |\xi_2|^4\, dm$$

и

$$\int\limits_{U} |\xi_1|^{2\ell}\, |\xi_2|^4\, dm = (2\pi)^n \int\limits_{\substack{r_1^2+\dots+r_n^2\leqslant 1\\ r_j\geqslant 0}} r_1^{2\ell}\, r_2^4\, r_1 \cdot \ldots \cdot r_n\, dr_1 \dots dr_n =$$

$$= \pi^n \int\limits_{\substack{x_1+\dots+x_n\leqslant 1\\ x_j\geqslant 0}} x_1^{\ell}\, x_2^2\, dx_1 \cdot \ldots \cdot dx_n = \frac{2\pi^n\, \ell!}{(\ell+n+2)!} \quad (3.5)$$

(в (3.5) использовалось значение интеграла Дирихле [4, гл. 12]), поэтому

$$\int\limits_{\partial U} |\xi_1|^{2\ell}\, |\xi_2|^4\, d\nu(\xi) = \frac{4\pi^n}{(\ell+1)\cdot\ldots\cdot(\ell+n+1)}$$

и

$$(3.4) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{4\pi^n}{(\ell+1)\cdot\ldots\cdot(\ell+n+1)} + O(1-r),$$

причем, если

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{(\ell+1)\cdot\ldots\cdot(\ell+n+1)} = g(1),$$

где

$$g(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{x^{\ell+n+1}}{(\ell+1)\cdot\ldots\cdot(\ell+n+1)} = I^{n+1}\left(\sum_{\ell=0}^{\infty} x^{\ell}\right) = I^{n+1}\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

и $Ih(x)=\int\limits_0^x h(t)dt$, то

$$I^{n+1}h(x)=\frac{1}{n!}\int\limits_0^x (x-t)^n\, h(t)dt,$$

т.е.

$$g(1)=I^{n+1}\left(\frac{1}{1-x}\right)\Big|_{x=1}=\frac{1}{n!}\int\limits_0^1 (1-t)^n\cdot\frac{1}{1-t}dt=\frac{1}{n\cdot n!},$$

$$\int\limits_{\partial U}\frac{|\xi_2|^4}{|1+r\xi_1|^2}\,d\nu(\xi)=\frac{4\pi^n}{n\cdot n!}+O(1-r). \tag{3.6}$$

Вычислим теперь интеграл, соответствующий мультииндексу $(1,1,0,\dots,0)$. Аналогично (3.4) пишем

$$\int\limits_{\partial U}\frac{|\xi_2|^2|\xi_3|^2}{|1+r\xi_1|^2}\,d\nu(\xi)=\sum_{\ell=0}^{\infty}r^{2\ell}\int\limits_{\partial U}|\xi_1|^{2\ell}|\xi_2|^2|\xi_3|^2\,d\nu(\xi),$$

$$\int\limits_{\partial U}|\xi_1|^{2\ell}|\xi_2|^2|\xi_3|^2\,d\nu(\xi)=2(n+\ell+2)\int\limits_{U}|\xi_1|^{2\ell}|\xi_2|^2|\xi_3|^2\,dm,$$

$$\int\limits_{U}|\xi_1|^{2\ell}|\xi_2|^2|\xi_3|^2\,dm=(2\pi)^n\int\limits_{\substack{r_1^2+\ldots+r_n^2\leqslant 1\\ r_j\geqslant 0}} r_1^{2\ell}\,r_2^2\,r_3^2\,r_1\,r_2\cdot\ldots\cdot r_n\,dr_1\ldots dr_n=$$

$$=\pi^n\int\limits_{\substack{x_1+\ldots+x_n\leqslant 1\\ x_j\geqslant 0}} x_1^{\ell}\,x_2\,x_3\,dx_1\cdot\ldots\cdot dx_n=\frac{2\pi^n\,\ell!}{(\ell+n+2)!}, \tag{3.7}$$

причем в (3.7) опять использовалось значение интеграла Дирихле ([4, гл. 12]).

Сравнивая полученный результат с (3.5), сразу находим

$$\int\limits_{\partial U}\frac{|\xi_2|^2|\xi_3|^2}{|1+r\xi_1|^2}\,d\nu(\xi)=\frac{2\pi^n}{n\cdot n!}+O(1-r). \tag{3.8}$$

Если же учесть, что $\sigma_n^2 = \frac{n!}{\pi^n}$, то из (3.3), (3.6) и (3.8) окончательно при $|\nu| \leqslant \nu_0$ и $r \to 1$, получим

$$B_{\widetilde{\Omega}_r(A,\nu)}(\mathbb{O},\mathbb{O}) = B_U(\mathbb{O},\mathbb{O}) + \frac{\nu(1-r^2)}{2n} \sum_{\substack{p,q\geqslant 2\\ p\neq q}} A_{pq\overline{pq}} +$$

$$+\frac{\nu(1-r^2)}{n} \sum_{p\geqslant 2} A_{pp\overline{pp}} + O(\nu(1-r)^2),$$

где $A_{pq\overline{pq}}$ – коэффициенты при $|z_p|^2|z_q|^2$, $A_{pp\overline{pp}}$ – коэффициенты при $|z_p|^4$. Полученный результат интересно сравнить с утверждением Кристофферса [1, гл. 12].

Литература

1. М. Билз, Ч. Фефферман, Р. Гросман, *Строго псевдовыпуклые области в* $\mathbb{C}^n$. Мир, Москва (1987).
2. Н. А. Широков, *Теорема Джексона–Бернштейна в строго псевдовыпуклых областях в* $\mathbb{C}^n$. — ДАН СССР **287, No. 1,** (1986), 66–69.
3. Н. А. Широков, *Ядро Бергмана в окрестности диагонали для областей, близких к эллипсоидам.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **190** (1991), 163–172.
4. Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон, *Курс современного анализа, Т. 2.* Гос. изд. физ-мат. лит., Москва (1963).

Shirokov N. A. A variational formula for Bergman kernels.

For a given family of domains $\Omega_t \subset \mathbb{C}^n$, $t \in [0,1]$, under some assumptions a formula for $B_1(z,s) - B_0(z,s)$ is established, where B_0 and B_1 are the Bergman kernels for Ω_0 and Ω_1. As an application of this formula, we obtain two terms in the asymptotics of $B(z,z)$ as $z \to \partial\Omega$ for a special class of domains.

С.-Петербургский государственный
электротехнический университет
kam@kam.spb.su

Поступило 17 декабря 1997 г.