Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 255, 1998 г.

**О. В. Ярославцева**

# О МУЛЬТИПЛИКАТОРАХ В НЕКОТОРЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Пусть $U^n = \{z = (z_1, \dots, z_n) : |z_j| < 1,\ j = \overline{1,n}\}$ – единичный полидиск в $n$-мерном комплексном пространстве $C^n$, $T^n$ – его остов, $\vec{p} = (p_1, \dots, p_n)$, $\vec{\omega}(t) = (\omega_1(t), \dots, \omega_n(t))$, где $0 < p_j < 1$, $\omega_j(t)$ – положительные медленно изменяющиеся функции на $(0,1]$, $j = \overline{1,n}$. Обозначим через $H^{\vec{p}}(\vec{\omega})$ пространство голоморфных в $U^n$ функций $f$, для которых

$$\|f\|_{H^{\vec{p}}(\vec{\omega})} =$$
$$= \Bigg( \int\limits_U \omega_n\,(1-|\zeta_n|) \Bigg( \int\limits_U \omega_{n-1}\,(1-|\zeta_{n-1}|) \dots \Bigg( \int\limits_U |f(\zeta_1, \dots, \zeta_n)|^{p_1} \times$$
$$\times \omega_1\,(1-|\zeta_1|)\ dm_2(\zeta_1) \Bigg)^{\frac{p_2}{p_1}} \dots dm_2(\zeta_{n-1}) \Bigg)^{\frac{p_n}{p_{n-1}}} dm_2(\zeta_n) \Bigg)^{\frac{1}{p_n}} < +\infty, \quad (1)$$

где $dm_2$ – 2-мерная мера Лебега на $U$. Пусть $H^{\vec{p}}(\vec{\alpha}) = H^{\vec{p}}(\vec{\omega})$ при $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_j > -1$, $\omega_j(t) = t^{\alpha_j}$, $j = \overline{1,n}$. Через $l_A^{\vec{p}}$ обозначим пространство функций $g$, для которых

$$\|g\|_{l_A^{\vec{p}}} =$$
$$= \Bigg( \sum_{k_n=0}^{\infty} \cdots \Bigg( \sum_{k_2=0}^{\infty} \Bigg( \sum_{k_1=0}^{\infty} |b_{k_1,\dots,k_n}|^{p_1} \Bigg)^{p_2/p_1} \Bigg)^{p_3/p_2} \cdots \Bigg)^{1/p_n} < +\infty, \qquad (2)$$

где $g(z_1, \dots, z_n) = \sum\limits_{k_1,\dots,k_n=0}^{\infty} b_{k_1,\dots,k_n}\, z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n}$.

В статье П. Дюрена и А. Шильдса [1] описываются мультипликаторы при $n = 1$ из пространств Харди $H^p$, $0 < p < 1$, в $l_A^q$, $p \leqslant q \leqslant \infty$, и из $H^1$ в $l_A^1$ и в $l_A^2$ (см. также [2]). Аналогичные результаты в случае $n = 2$ получены в работе Д. Оберлина [3]. В статье М. Гварадзе [4] рассматриваются мультипликаторы в пространствах $B_n(p,q,\lambda)$, $0<p<q\leqslant\infty$, $0<\lambda\leqslant\infty$, где $B_n(p,q,\lambda)$ – пространство аналитических функций $f$ в $U^n$, для которых

$$\|f\|_{B_n(p,q,\lambda)}=\left\{\int\limits_{I^n}(1-r)^{\lambda(1/p-1/q)-1}\,M_q^\lambda(r,f)\,dr\right\}^{1/\lambda}<\infty, \qquad (3)$$

$$M_q(r,f)=\left\{\int\limits_{T^n}|f(rw)|^q\,dm_n(w)\right\}^{1/q},$$

$$M_\infty(r,f)=\sup_{w\in T^n}|f(rw)|, \quad I^n=[0,1)^n,$$

$$dm_n(w)=(2\pi)^{-n}\,d\theta_1\dots d\theta_n, \quad w\in T^n, \quad w_j=e^{i\theta_j},$$

$$j=\overline{1,n}, \quad (1-r)^\alpha=\prod_{j=1}^n(1-r_j)^\alpha, \quad r\in I^n.$$

В данной статье описываются мультипликаторы вида $\lambda_{k_1,\dots,k_n}=\prod\limits_{j=1}^n\lambda_{k_j}$ из $H^{\vec p}(\vec\alpha)$ в $l_A^{\vec p}$. Для формулировки основного результата статьи введем следующие обозначения. Через $S$ обозначим множество измеримых функций $\omega$ на промежутке $(0,1]$, удовлетворяющих следующим свойствам:

а) $\omega(t)>0$, $t\in(0,1]$;

б) существуют положительные числа $q_\omega$, $m_\omega\in(0,1)$, $M_\omega>0$ такие, что

$$m_\omega\leqslant\frac{\omega(\lambda r)}{\omega(r)}\leqslant M_\omega, \quad r\in(0,1], \quad \lambda\in[q_\omega,1].$$

Учитывая результаты работы [6], можно установить, что $\omega\in S$ тогда и только тогда, когда существуют ограниченные измеримые функции $\eta$, $\varepsilon$ на $(0,1]$ такие, что

$$\omega(x)=\exp\left\{\eta(x)+\int\limits_x^1\frac{\varepsilon(u)}{u}\,du\right\}, \quad x\in(0,1],$$

при этом

$$\frac{\ln m_\omega}{\ln\frac{1}{q_\omega}}\leqslant\varepsilon(u)\leqslant\frac{\ln M_\omega}{\ln\frac{1}{q_\omega}}, \quad u\in(0,1], \quad \alpha_\omega=\frac{\ln m_\omega}{\ln\frac{1}{q_\omega}}, \quad \beta_\omega=\frac{\ln M_\omega}{\ln\frac{1}{q_\omega}}.$$

Не ограничивая общности, можно предполагать, что $\eta(x)\equiv 0$. Пусть, кроме того, $0<\beta_\omega<1$. Основным результатом заметки являются теоремы 1 и 2.

**Теорема 1.** *Пусть* $\vec{p} = (p_1, \dots, p_n)$, $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $0 < p_j \leqslant 1$, $\alpha_j < p_j$, $\alpha_j > -1$, $j = \overline{1, n}$, $\lambda_{k_1, \dots, k_n} = \prod\limits_{j=1}^{n} \lambda_{k_j}$. *Семейство* $\{\lambda_{k_1, \dots, k_n}\}$ *является мультипликатором из* $H^{\vec{p}}(\vec{\alpha})$ *в* $l_A^{\vec{p}}$ *тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{k_n^*=0}^{m_n} \dots \left( \sum_{k_2^*=0}^{m_2} \left( \sum_{k_1^*=0}^{m_1} \left|\lambda_{k_1, \dots, k_n}\right|^{p_1} (k_1^*)^2 \right)^{p_2/p_1} (k_2^*)^2 \right)^{p_3/p_2} \dots (k_n^*)^2 =$$

$$= O\left( m_1^{(p_1-\alpha_1)p_n/p_1}\, m_2^{(p_2-\alpha_2)p_n/p_2} \dots m_n^{(p_n-\alpha_n)} \right). \qquad (4)$$

*Здесь*

$$k_j^* = \begin{cases} k_j, & k_j \neq 0, \\ 1, & k_j = 0, \end{cases} \qquad j = \overline{1, n}.$$

Доказательство необходимости проводится обычным способом. Для доказательства достаточности используются следующие утверждения.

**Лемма 1.** *Пусть* $\vec{p} = (p_1, \dots, p_n)$, $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $0 < p_j \leqslant 1$, $\alpha_j < p_j$, $\alpha_j > -1$, $j = \overline{1, n}$, $\lambda_{k_1, \dots, k_n} = \prod\limits_{j=1}^{n} \lambda_{k_j}$. *Тогда из условия*

$$\sum_{k_n^*=0}^{m_n} \dots \left( \sum_{k_2^*=0}^{m_2} \left( \sum_{k_1^*=0}^{m_1} \left|\lambda_{k_1, \dots, k_n}\right|^{p_1} (k_1^*)^2 \right)^{p_2/p_1} (k_2^*)^2 \right)^{p_3/p_2} \dots (k_n^*)^2 \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \left( m_1^{(p_1-\alpha_1)p_n/p_1}\, m_2^{(p_2-\alpha_2)p_n/p_2} \dots m_n^{(p_n-\alpha_n)} \right) \qquad (5)$$

*следует, что*

$$\sum_{k_j=m_j}^{\infty} \left|\lambda_{k_j}\right|^{p_j} \leqslant C_2\, m_j^{p_j-\alpha_j-2}, \quad j = \overline{1, n}. \qquad (6)$$

**Лемма 2.** *Пусть* $f \in H^{\vec{p}}(\vec{\alpha})$, $\vec{p} = (p_1, \dots, p_n)$, $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $0 < p_j \leqslant 1$, $\gamma_j = \alpha_j + 2 - p_j$, $j = \overline{1, n}$. *Тогда*

$$\int_0^1 (1 - r_n)^{\gamma_n - 1} \times$$

$$\times \left( \dots \left( \int_0^1 (1 - r_1)^{\gamma_1 - 1}\, M_1^{p_1}(r_1, \dots, r_n, f) r_1\, dr_1 \right)^{p_2/p_1} \dots \right)^{p_n/p_{n-1}} \times$$

$$\times r_n\, dr_n < \infty, \qquad (7)$$

*где*

$$M_1(r_1,\ldots,r_n,f)=$$
$$=\int_{-\pi}^{\pi}\ldots\int_{-\pi}^{\pi}\left|f\left(r_1\,e^{i\varphi_1},\ldots,r_n\,e^{i\varphi_n}\right)\right|\,d\varphi_1\ldots d\varphi_n. \quad (8)$$

Отмечу, что аналогичные результаты при некоторых ограничениях на $\vec{\omega}$ получены для мультипликаторов из $H^{\vec{p}}(\vec{\omega})$ в $l^{\vec{p}}_A$. Как следствие теоремы 1 можно получить результат, установленный С. В. Шведенко в [7].

**Следствие.** *Если*

$$f(z_1,\ldots,z_n)=\sum_{k_1,\ldots,k_n=0}^{\infty}a_{k_1,\ldots,k_n}\,z_1^{k_1}\ldots z_n^{k_n}$$

*принадлежит классу* $A^{\vec{p}}_{\vec{\alpha}}$, *то*

$$\sum_{k_1,\ldots,k_n=0}^{\infty}\frac{|a_{k_1,\ldots,k_n}|^p}{(k_1+1)^{\alpha_1+3-p}\ldots(k_n+1)^{\alpha_n+3-p}}\leqslant c\|f\|_{A^{\vec{p}}_{\vec{\alpha}}}.$$

**Теорема 2.** *Пусть* $\vec{p}=(p_1,\ldots,p_n)$, $\vec{\omega}=(\omega_1,\ldots,\omega_n)$, $0<p_j\leqslant 1$, $\omega_j\in S$, $j=\overline{1,n}$. *Семейство* $\{\lambda_{k_1,\ldots,k_n}\}$ *является мультипликатором из* $H^{\vec{p}}(\vec{\omega})$ *в* $l^\infty$ *тогда и только тогда, когда*

$$\lambda_{k_1,\ldots,k_n}=O\left(k_1^{1-\frac{2}{p_1}}\ldots k_n^{1-\frac{2}{p_n}}\,[\omega_1(1/k_1)]^{1/p_1}\ldots[\omega_n(1/k_n)]^{1/p_n}\right). \quad (9)$$

В доказательстве теоремы 2 используются оценки коэффициентов разложения функций класса $H^{\vec{p}}(\vec{\omega})$ и описание сопряженного пространства.

Работа выполнена под руководством Ф. А. Шамояна.

## Литература

1. P. L. Duren, A. L. Shields, *Coefficient multipliers of $H^p$ and $B^p$ spaces.* — Pacif. Jour. Math. **32** (1970), 69–78.
2. P. L. Duren, *Theory of $H^p$ spaces.* New York & London, Acad. Press (1970).
3. D. M. Oberlin, *Two multiplier theorems for $H^1(U^2)$.* — Proc. Edin. Math. Soc. **22/1** (1977), 43–47.

4. М. И. Гварадзе, *Множители одного класса аналитических функций, определенных на полидиске.* — Тр. Тбилисского Матем. ин-та **LXVI** (1980), 15–21.
5. М. И. Гварадзе, *Об одном классе пространств аналитических функций.* — Матем. заметки **21, No. 2** (1977), 141–150.
6. Е. Сенета, *Правильно меняющиеся функции.* М., Наука (1985).
7. С. В. Шведенко, *О коэффициентах Тейлора функций из пространств Бергмана в поликруге.* — Докл. АН СССР **283, No. 2** (1985), 325–328.

Yaroslavtseva O. V. On multipliers in some anisotropic spaces of analytic functions.

Descriptions of multipliers in some anisotropic spaces of analytic functions in the polydisk are obtained.

Брянский государственный
педагогический университет

Поступило 1 марта 1998 г.