Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 256, 1999 г.

А. Горбульский

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ЭНТРОПИИ УБЫВАЮЩЕЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ИЗМЕРИМЫХ РАЗБИЕНИЙ

В настоящей работе построено семейство множеств не допускающих хорошей апроксимации цилиндрическими множествами.

Определения.

Пространство с мерой (X,μ) называется *однородным*, если группа автоморфизмов X, сохраняющих меру μ, действует транзитивно на X.

Разбиение называется *однородным*, если почти все его элементы есть изоморфные однородные пространства, и фактор-пространство также однородно.

Последовательность разбиений пространства X , $\{\xi_k\}$ называется *убывающей однородной последовательностью измеримых разбиений типа* $\{r_n\}$, если выполнены следующие условия:

1) почти каждый элемент разбиения ξ_n представим в виде объединения элементов ξ_{n+1}, для каждого ξ_n;

2) каждый элемент последовательности есть однородное разбиение;

3) ранг ξ_n/ξ_{n-1} есть r_n.

Если $r_n \equiv 2$ будем называть такую последовательность *диадической*.

Пусть (X_n,μ_n) - однородное пространство с мерой из r_n точек и

$$X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n,\ \mu = \prod_{n=1}^{\infty} \mu_n.$$

Рассмотрим в пространстве X разбиение $\xi_n^{(0)}$, элементы которого состоят из последовательностей $x = \{x_n\} \in X$, у которых совпадают координаты, начиная с n-й. Последовательность разбиений $\{\xi_n^{(0)}\}$ есть однородная последовательность типа $\{r_n\}$.

При поддержке РФФИ, грант 96-15-96060.

Всякая последовательность метрически изоморфная ей, называется *стандартной однородной последовательностью типа* $\{r_n\}$.

Если r_n растет не очень быстро, то принципиального отличия между последовательностями типа r_n и диадическими последовательностями нет. В дальнейшем мы будем рассматривать только диадические последовательности.

В [1] был построен инвариант $h\big(\{\xi_n\}\big)$ который называется энтропией последовательности разбиений. Этот инвариант строится в три шага :

1) *Энтропией разбиения называется* $H(\gamma) = -\sum\limits_{C^\alpha \in \gamma} \mu(C^\alpha) \ln \mu(C^\alpha)$

2) *Энтропией последовательности разбиений относительно конечного разбиения* называется $h(\{\xi_n\}, \gamma) = \lim\limits_n 2^{-n} H(\gamma^n)$. Здесь γ^n последовательность построенная по ξ_n и γ.

3) *Энтропией однородной убывающей последовательности измеримых разбиений* называется $h\big(\{\xi_n\}\big) = \sup\limits_{\gamma \in Z} h(\{\xi_n\}, \gamma)$, З-множество конечных разбиений.

Общее определение γ^n довольно сложное, нас будет интересовать случай

$$X = \prod_{n=1}^{\infty} \{0;1\};\ \mu = \prod_{n=1}^{\infty} \mu_n;\ \mu_n(1) = \mu_n(0) = \frac{1}{2};$$

$$\xi_n = \xi_n^{(0)};\ \gamma = \{A\} \cup \{cA\}.$$

При этих условиях $\gamma^{n+1}(A)$ состоит из элементов C_{n+1}^{α}, где α пробегает множество пар злементов $\gamma^n(A)$, (в том числе пары одинаковых множеств)

$$C_{n+1}^{\{U\},\{V\}} = \big\{x \in X : \ (1x \in U \ \text{ и } \ 0x \in V) \ \text{ или } \ (1x \in V \ \text{ и } \ 0x \in U)\big\}.$$

(В дальнейшем будут изучаться последовательности γ^n.)

Все рассматриваемые множества будут считаться измеримыми.

Постановка задачи.

В [1] показано, что $h(\{\xi_n\}, \gamma)$ непрерывно зависит от γ, что позволяет вычислять $h(\{\xi_n\})$. В частности, энтропия цилиндрических множеств равна нулю, они плотны в множестве всех подмножеств, следовательно энтропия стандартной последовательности равна нулю. (На множестве разбиений рассматривается топология порожденная метрикой $d(\gamma_1, \gamma_2) = H(\gamma_1|\gamma_2) + H(\gamma_2|\gamma_1)$.) Энтропия стандартной последовательности равна нулю, но существуют и нестандартные последовательности с нулевой энтропией. Возникает вопрос: как изменить определение энтропии, чтобы новый инвариант выделял стандартную последовательность. В связи с этим А. М. Вершиком была сформулирована задача: установить какой может быть скорость роста $H(\gamma^n(A))$.

В настоящей работе установлено, что

$$\forall \alpha_n > 0,\ \alpha_n \to 0\ \exists \gamma_0 = \{A, cA\},\ n_k \to \infty : H(\gamma^{n_k}) > 2^{n_k}.$$

Построение.

Фиксируем последовательность $\alpha_n \to 0$ и построим множество

$$A \subset [0,1]\ A = \bigcup_i A_i$$

такое, что $H(\gamma^{n_k}(A)) > \alpha_{n_k} 2^{n_k}$ для некоторой последовательности n_k.

Большими латинскими буквами будем обозначать подмножества отрезка. Введем в рассмотрение последовательности l_n : $l_1 = 2, \quad l_{i+1} = \frac{1}{2}(l_i + 1)l_i$. ($l_n$ - максимальное возможное число элементов γ^n). Заметим, что $ln(l_n)/2^n \to 1$.

Обозначим множество всех двоичных слов длинны n через Λ_n.

Пусть $[\lambda]W = \{x \in X : \lambda x \in W\}$.

Лемма 1. *Для любого $n > n_0$ существует такое цилиндрическое множество V, что $H(\gamma^n(V)) = 2^{n-1}$.*

Доказательство. Элементами $\gamma^n(V)$ являются множества постоянства функции

$$f(x) = \{\chi_{sA}(\lambda x),\ s \in D_n\}$$

(функция f сопоставляет элементу x множество функций на Λ_n) где D_n группа автоморфизмов двоичного дерева порядка n сохраняющих иерархию, $\lambda-$ слова из n цифр, $sA = \{s(\lambda)y, \lambda y \in A\}$. Распространим действие D_n на множество подмножеств Λ_n и на множество функций действующих на Λ_n. Множество A можно задавать функцией $g_A(x) = \{\lambda : \lambda x \in A\}$.

Максимальное возможное число элементов разбиения γ^n $-$ l_n. Это означает, что число траекторий подмножеств Λ_n под действием автоморфизмов, сохраняющих иерархию - l_n. Если множество значений g_A будет содержать представителей всех траекторий, количество элементов γ^n будет максимально. Теперь добъемся чтобы меры элементов разбиения совпадали. Пусть n_0 выбрано так, что $l_n > 2^{n-1} \quad \forall n > n_0$. Пусть множества $T_1, T_2, .., T_{2^{n-1}}$-представители различных траекторий. Возьмем функцию g_A принемающую только эти значения, на цилиндрах одинаковой меры. Множество соответствующее такой функции и будет искомым. $H(\gamma^n(A)) = 2^{n-1}$. $\bullet$

Слово состоящее из m нулей обозначим 0_m. $\lambda_k = \lambda[k]-$ к-ая буква слова λ.

Лемма 2. *$\forall\ m, n > n_0 \in N$ существует такое цилиндрическое множество*

$$V \subset 0_{m-1}1X,$$

что $H(\gamma^n(V)) = 2^{n-m-1})$.

Доказательство. Пусть $\lambda = 0_{m-1}1, \quad A = \lambda C$

$$\gamma^2(A) = \{[0]\lambda C\} \cup \{c([0]\lambda C)\}.$$

Применяя построение для $[0]\lambda C$ получим

$$\gamma^3(A) = \{[00]\lambda C\} \cup \{c([00]\lambda C)\} \quad ...\gamma^m(A) = \{1C\} \cup \{c(1C)\},$$

$$\gamma^{(m+1)}(A) = \{C\} \cup \{cC\} = \gamma^1(C) \quad ...\gamma^l(A) = \gamma^{(l-m)}(C), \quad \forall\ l > m.$$

Возьмем $S : H(\gamma^{n-m}(C)) = 2^{n-m-1}$, тогда $A = \lambda C$ искомое. $\bullet$

Лемма 3. *Пусть $B_p \subset X \setminus 0_{m-1}X-$ цилиндр порядка $p, \alpha_n \to 0$. Существует $A,\ n_k$ такие, что*

$$A \subset 0_r 1X \ : \ \mu A < \frac{1}{2^r} \cdot \varepsilon$$

$$\textit{и} \quad H(\gamma^{n_k}(B_p \cup A)) > \alpha_{n_k} \cdot 2^{n_k} \quad \varepsilon = \min_{C^t \in \gamma^{n_{k-1}}(B_p)} \mu C^t, \ r > k \ .$$

Доказательство. $\gamma^{n_k}(B_p \cup A)$ – множества постоянства функции

$$f(x) = \{\chi_{sA \cup sB_p}(\lambda x), \ s \in D_{n_k}\}.$$

Пусть P-набор слов длины p определяющий B_p, Λ-некоторый набор слов длины p, $\Lambda' = c\Lambda$. Разбиение γ^n можно описать с помощью более мелкого разбиения η^n. Элементами η^n являются множества

$$\bigcap_{\Lambda}[\lambda]A \cap \bigcap_{\Lambda'}[\lambda](cA).$$

Всего 2^{2^n} элементов. Тогда элементами γ^n будут объединения

$$\gamma^n(F) = \{ \bigcup_{s \in D_p} (\bigcap_{s\Lambda} [\lambda] F \cap \bigcap_{s\Lambda'} [\lambda](cF)) \}_\Lambda.$$

Заметим, что

$$\gamma^p(A \cup B_p) = \{ \bigcup_{s \in D_p} (\bigcap_{s\Lambda - sP} [\lambda] A \cap \bigcap_{s\Lambda'} [\lambda](cA)) \}_\Lambda.$$

Будем считать, что это разбиение состоит из элементов $C(\Lambda)$. Пусть $\lambda_0 \notin P$. Возьмем A такое, что $[\lambda]A$ пустое, для всех λ кроме λ_0.
Тогда в разбиении $\gamma^p(A \cup B_p)$ элемент $C(P \cup \lambda_0) = [\lambda_0]A$, а это значит, что $\gamma^p(A \cup B_p)$ можно вписать в любое разбиение на два множества, следовательно взяв $m:\ 2^{-m} < \varepsilon,\ n_k : \alpha_{n_k} < 2^{-m} \frac{2^{n_k}}{ln(l_{n_k})}$ и $[\lambda_0]A$ существующее по лемме 2, получим искомое A. $\bullet$

Теорема. *Для любой последовательности* $\alpha_n \to 0$ *найдется такое множество* $A \subset [0,1]$ *и последовательность* $n_k \to \infty$, *что* $\frac{H(\gamma^{n_k}(A))}{2^{n_k}} > \alpha_{n_k}$.

Доказательство. Рассмотрим множество $A = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_{n_k}$, где множества A_{n_k} построены по индукции в соответствии с леммой 3, для последовательности $2 \cdot \alpha_n$ и $B_p = \bigcup\limits_{i=1}^{k-1} A_{n_i}$

$$H(\gamma^{n_k}(A)) > \frac{1}{2} H(\gamma^{n_k}(\bigcup_{i=1}^{k} A_{n_i})) > \alpha_{n_k} 2^{n_k}.$$

Первое неравенство выполнено так, как мера $\bigcup\limits_{i=k+1}^{\infty} A_{n_k}$ не превосходит половины меры элемента $\gamma^{n_k}(\bigcup\limits_{i=1}^{k} A_{n_i})$, второе неравенство выполняется в силу выбора A_{n_k} в лемме 3. $\bullet$

Таким образом показано, что формула $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{h(\xi_n, \gamma)}{2^n} = 0$ точна.

Автор выражает благодарность профессору А. М. Вершику за постановку задачи и полезные обсуждения.

Литература

1. А. М. Вершик, *Теория убывающих последовательностей измеримых разбиений.* — Алгебра и Анализ **6**, вып. 4 (1994), 1-68.

Gorbulsky A. About one property of entropy of decreasing sequence of measureble partitions.

This work is devoted to improving of the assimptotic that appeares in the difinition of the entropy invariant of decreasing sequences of measurable partitions, introduced by A. Vershik. An example of sets that have no good approcsimation by cillinders is represented:

$$\forall \alpha_n \to 0 \, \exists \gamma_0 = \{A, cA\} \text{ and } n_k \to \infty : H(\gamma^{n_k}) > \alpha_{n_k} 2^{n_k}.$$

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 7 мая 1999 г.