Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 256, 1999 г.

С. Добрынин

ЛОКАЛЬНОЙ ВЛОЖИМОСТЬ ГРУППЫ ХОЛЛА В КЛАСС КОНЕЧНЫХ ГРУПП

В данной работе производится дальнейшее изучение группы, построенной Холлом в качестве примера разрешимой группы ступени 3 не являющейся финитно-аппроксимируемой (ФА) ([2]). Решается поставленный А. М. Вершиком вопрос о локальной вложимости группы Холла в класс конечных групп.

1. Пример Холла

В работе [2] Холлом была построена группа

$$G = \big[\mathbf{Z} \wedge_{\varphi} [\bigoplus_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}]\big] \wedge_{\sigma} [\bigoplus_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}].$$

Действия φ и σ определены следующим образом: φ действует на прямой сумме сдвигами и группа $H = \mathbf{Z}\wedge_{\varphi}[\bigoplus \mathbf{Z}]$ становится группой с двумя образующими ξ и η, где ξ – соответствует единице $\mathbf{Z}$,а η соответствует единичному орту $\bigoplus \mathbf{Z}$. Пусть $\{u_i\}_{i\in\mathbf{Z}}$ – базис $\bigoplus \mathbf{Q}$ и пусть $\{p_i\}_{i\in\mathbf{Z}}$ – множество всех простых чисел. Действие σ задано на образующих

$$\big(\sigma(\xi)\big)(u_i) = u_{i+1}$$

$$\big(\sigma(\eta)\big)(u_i) = p_i u_i.$$

Группа G является разрешимой ступени 3, так как

$$G' \subset \big[\mathbf{Z} \wedge \bigoplus \mathbf{Z}\big]' \wedge \bigoplus \mathbf{Q}$$

и

$$\big[\mathbf{Z} \wedge_{\varphi} \bigoplus \mathbf{Z}\big]' \subset \bigoplus \mathbf{Z},$$

а значит

$$G'' \subset \bigoplus_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}.$$

При поддержке РФФИ, грант 96-15-96060.

Кроме того, в $\bigoplus \mathbf{Q}$ нет нетривиальных подгрупп, инвариантных относительно действия σ. Поэтому любой нормальный делитель G содержит $\bigoplus \mathbf{Q}$, а значит элементы лежащие в $\bigoplus \mathbf{Q}$ нельзя разделить никакими гомоморфизмами в конечные группы и, следовательно, G не финитно аппроксимируема.

2. Свойство ЛВК и его связь с разрешимостью

В статье [1] дано следующее

Определение. *Группа G называется локально вложимой в класс конечных групп (ЛВК), если для любого конечного множества $S \subset G$ существует конечное множество K такое что $S \subset K \subset G$ и операция $\star_K$ превращающая K в конечную группу, причем выполнено условие*

$$\forall a, b \in S \quad a \star b \in S \Rightarrow a \star b = a \star_K b. \qquad (*)$$

(Мы будем говорить что K удовлетворяет условию ЛВК для S, если для них выполнено (*).)

Представляет интерес вопрос о выполнении свойства ЛВК для некоторых классов разрешимых групп. Известно что конечно порожденные (к.п.) разрешимые группы второй ступени (то есть к.п. метабелевы группы) финитно аппроксимируемы (например [2]). Кроме того, из свойства ФА (и даже локальной финитной аппроксимируемости) следует ЛВК ([1]). Поэтому все к.п. метабелевы группы являются ЛВК. Существует пример к.п. разрешимой группы третей ступени не являющейся ЛВК (пример Харламовича), однако пример сложен и не конструктивен. На пути построения более простого примера необходимо выбирать не ФА группы. Выяснилось, что в качестве такого примера группа Холла не подходит.

Теорема. *Группа Холла G является локально вложимой в класс конечных групп.*

3. Доказательство теоремы

По построению, группа Холла $G = H \wedge_\sigma [\bigoplus_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}]$. Так как группа $\bigoplus_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ является ЛФА,то она локально вложима в класс конечных. Группа H конечно порожденная свободная разрешимая ступени

2 и поэтому тоже ЛВК. Покажем что и их полупрямое произведение является ЛВК. Для этого нам понадобится следующее

Определение. *Пусть A и P - ЛВК группы. Действие $\varphi : P \to AutA$ называется эквивариантно аппроксимируемым (э.а.) ,если для любых конечных множеств $B \subset A$ и $S \subset P$ существуют отвечающие для них условию ЛВК конечные группы $(K, \star_K)$ и $(L, \star_L)$ и действие $\psi : L \to AutK$, удовлетворяющее условию*

$$\forall \pi \in S, g \in B \ \varphi(\pi)(g) \in B \Rightarrow \varphi(\pi)(g) = \psi(\pi)(g). \qquad (**)$$

Полупрямое произведение ЛВК групп относительно эквивариантно аппроксимируемого действия является ЛВК группой ([1]).

Покажем, что действие $\tau : H \to Aut \bigoplus \mathbf{Q}$ эквивариантно аппроксимируемо. Пусть $B \subset \bigoplus\limits_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ - произвольное конечное множество. Существует такое натуральное N что $B \subset \bigoplus\limits_{-N}^{N} \mathbf{Q}$. Обозначим за B_k проекцию B на k-ю компоненту прямой суммы.$|B_k| < \infty$ и $B_k \subset \mathbf{Q}$, поэтому все элементы B_k можно привести к общему знаменателю M_k. Существует N_k такое что

$$B_k \subset \{\frac{-N_k}{M_k}, \dots, \frac{N_k}{M_k}\}.$$

Выберем $n \in \mathbf{N}$ такое что для всех $-N \leq k \leq N$ выполнено

$$n > N_k \quad \text{и} \quad (2n+1, p_k) = 1.$$

Рассмотрим $K = \prod\limits_{-N}^{N} \{\frac{-n}{M_k}, \dots, \frac{n}{M_k}\}$. На каждой компоненте K_k введем групповую операцию $+_n$:

$$\forall a, b \in K_k \ a +_n b = \frac{(aM_k + bM_k) \mathrm{mod}(2n+1)}{M_k}$$

(вычеты по модулю $2n+1$ берутся от $-n$ до n). Такие операции превращают множества K_k, а вместе с ними и K в конечные группы.

$$K = \bigoplus K_k \cong \bigoplus_{-N}^{N} \mathbf{Z}_{2n+1}.$$

Образующую группы K_k будем обозначать v_k.

Проверим что K удовлетворяет условию ЛВК для B. Пусть $x, y \in B$ и $x+y \in B$. Они имеют вид

$$x = (..., 0, .., 0, x_{-N}, ..., x_0, ..., x_N, 0, ..., 0, ...)$$

$$y = (..., 0, .., 0, y_{-N}, ..., y_0, ..., y_N, 0, ..., 0, ...)$$

$$x + y = (..., 0, .., 0, x_{-N} + y_{-N}, ..., x_0 + y_0, ..., x_N + y_N, 0, ..., 0, ...)$$

$$x +_n y = (..., 0, .., 0, x_{-N} +_n y_{-N}, ..., x_0 +_n y_0, ..., x_N +_n y_N, 0, ..., 0, ...),$$

причем для любого $N \geq |k|$ выполнено $|x_k| < n/M_k$, $|yk| < n/M_k$ и $|x_k + y_k| < n/M_k$. Мы должны проверить равенство $x + y = x +_n y$, то есть $x_k + y_k = x_k +_n y_k$ для $N \geq |k|$. Действительно,

$$x_k +_n y_k = \frac{(x_k M_k + y_k M_k)\mathrm{mod}(2n+1)}{M_k} = \frac{x_k M_k + y_k M_k}{M_k} = x_k + y_k,$$

так как

$$|x_k M_k + y_k M_k| < |x_k M_k| + |y_k M_k| < 2n + 1.$$

Таким образом K и B удовлетворяют условию ЛВК.

Строя группу K мы можем выбирать n и N произвольно большими.

Пусть теперь $S \subset H, |S| < \infty$.

Рассмотрим два автоморфизма K:

$$\xi_0 v_m = v_{m+1} \text{ – циклический сдвиг}$$

$$\eta_0 v_m = p_m \star_n v_m \text{ – домножение на } p_m \text{ по модулю } \ 2n+1.$$

Рассмотрим в $AutK$ подгруппу $H_0 =< \xi_0, \eta_0 >$. Выделим в H_0 подгруппу D порожденную элементами вида

$$\nu_k = \xi_0^{-k} \eta_0 \xi_0^k.$$

Их действие на базисе определяется формулой

$$\nu_k v_m = p_{(m-k)\mathrm{mod}(2N+1)} \star_n v_m.$$

Следовательно D абелева и нормальна в H_0. Таким образом, если x - любой элемент H_0, то $x = \xi_0^k \star y$, где $y \in D$, а$0 \leq k \leqslant 2N+1$. (Порядок ξ_0 равен $2N+1$.) Тоже верно и для $H : \forall x \in H$ можно представить

$$x = \xi^k \star y, \text{ где } k \in \mathbf{N}. \quad (1)$$

Рассмотрим множество $L \subset H$ построенное следующим образом:

$$L = \{w(\xi, \eta) : w(\xi_0, \eta_0) \in H_0, w - \text{ слово от двух букв}\}$$

Покажем что такое соответствие взаимноднозначно на S при подходящем выборе n и N, то есть при $w(\xi, \eta) \in S$

$$w(\xi_0, \eta_0) = id \Leftrightarrow w(\xi, \eta) = id, \text{ равенства – групповые.}$$

Пусть n_0 - длина самого длинного несократимого слова от ξ и η в S (слова мы представляем в форме (1) и считаем слово несократимым, если в разложении по образующим ν_k нет взаимообратных элементов). Возьмем в определении K

$$N > n_0 \text{ и } n > \max_{-N \leqslant i \leqslant -N} p_i^{n_0}$$

Предположим что $w(\xi_0, \eta_0) = id$. Пусть $w(\xi_0, \eta_0)$ имеет представление

$$w(\xi_0, \eta_0) = \xi_0^s \star \nu_{k_1} \star \nu_{k_2} \star \cdots \star \nu_{k_r} \star \nu_{k_{r+1}}^{-1} \star \cdots \star \nu_{k_t}^{-1}.$$

Для каждого базисного вектора K

$$w(\xi_0, \eta_0) v_m = \xi^s \star \nu_{k_1} \star \nu_{k_2} \star \cdots \star \nu_{k_r} \star \nu_{k_{r+1}}^{-1} \star \cdots \star \nu_{k_t}^{-1} v_m = v_m.$$

Значит $s = 0 \text{mod}(2N + 1)$, но $N > n_0 \Rightarrow s = 0$. Таким образом

$$w(\xi_0, \eta_0) v_m = p_{(m-k1)\text{mod}(2N+1)} \star p_{..} \cdots \star p_{..} \star p_{..}^{-1} \star \cdots \star p_{..}^{-1} \star_n v_m = v_m,$$

причем всего $t < n_0$ сомножителей. Благодаря выбору n имеем:

$$p_{..} \star p_{..} \cdots \star p_{..} \star p_{..}^{-1} \star \cdots \star p_{..}^{-1} \star_n v_m = p_{..} \star p_{..} \cdots \star p_{..} \star p_{..}^{-1} \star \cdots \star p_{..}^{-1} \star v_m = v_m$$

Следовательно $p_{..} \star p_{..} \cdots \star p_{..} \star p_{..}^{-1} \star \cdots \star p_{..}^{-1} = 1$, а значит каждое простое число входящее в это произведение имеет обратное, а тогда и вхождению ν_k соответствует вхождение обратного к нему. Поэтому w - пустое слово и очевидно $w(\xi, \eta) = id$. Обратное доказательство аналогично : в X вообще нет нетривиальных в нашем смысле соотношений. Из этого следует что $|L| = |H_0|$.

Тем самым построено конечное множество L такое, что $S \subset L \subset H$. Введем на L групповую операцию индуцированную H_0. Так как соответствие между каноническими формами слов в H и H_0 взаимноднозначно на S, L удовлетворяет условию ЛВК для S.

Введем действие $\psi : L \to AutK$ следующим образом: $\psi(w(\xi,\eta)) = w(\xi_0,\eta_0)$, где w – слово в канонической форме. Проверим что ψ удовлетворяет определению э.а. действия для τ, то есть

$$w(\xi,\eta) \in S, x \in B \subset K, \tau(w(\xi,\eta))(x) \in B$$

следовательно

$$\tau(w(\xi,\eta))(x) = \psi(w(\xi,\eta))(x) = w(\xi_0,\eta_0)(x).$$

Достаточно проверить это для $w(\xi,\eta) = \xi$ и $w(\xi,\eta) = \eta$. В первом случае: $x \in B \Rightarrow \forall k : -N \leq k \leq N$ выполнено или $x_k = 0$ или $N-1 \geq k$. Значит $k+1 = (k+1) \bmod (2N+1) \Rightarrow \xi x = \xi_0 x$. Во втором случае $\eta x \in B \Rightarrow \forall k : -N \leq k \leq N$ выполнено $|x_k| < \frac{n}{M_k}$ и $|p_k x_k| < \frac{n}{M_k}$, а тогда $p_k x_k = p_k x_k \bmod (2n+1)$ и следовательно $\eta x = \eta_0 x$.

Таким образом ψ – эквивариантное действие, а значит G – ЛВК группа.

Литература

1. А. М. Вершик, Е. И. Гордон, *Группы, локально вложимые в класс конечных группп.* Алгебра и анализ. 1997. Т. 10,1.
2. P. Hall, *On the finitness of certain soluble groups.* Proc. London Math. Soc. 1959 **9**, No. 36 (1959), 592–622.

Dobrynin S. Locally imbedding of Hall's group to the finite groups.

We prove the Hall's group (solvable not residually finite group of the degree 3) could be imbedded locally to finite groups in the sense of [1].

Санкт-Петербургский
Государственный университет

Поступило 1 июня 1999 г.