Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 256, 1999 г.

А. Дюбина

ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДАНИЙ НА СПЛЕТЕНИЯХ ГРУПП

Пусть A и B – конечно-порождённые группы, $g_1, g_2, \ldots, g_n$ и $h_1, \ldots, h_m$ – образующие A и B соответственно.

Определение. *Назовем сплетением группы A и группы B полупрямое произведение A и $\sum_A B$, где A действует сдвигами на $\sum_A B$: если $a \in A$, $f : A \to B$, $f \in \sum_A B$, то $f^a(x) = f(xa^{-1})$, $x \in A$. Обозначим сплетение $A \wr B$.*

Сплетение – тоже конечно-порождённая группа, так как она порождена, например, элементами $g_i' = (g_i, e)$ и $h_j' = (e, h_j^e)$, где $h_j^e : A \to B, h_j^e(e) = h_j$ и $h_j(x) = e$ при $x \neq e$. Будем далее рассматривать на группах меры, сосредоточенные на конечном числе образующих. Тогда возвратность случайного блуждания не зависит от выбора симметричной меры на группе (см. литературу в [3]). Группы, симметричные блуждания по которым возвратны, будем называть возвратными. В [3] выдвинута гипотеза, что любая возвратная группа есть конечное расширение единичной группы, $\mathbb{Z}$ или $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Оказывается, что энтропию и скорость ухода на бесконечность (определения см. в [1]) сплетения групп иногда можно вычислить, зная характеристики сплетаемых групп.

Определение. *Назовём размахом случайного блуждания количество различных элементов группы, посещённые за первые n шагов ($n \geqslant 0$). Обозначим размах через R_n.*

Лемма 1. *Пусть F – вероятность хотя бы раз вернуться в единичный элемент e при случайном блуждании по A. Тогда*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \mathrm{E}\,[R_n] = 1 - F$$

Доказательство. Лемма является обобщением теоремы из [2], где в качестве A рассматривались $\mathbb{Z}^k$. Начало доказательства такое же, как и в случае блуждания по решеткам. Пусть φ_k –

При поддержке РФФИ, грант 96-15-96060.

случайная величина, принимающая значение 1, если на k-ом шаге траектория попадает в новый элемент группы и 0 в противном случае. Тогда

$$R_n = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k$$

и

$$\mathrm{E}\,[R_n] = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}\,[\varphi_k].$$

Заметим, что $\mathrm{E}\,[\varphi_k]$ равно вероятности того, что за первые k шагов траектория ни разу не возвращается в e. Действительно, фиксируем k. Пусть событие A_i – приход на i-ом шаге в e, а событие B_i – приход на k-ом шаге туда же, куда и на $(k-i)$-ом. Тогда для любых $i_j : 1 \leqslant i_j \leqslant k$

$$\Pr\,[A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_l}] = \Pr\,[B_{i_1} \cap B_{i_2} \cap \ldots \cap B_{i_l}].$$

Действительно, не умаляя общности $i_1 \leqslant i_2 \leqslant \ldots \leqslant i_l$, а тогда отображение

$$\tau_{i_1,i_2,\ldots,i_l}(a_1 a_2 \ldots a_k) =$$

$$(a_{i_l+1} a_{i_l+2} \ldots a_k)(a_{i_{l-1}+1} a_{i_{l-1}+2} \ldots a_{i_l}) \ldots (a_1 \ldots a_{i_1})$$

(блоки длины i_1, i_2-i_1, $i_3-i_2, \ldots k-i_l$ переставляются в обратном порядке) является сохраняющим меру автоморфизмом на пространстве траекторий длины k (здесь a_i – образующий группы, на который происходит умножение на i-ом шаге). Заметим, что

$$\tau_{i_1,i_2,\ldots,i_l}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_l}) = B_{i_1} \cap B_{i_2} \cap \ldots \cap B_{i_l},$$

так как

$$a_1 a_2 \ldots a_k \in A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_l}$$

тогда и только тогда, когда

$$a_1 a_2 \ldots a_{i_1} = a_1 \ldots a_{i_2} = \ldots = a_1 \ldots a_{i_l} = e \Leftrightarrow$$

$$a_1 a_2 \ldots a_{i_1} = a_{i_1+1} a_{i_1+2} \ldots a_{i_2} = \ldots = a_{i_{l-1}+1} \ldots a_{i_l} = e,$$

то есть тогда и только тогда, когда

$$\tau_{i_1,i_2,\ldots,i_l}(a_1 a_2 \ldots a_k) =$$

$$a_{i_l+1} a_{i_l+2} \ldots a_k a_{i_{l-1}+1} \ldots a_{i_l} \ldots a_1 \ldots a_{i_1} \in$$

$$B_{i_1} \cap B_{i_2} \cap \ldots \cap B_{i_l}.$$

Но тогда по принципу включений и исключений

$$\Pr[A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k] =$$

$$\sum \Pr[A_i] - \sum \Pr[A_i \cap A_j] + \sum \Pr[A_j \cap A_j \cap A_h] - \ldots =$$

$$\sum \Pr[B_i] - \sum \Pr[B_i \cap B_j] + \sum \Pr[B_j \cap B_j \cap B_h] - \ldots =$$

$$\Pr[B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_k] = 1 - \mathrm{E}[\varphi_k].$$

Поэтому вероятность того, что за первые k шагов траектория ни разу не возвращается в e, равна $\mathrm{E}[\varphi_k]$.

Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}[\varphi_n] = 1 - F.$$

Но тогда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\mathrm{E}[R_n] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}[\varphi_k] = 1 - F.$$

Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть фиксирована мера на $A \wr \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Тогда следующие условия равносильны*

1. *Проекция блуждания на A возвратна.*
2. *Скорость ухода на бесконечность l в группе $A \wr \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ равна нулю.*
3. *Энтропия h группы $A \wr \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ равна нулю.*

Это является обобщением утверждения из [4], *где в качестве A рассматривались решетки $\mathbb{Z}^k$.*

Доказательство. Из 2 следует 3, так как в любой группе $h \leqslant vl$, где v – это экспоненциальный рост группы [4].

3 влечёт 1: Если блуждание по группе A невозвратно, то граница блуждания по $A \wr \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ нетривиальна. Следовательно, энтропия не равна нулю [4].

Из 1 следует 2: предположим, что проекция блуждания на A возвратна. Рассмотрим блуждание по $A \wr \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Пусть в какой-то момент t блуждание привело к элементу g. Пусть l_g – длина g (относительно словарной метрики, соответсвующей образующим $A \wr \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, на которых сосредоточена мера). Пусть R_t – размах соответствующего блуждания по A. Существует константа

C такая что $l_g \leqslant CR_t$. Действительно, не умаляя общности можно считать, что в $A \wr \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ мера сосредоточена на образующих $g'_1, \ldots, g'_n$ и $h'_1 = \delta' = (e, \delta^e)$ (где δ – это образующий $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$), так как для любой замены образующих существуют положительные константы C_1 и C_2, такие что для любого слова в $A \wr \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

$$C_1 l \leqslant l^{\text{new}} \leqslant C_2 l$$

и

$$C_1 R_t \leqslant R_t^{\text{new}} \leqslant C_2 R_t.$$

(Здесь l^{new} – длина относительно новой системы образующих, R_t^{new} – размах траектории на A, полученной из старой заменой старых образующих на их выражения через новые.)

Рассмотрим теперь траекторию, соответствующую образующим g'_i и δ'. На A ей соответствует путь, начинающийся в e и заканчивающийся в a, проходящий через R_t различных точек. Заметим, что существует путь в A, длины не больше $2R_t + l(a) \leqslant 3R_t$, проходящий по крайней мере через те же R_t точек, начинающийся в e и заканчивающийся в a (где $l(a)$ – длина a). Тогда в $A \wr \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ $l(g) \leqslant 4R_t$ – элементу $A \wr \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ соответствует функция из A в $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ и элемент группы A. Чтобы получить g достаточно пройти из e в a, изменяя, если надо, в R_t различных точках значение функции на противоположное (в $A \wr \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ это соответствует умножению на δ'). Таким образом доказано, что $l_g \leqslant CR_t$.

Тогда по лемме

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \mathrm{E}\,[R_t] = 1 - F = 0$$

($F = 1$, так как блуждание возвратно).

Тогда

$$l = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \mathrm{E}\,[l_g] = 0.$$

Что и завершает доказательство теоремы.

Замечание 1. В общем случае неизвестно, зависит ли равенство l или h нулю от выбора симметричной меры, сосредоточенной на конечном множестве образующих группы. Заметим, что для рассматриваемых в теореме сплетений это так: для симметричных мер на $A \wr \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ скорость ухода на бесконечность $l = 0$ тогда и только тогда, когда энтропия $h = 0$ и тогда и только тогда, когда A возвратна.

Доказательство. Достаточно заметить, что если мера на $A \wr \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ симметрична и сосредоточена на конечном числе образующих, то этими же свойствами обладает её проекция на A.

Замечание 2. Вместо сплетения с $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ можно рассматривать сплетение с любой конечной группой. Доказательство теоремы переносится на этот случай без изменения.

Теорема 2. *Пусть A и B конечно-порождённые группы.*

Пусть $g_1, g_2, \dots, g_n$ – образующие группы A,

$h_1, h_2, \dots, h_m$ – образующие группы B.

Тогда

$$f_1 = (g_1, e), f_2 = (g_2, e), \dots, f_n = (g_n, e),$$

$$f_{n+1} = (e, h_m^e), \dots, f_{n+m} = (e, h_m^e)$$

– это образующие $A \wr B$.

Рассмотрим на A меру, равномерно распределённую на

$$g_1, g_1^{-1}, g_2, g_2^{-1} \dots, g_n, g_n^{-1},$$

на B меру, равномерно распределённую на

$$h_1, h_1^{-1}, h_2, h_2^{-1} \dots, h_m, h_m^{-1},$$

а на $A \wr B$ – на

$$f_1, f_1^{-1}, f_2, f_2^{-1} \dots, f_{n+m}, f_{n+m}^{-1}.$$

Тогда $l_{A \wr B} = 0$ тогда и только тогда, когда A возвратна и $l_B = 0$.

Следствие 1. *Нулевую скорость ухода на бесконечность, и, следовательно, нулевую энтропию при некотором выборе образующих имеют следующие группы, определяемые рекуррентно*

$$G_0 = \mathbb{Z}^k; \quad G_{i+1} = \mathbb{Z}^2 \wr G_i, \quad i > 0$$

Доказательство теоремы.

Необходимость: пусть $l_{A \wr B} = 0$. Тогда A должна быть возвратной. Иначе бы, как и при доказательстве теоремы 1, блуждание по сплетению имело бы нетривиальную границу [4]. Тогда $h_{A \wr B} \neq 0$, что противоречило бы тому, что $l_{A \wr B} = 0$.

Пусть A' – нормальная подгруппа в $A \wr B$, порождённая образом естественного вложения A в $A \wr B$. Тогда факторгруппа $A \wr B$ по

A' изоморфна B (причём при факторизации $f_1, \ldots, f_n$ переходят в e, а $f_{n+1}, \ldots, f_{n+m}$ переходят в $h_1, \ldots, h_m$). Поэтому $l_B = 0$.

Достаточность: Рассмотрим траекторию длины t: $c_1 c_2 \ldots c_t$ (где c_i – образующий группы $A \wr B$, на который происходит умножение на i-ом шаге). Пусть её проекция побывала в элементах $a_1, a_2, \ldots, a_s$ группы A. Пусть k_i – количество умножений на какую-либо образующую группы B в то время, когда проекция блуждания находится в a_i. Очевидно, что $k_1 + k_2 + \ldots + k_s \leqslant t$. Пусть $c_1 c_2 \ldots c_t = c = (a, F)$, где $a \in A$, $F : A \to B$. Тогда носитель F содержится в $\{a_1, a_2, \ldots, a_s\}$. Пусть $b_i = F(a_i)$. Тогда длина c не превосходит $3s + l(b_1) + l(b_2) + \ldots + l(b_s)$, т.к. достаточно пройти из e в a, посетив каждый из a_i по крайней мере по одному разу, и при первом попадании в a_i умножением на элементы группы B обеспечивая в a_i значение b_i. Оценим условное математическое ожидание $\mathrm{E}\ \left(l(c)\,\middle|k_1 = k_1^0\ ,\ \ k_2 = k_2^0, \ldots, k_s = k_s^0\right)$.

$$\mathrm{E}\ \left(l(c)\,\middle|(k_1 = k_1^0, k_2 = k_2^0, \ldots, k_s = k_s^0\right) \leqslant$$

$$3s + \sum_{i=1}^{s} \mathrm{E}\ \left(l(b(i))\,\middle|k_1 = k_1^0, \ldots, k_s = k_s^0\right)\ .$$

Пусть $\lambda(x)$ – средняя длина траектории за x шагов в B. Заметим, что

$$\mathrm{E}\ \left(l(b_i)\,\middle|k_1 = k_1^0, \ldots, k_s = k_s^0\right) = \lambda(k_i),$$

так как можно считать, что b_i получается в результате случайного блуждания по B (за время k_i). Заметим также, что $\lambda(x) \leqslant x$ и что

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\lambda(x)}{x} = l_B = 0.$$

Для любого $\varepsilon \geqslant 0$ существует $N : \forall n > N\ \ \lambda(n) \leqslant \varepsilon n$. Поэтому

$$\sum_{i=1}^{s} \lambda(k_i) \leqslant sN + \varepsilon \sum_{i=1}^{s} k_i \leqslant sN + \varepsilon t.$$

Значит

$$\mathrm{E}\ \left(l(c)\,\middle|k_1 = k_1^0, k_2 = k_2^0, \ldots, k_s = k_s^0\right) \leqslant 3s + Ns + \varepsilon t.$$

Тогда полное математическое ожидание

$$\mathrm{E}\,(l(c)) \leqslant \varepsilon t + (3 + N)\mathrm{E}\,(s).$$

Поэтому

$$l_{A\wr B} = \lim_{t\to\infty} \frac{\mathrm{E}\,(l(c))}{t} \leqslant \varepsilon + (3+N) \lim_{t\to\infty} \frac{\mathrm{E}\,(s)}{t} = \varepsilon.$$

(Действительно, $\lim_{t\to\infty} \frac{\mathrm{E}\,(s)}{t}$ – это нормированный средний размах блуждания по A. По лемме он равен нулю, так как блуждание по A возвратно.)

В силу произвольности выбора ε $l_{A\wr B} = 0$.

Автор выражает благодарность А. М. Вершику за постановку задачи и многочисленные обсуждения.

Литература

1. А. М. Вершик, *Числовые характеристики дискретных групп: рост, энтропия, снос и др.*. — УМН **No. 5** (1999), (в печати).
2. F. Spitzer, *Principles of random walk*. Van Nostrand, Princeton (1964).
3. N. Th. Varopoulos, *Random walks on groups. Applications to Fuchsian groups.* — Ark. Mat. **23, No. 1** (1985), 171–176.
4. V. A. Kaimanovich, A. M. Vershik, *Random walks on discrete groups: boundary and entropy.* — Ann. Probab. **11, No. 3** (1983), 457-490.

Dubina A. Characteristics of random walks on wreath products.

The paper analyses the entropy and the normalised drift of wreath product of finitely generated groups. Examples of groups of zero entropy are given.

С.-Петербургский государственный университет

Поступило 11 мая 1999 г.