Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 256, 1999 г.

С. А. Евдокимов, И. Н. Пономаренко

О ПРИМИТИВНЫХ КЛЕТОЧНЫХ АЛГЕБРАХ

§1. Введение

Имеется по крайней мере три круга вопросов, приводящих естественным образом к клеточным (когерентным) алгебрам, введённым Б. Вейсфейлером и А. Леманом и независимо Д. Хигманом (см. [13] и [9]). По определению это матричные алгебры над $\mathbb{C}$, замкнутые относительно адамарова умножения и эрмитова сопряжения и содержащие единичную матрицу и матрицу, состоящую из всех единиц. Первый круг вопросов представляет теория групп перестановок, в которой клеточная алгебра возникает как централизаторная алгебра $\mathcal{Z}(G)$ группы перестановок G (см. гл. 5 в [15]). Другой круг вопросов образует алгебраическая комбинаторика, в особенности теория ассоциативных схем и блок-схем. Все объекты, рассматриваемые в этом контексте, могут быть интерпретированы как частные случаи когерентных конфигураций, а клеточные алгебры возникают как их алгебры смежности (см. [9]). Наконец, упомянем связанный с клеточными алгебрами подход к проблеме изоморфизма графов, являющейся одной из наиболее известных нерешённых проблем в теории сложности вычислений. Ключевой момент этого подхода состоит в сопоставлении графу наименьшей клеточной алгебры, содержащей его матрицу смежности. Имеется каноническая процедура, строящая эту алгебру за полиномиальное время, которая сводит проблему изоморфизма графов к соответствующей проблеме для клеточных алгебр (см. [13]).

Одно из преимуществ, достигаемых при переходе к клеточным алгебрам, заключается в том, что, с одной стороны, определяющие их аксиомы не столь ограничительны, как аксиомы группы, а, с другой стороны, эти объекты не столь аморфны, как графы. Другими словами, клеточные алгебры сочетают в себе алгебраические черты групп и комбинаторные черты графов. Мы проиллюстрируем этот тезис в кратком обсуждении трёх тем,

---

Исследование поддержано грантом "Volkswagen-Stiftung Program on Computational Complexity" и РФФИ, грант 96-01-00676.

играющих центральную роль в настоящей статье: представления, шуровость и примитивность.

Пусть W – клеточная алгебра на конечном множестве V, то есть клеточная подалгебра полной матричной алгебры Mat_V. С точки зрения теории представлений W может рассматриваться как ассоциативная алгебра вместе с точным линейным представлением

$$\rho : W \to \mathrm{Mat}_V .$$

Поскольку W является полупростой алгеброй над $\mathbb{C}$, представление ρ вполне приводимо. Одна из целей работы состоит в установлении связи между структурными свойствами W и такими параметрами представления ρ, как кратности и степени его неприводимых представлений. Следует отметить, что наш подход отличается от используемого в [2], где изучались коммутативные клеточные алгебры, возникающие из дистанционно-регулярных графов.

Переходя к следующей теме определим группу автоморфизмов $\mathrm{Aut}(W)$ клеточной алгебры W на V как группу, состоящую из всех перестановок множества V, матрицы которых централизуют W. В начале развития теории клеточных алгебр существовала гипотеза, утверждавшая, что каждая клеточная алгебра W является шуровой (по поводу объяснения термина см. [8]), то есть, что справедливо следующее равенство:

$$W = \mathcal{Z}(\mathrm{Aut}(W)). \tag{1}$$

Если бы это было так, то имелась бы полная характеризация дистанционно-регулярных графов (см. [2]) и алгоритм полиномиальной сложности для проблемы изоморфизма графов (см. [13]). Однако гипотеза оказалась неверной и нешуровы клеточные алгебры в действительности существуют (см. [15] и [8]). Это приводит к следующей проблеме (проблема шуровости): определить, является ли шуровой заданная клеточная алгебра. Проблема шуровости представляет вторую из тем настоящей работы.

Комбинаторные свойства клеточных алгебр проистекают из замкнутости последних относительно адамарова умножения. А именно, каждая клеточная алгебра W содержит единственным образом определённый линейный базис, состоящий из $\{0,1\}$-матриц, сумма которых совпадает с J_V (матрица из всех единиц, принадлежащая Mat_V), что позволяет рассматривать её как алгебру смежности когерентной конфигурации. Используя этот базис, можно определить однородные и примитивные клеточные алгебры, соответствующие в нижеследующем смысле транзитивным и примитивным группам перестановок. Именно, алгебра W называется однородной, если она содержит точно одну ненулевую диагональную $\{0,1\}$-матрицу (единичную матрицу I_V), и примитивной, если она содержит точно две ненулевые $\{0,1\}$-матрицы (I_V и J_V), каждая из которых есть матрица смежности некоторого отношения эквивалентности на V. Из этих определений вытекает, что группа перестановок G транзитивна (соотв. примитивна) тогда и только тогда, когда её централизаторная алгебра $\mathcal{Z}(G)$ однородна (соотв. примитивна) как клеточная алгебра. Как и примитивные группы в теории групп перестановок, примитивные клеточные алгебры оказываются "строительными блоками" для произвольных клеточных алгебр. С их изучением связан третий круг вопросов, рассматриваемых в статье.

Основные результаты работы содержатся в §§3, 4 и 5 (в §2 приводятся точные определения и обозначения, связанные с клеточными алгебрами).

В §3 мы определяем новую операцию – экспоненцирование клеточной алгебры W с группой перестановок K, результатом которой является клеточная алгебра $W \uparrow K$. Эта операция подобна соответствующей конструкции для групп перестановок (см. [8]). Пусть степень группы K больше 1. Тогда экспоненцирование $G \uparrow K$ групп перестановок G и K примитивно в том и только в том случае, когда G примитивна и нерегулярна и K транзитивна. Мы обобщаем этот результат, доказывая (теорема 3.5), что алгебра $W \uparrow K$ примитивна в том и только в том случае, когда W примитивна и нерегулярна и K транзитивна. Мы также показываем, что для произвольной заданной группы перестановок K клеточная алгебра $W \uparrow K$ шурова тогда и только тогда, когда шурова алгебра W (теорема 3.4). Эти теоремы дают возможность строить бесконечные серии нешуровых примитивных алгебр (см. конец п. 3.3).

В §4 мы определяем понятие базы клеточной алгебры, аналогичное понятию базы группы перестановок. Оно тесно связано с проблемой шуровости: согласно [4] шуровой является любая m-замкнутая клеточная алгебра, имеющая базу мощности $m-1$ (обсуждение сильно замкнутых клеточных алгебр приводится ниже).

Основной результат этого параграфа (теорема 4.3) показывает, что мощность каждой несводимой базы примитивной клеточной алгебры W не превосходит любого из чисел m_P/n_P, где m_P (соотв. n_P) есть кратность (соотв. степень) неглавного примитивного центрального идемпотента P алгебры W. Используя эту верхнюю оценку мы получаем, что упомянутая мощность не превосходит средней степени нерефлексивного базисного отношения алгебры W (следствие 4.8), а также устанавливаем три верхние оценки на порядок группы $\mathrm{Aut}(W)$ в терминах степеней базисных отношений алгебры W и приведённых выше чисел m_P/n_P (теорема 4.10 и следствие 4.12). Отметим, что каждый из этих результатов приводит к соответствующему результату для примитивных групп перестановок.

В §5 мы продолжаем изучение m-замыкания клеточной алгебры, введённого в [4] (точное определение можно также найти в этом параграфе). Оно может рассматриваться как приближение клеточной алгебры W на V к её шуровому замыканию $\mathrm{Sch}(W) = \mathcal{Z}(\mathrm{Aut}(W))$ (см. [4]):

$$W = \overline{W}^{(1)} \le \ldots \le \overline{W}^{(n)} = \mathrm{Sch}(W),$$

где $\overline{W}^{(m)}$ есть m-замыкание алгебры W и n – мощность V. Предполагая примитивные клеточные алгебры 2-замкнутыми (то есть совпадающими со своими 2-замыканиями) мы обобщаем на них некоторые классические теоремы, справедливые для примитивных групп перестановок. Например, мы характеризуем 2-замкнутые примитивные алгебры как 2-замкнутые одноподные алгебры W, для которых любая алгебра W_v, $v \in V$, (аналог одноточечного стабилизатора для групп перестановок) является минимальной надалгеброй алгебры W (теорема 5.5). Это, в частности, влечёт, что такая алгебра W совпадает с $W_u \cap W_v$ для любых двух различных точек u и v из V или является регулярной простой степени (теорема 5.6). Мы также обобщаем на эти алгебры хорошо известную теорему, утверждающую, что каждая 3/2-транзитивная группа либо примитивна, либо является группой Фробениуса (теорема 5.11). Наконец, мы приводим пример, показывающий, что все эти теоремы перестают быть верными, если предположение о 2-замкнутости алгебры опускается (см. конец п. 5.3).

Предварительный вариант работы опубликован в [7].

Обозначения. Как обычно через $\mathbb{C}$ обозначается поле комплексных чисел.

На протяжении всей работы V обозначает конечное множество с $n = |V|$ элементами. Под отношениями на V мы понимаем подмножества множества $V \times V$. Для отношения R на V мы полагаем $R^T = \{(u, v) : (v, u) \in R\}$ и $R(v) = \{u : (v, u) \in R\}$, где $v \in V$. Если E – эквивалентность (то есть рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение) на V, то V/E обозначает множество всех классов по модулю E.

Алгебра всех комплексных матриц, строки и столбцы которых индексированы элементами множества V, обозначается через Mat_V, её единичный элемент (единичная матрица) – через I_V и матрица, состоящая из всех единиц – через J_V. Для $U \subset V$ алгебра Mat_U естественным образом отождествляется с подалгеброй алгебры Mat_V.

Для $U, U' \subset V$ через $J_{U,U'}$ обозначается $\{0,1\}$-матрица с единицами точно на местах, принадлежащих $U \times U'$. Если $A \in \mathrm{Mat}_V$, то A^T обозначает транспонированную матрицу, а A^* – эрмитово сопряжённую.

Если $g : V \to V'$ – биекция, то A^g обозначает образ матрицы A относительно естественного изоморфизма алгебры Mat_V в алгебру $\mathrm{Mat}_{V'}$, индуцированного g.

Группа всех перестановок множества V будет обозначаться через $\mathrm{Sym}(V)$. Если n натуральное число, то C_n и D_n обозначают группы перестановок на n точках, отвечающие естественным действиям циклической группы порядка n и диэдральной группы порядка $2n$ соответственно (в последнем случае $n \geqslant 3$).

Для целых чисел l, m через $[l, m]$ обозначается множество $\{l, l+1, \dots, m\}$. Мы пишем $[m]$, $\mathrm{Sym}(m)$, Mat_m, V^m и V вместо $[1, m]$, $\mathrm{Sym}([m])$, $\mathrm{Mat}_{[m]}$, $V^{[m]}$ и V^1 соответственно.

§2. Клеточные алгебры

Все неопределяемые ниже термины, относящиеся к клеточным алгебрам и группам перестановок, могут быть найдены в [13] и [15] соответственно.

2.1. Под *клеточной алгеброй* на V мы понимаем подалгебру W алгебры Mat_V, для которой выполнены следующие условия:

(C1) $I_V, J_V \in W$;

(C2) $\forall A \in W : A^* \in W$;

(C3) $\forall A, B \in W : A \circ B \in W$,

где $A \circ B$ – адамарово (покомпонентное) произведение матриц A и B. Из (C2) следует, что W является полупростой алгеброй над $\mathbb{C}$. Множество V называется *множеством точек* алгебры W, а его элементы – *точками*.

Каждая клеточная алгебра W имеет единственным образом определённый линейный базис $\mathcal{R} = \mathcal{R}(W)$ (*стандартный базис* W), состоящий из $\{0,1\}$-матриц таких, что

$$\sum_{R \in \mathcal{R}} R = J_V \quad \text{и} \quad R \in \mathcal{R} \;\Leftrightarrow\; R^* \in \mathcal{R}. \tag{2}$$

Неотрицательные целые числа $c_{R,S}^T$, определенные равенством $RS = \sum_{T \in \mathcal{R}} c_{R,S}^T T$, где $R, S \in \mathcal{R}$, называются *структурными константами* алгебры W.

Положим $\mathrm{Cel}(W) = \{U \subset V : I_U \in \mathcal{R}\}$ и определим $\mathrm{Cel}^*(W)$ как множество всевозможных объединений элементов из $\mathrm{Cel}(W)$. Каждый элемент множества $\mathrm{Cel}(W)$ называется *клеткой* алгебры W. Легко видеть, что

$$V = \bigcup_{U \in \mathrm{Cel}(W)} U \quad \text{(дизъюнктное объединение)}.$$

Алгебра W называется *однородной*, если $|\,\mathrm{Cel}(W)| = 1$.

Для $U, U' \in \mathrm{Cel}^*(W)$ положим $\mathcal{R}_{U,U'} = \{R \in \mathcal{R} : R \circ J_{U,U'} = R\}$. Тогда

$$\mathcal{R} = \bigcup_{U,U' \in \mathrm{Cel}(W)} \mathcal{R}_{U,U'} \quad \text{(дизъюнктное объединение)}.$$

Более того, для двух клеток U, U' число единиц в u-ой строке (соотв. в v-ом столбце) матрицы $R \in \mathcal{R}_{U,U'}$ не зависит от выбора $u \in U$ (соотв. $v \in U'$). Это число обозначается через $d_{out}(R)$ (соотв. $d_{in}(R)$). Если алгебра W однородна, то $d_{out}(R) = d_{in}(R)$ для всех $R \in \mathcal{R}$, и мы используем для этого числа обозначение $d(R)$ и называем его *степенью* R. В этом случае

$$\sum_{R \in \mathcal{R}} d(R) = |V|. \tag{3}$$

Для каждого $U \in \mathrm{Cel}^*(W)$ мы рассматриваем подалгебру $I_U W I_U$ алгебры W как клеточную алгебру на U и обозначаем ее через

W_U. Базисные матрицы алгебры W_U находятся в 1-1 соответствии с матрицами из $\mathcal{R}_{U,U}$. Если $U \in \mathrm{Cel}(W)$, мы называем W_U *однородной компонентой* W, соответствующей U.

Каждая матрица $R \in \mathcal{R}$, будучи $\{0{,}1\}$-матрицей, является матрицей смежности некоторого отношения на V, называемого *базисным отношением* алгебры W. В силу (2) множество всех таких отношений образует разбиение множества $V \times V$, определяющее когерентную конфигурацию на V (см. [9]). Мы будем часто использовать для этого множества то же самое обозначение $\mathcal{R}$ и сохраним для базисных отношений все обозначения, введённые для базисных матриц.

2.2. Большой класс клеточных алгебр возникает из групп перестановок следующим образом (см. [13]). Пусть $G \le \mathrm{Sym}(V)$ группа перестановок и

$$\mathcal{Z}(G) = \{A \in \mathrm{Mat}_V : A^g = A,\ g \in G\}$$

её централизаторная алгебра. Тогда $\mathcal{Z}(G)$ – клеточная алгебра на V. Её базисные отношения суть в точности 2-орбиты группы G. В частности, $\mathrm{Cel}(\mathcal{Z}(G)) = \mathrm{Orb}(G)$, где $\mathrm{Orb}(G)$ – множество орбит группы G.

Будем говорить, что две клеточные алгебры W на V и W' на V' *сильно изоморфны* (для краткости изоморфны) и писать $W \cong W'$, если $W^g = W'$ для некоторой биекции $g : V \to V'$, называемой *изоморфизмом* из W в W'. Ясно, что g индуцирует биекцию между множествами $\mathcal{R}(W)$ и $\mathcal{R}(W')$. Группа всех изоморфизмов из W в себя содержит нормальную подгруппу

$$\mathrm{Aut}(W) = \{g \in \mathrm{Sym}(V) : A^g = A,\ A \in W\},$$

называемую *группой автоморфизмов* алгебры W.

Если $W = \mathcal{Z}(\mathrm{Aut}(W))$, то алгебра W называется *шуровой*. Легко видеть, что W шурова тогда и только тогда, когда множество её базисных отношений совпадает с множеством 2-орбит группы $\mathrm{Aut}(W)$. Из [15] следует, что существуют нешуровы клеточные алгебры (см. также [8]). Наименьшим примером нешуровой клеточной алгебры, который мы знаем, является коммутативная алгебра $T(15)$ на 15 точках, соответствующая кососадамаровой матрице порядка 16 (явное описание см. в [8]). Эта алгебра имеет три базисных отношения степеней 1, 7, 7 и является примитивной в смысле п. 2.3.

Наряду с понятием сильного изоморфизма мы рассматриваем понятие слабого изоморфизма клеточных алгебр. Именно, клеточные алгебры W на V и W' на V' называются *слабо изоморфными*, если существует такой изоморфизм матричных алгебр $\varphi : W \to W'$, что $\varphi(\mathcal{R}(W)) = \mathcal{R}(W')$. В этом случае $\varphi(A \circ B) = \varphi(A) \circ \varphi(B)$ и $\varphi(A^*) = \varphi(A)^*$ для всех $A, B \in W$, причем $|V| = |V'|$ и φ индуцирует биекцию из $\mathrm{Cel}(W)$ на $\mathrm{Cel}(W')$ (см. предложение 2.4 из [4]). Любой такой φ называется *слабым изоморфизмом* из W в W'. Отметим, что каждый сильный изоморфизм из W в W' индуцирует естественным образом слабый изоморфизм между этими алгебрами.

Клеточная алгебра W называется *полурегулярной*, если $d_{in}(R) = d_{out}(R) = 1$ для всех $R \in \mathcal{R}(W)$. Однородная полурегулярная алгебра называется *регулярной*. Легко видеть, что полурегулярные (регулярные) алгебры суть в точности централизаторные алгебры полурегулярных (регулярных) групп перестановок. Более того, любой слабый изоморфизм полурегулярных алгебр индуцируется сильным изоморфизмом.

2.3. Пусть W – клеточная алгебра на V и E – эквивалентность на V. Мы говорим, что E есть *эквивалентность* алгебры W, если она представляется в виде объединения базисных отношений W. Эквивалентности алгебры W с матрицами смежности I_V и J_V называются *тривиальными*. Предположим далее, что алгебра W однородна. Мы называем её *импримитивной*, если она имеет нетривиальную эквивалентность. Если W имеет точно две эквивалентности, то она называется *примитивной*. Мы подчеркнём, что клеточная алгебра на одноточечном множестве в соответствии с этим определением не является ни импримитивной, ни примитивной.

Лемма 2.1 ([13, с. 71, 72]). *Пусть W – примитивная клеточная алгебра, имеющая нерефлексивное базисное отношение степени* 1 *(соотв. степени* 2*). Тогда $W \cong \mathcal{Z}(C_p)$ (соотв. $W \cong \mathcal{Z}(D_p)$) для некоторого простого (соотв. нечетного простого) числа p.*

Если W примитивна, то по [13, с. 55, 56] каждое её нерефлексивное базисное отношение сильно связно (в соответствующем графе любые две вершины соединены ориентированной цепью). Другими словами, для любой базисной матрицы R алгебры W, $R \neq I_V$, каждая базисная матрица S входит в R^{is} для некоторого положительного целого i_S, то есть $S\circ R^{i_S} \neq 0$. Если W не является регулярной, то i_S может быть выбрано одним и тем же для всех S. (Действительно, по лемме 2.1 имеем $d(R) > 1$ и потому $R^{i_{I_V}}$ не кратна I_V. Таким образом, искомое число есть подходящее кратное числа i_{I_V}.)

2.4. Множество всех клеточных алгебр на V упорядочено по включению. Наибольшим и наименьшим элементом этого множества являются соответственно полная матричная алгебра Mat_V и *симплекс* $S(V) = \mathcal{Z}(\mathrm{Sym}(V))$, то есть алгебра с линейным базисом $\{I_V, J_V\}$. Мы пишем $W \leqslant W'$, если $W \subset W'$.

Для заданных подмножеств $X_1, \dots, X_s$ множества Mat_V их клеточное замыкание, то есть наименьшая содержащая их клеточная алгебра, обозначается через $[X_1, \dots, X_s]$. Если $X_i = \{A_i\}$, мы опускаем в этой записи фигурные скобки. Для клеточной алгебры $W \leqslant \mathrm{Mat}_V$ мы пишем $W[X]$ вместо $[W, X]$. Если $U = \{v_1, \dots, v_s\}$, то мы используем обозначения $W_{[U]}$ и $W_{v_1,\dots,v_s}$ для алгебры $W[I_{\{v_1\}}, \dots, I_{\{v_s\}}]$.

§3. Экспоненцирование клеточных алгебр

3.1. Пусть $W \le \mathrm{Mat}_V$ – клеточная алгебра со стандартным базисом $\mathcal{R}$ и Φ – группа слабых изоморфизмов W. Для $R \in \mathcal{R}$ положим

$$\overline{R} = \sum_{R' \in O_R} R',$$

где O_R – орбита группы Φ, содержащая R и $\Phi_R = \{\varphi \in \Phi : \varphi(R) = R\}$. Тогда ясно, что $\overline{R}$ есть $\{0,1\}$-матрица и две таких матрицы либо совпадают, либо ортогональны относительно адамарова умножения. Легко видеть, что

$$\sum_{\overline{R} \in \mathcal{R}^\Phi} \overline{R} = J_V \text{ и } \overline{R} \in \mathcal{R}^\Phi \;\Leftrightarrow\; \overline{R}^T \in \mathcal{R}^\Phi, \tag{4}$$

где $\mathcal{R}^\Phi = \{\overline{R} : R \in \mathcal{R}\}$. Положим $W^\Phi = [\mathcal{R}^\Phi]$.

Лемма 3.1. *Множество $\mathcal{R}^\Phi$ есть стандартный базис клеточной алгебры W^Φ.*

Доказательство. В силу (4) для доказательства утверждения достаточно проверить, что произведение двух матриц из $\mathcal{R}^\Phi$

представляется в виде линейной комбинации матриц из $\mathcal{R}^\Phi$. Однако,

$$\overline{R}\cdot\overline{S} = \sum_{R'\in O_R}\sum_{S'\in O_S} R'S' =$$

$$= \sum_{R'\in O_R}\sum_{S'\in O_S}\sum_{T\in\mathcal{R}} c_{R',S'}^T T = \sum_{T\in\mathcal{R}}\left(\sum_{R'\in O_R}\sum_{S'\in O_S} c_{R',S'}^T\right)T,$$

где $c_{R',S'}^T$ – структурные константы алгебры W. Поскольку, очевидно, $c_{R,S}^T = c_{\varphi(R),\varphi(S)}^{\varphi(T)}$ для всех $R,S,T\in\mathcal{R}$ и $\varphi\in\Phi$, то выражение в скобках не зависит от выбора T в орбите группы Φ. Это доказывает требуемое утверждение.

Замечание 3.2. Из доказательства леммы следует, что структурные константы алгебры W^Φ вычисляются следующим образом: $c_{\overline{R},\overline{S}}^{\overline{T}} = \sum_{R'\in O_R}\sum_{S'\in O_S} c_{R',S'}^T$.

Пусть $W\le \mathrm{Mat}_V$ – клеточная алгебра и K – группа перестановок на множестве X. Определяя действие группы K на V^X формулой

$$(\{v_x\}_{x\in X})^k = \{v_{x^{k^{-1}}}\}_{x\in X}, \quad v_x\in V,\ k\in K,$$

мы можем рассматривать K как группу слабых изоморфизмов алгебры W^X на себя, где $W^X = W\otimes\cdots\otimes W$ (X раз). По лемме 3.1 это определяет клеточную алгебру на V^X, обозначаемую через $W\uparrow K$ и называемую *экспоненцированием* W посредством K.

Предложение 3.3. *Имеют место следующие канонические изоморфизмы:*

(1) $W\uparrow(K\oplus L)\cong(W\uparrow K)\otimes(W\uparrow L)$;
(2) $(W\uparrow K)\uparrow L\cong W\uparrow(K\wr L)$,

где W – клеточная алгебра, K,L – группы перестановок, $\oplus$ (соотв. $\wr$) обозначает прямую сумму (соотв. сплетение в импримитивном действии) групп перестановок и $\otimes$ обозначает тензорное произведение клеточных алгебр.

Доказательство. Оба утверждения доказываются прямым вычислением. Докажем, например, второе из них. Напомним, что сплетение $K\wr L$ групп перестановок K на X и L на Y состоит из элементов $g = (\{k_y\}_{y\in Y}, l)$, где $k_y\in K$, $l\in L$, так что $g^{-1} =$

$(\{k_{y^{l^{-1}}}\}, l^{-1})$, и действует на $X \times Y$ по формуле $(x,y)^g = (x^{k_y}, y^l)$. Для семейства $\{R_{x,y}\}_{x\in X, y\in Y}$ с $R_{x,y} \in \mathcal{R}(W)$ мы имеем

$$\sum_{l\in L}\bigotimes_{y\in Y}\left(\sum_{k\in K}\bigotimes_{x\in X} R_{x^{k^{-1}},y^{l^{-1}}}\right) =$$

$$=\sum_{l\in L}\left(\sum_{\{k_y\}\in K^Y}\ \bigotimes_{(x,y)\in X\times Y} R_{x^{k_z^{-1}},z}\right) =$$

$$= \sum_{(\{k_y\},l)\in K\wr L}\ \bigotimes_{(x,y)\in X\times Y} R_{x^{k_z^{-1}},z} = \sum_{g\in K\wr L}\ \bigotimes_{t\in X\times Y} R_{t^{g^{-1}}},$$

где $z = y^{l^{-1}}$. Для завершения доказательства достаточно заметить, что любая базисная матрица из левой (соотв. правой) части равенства в утверждении (2) кратна матрице из левой (соотв. правой) части последней формулы для подходящего семейства $\{R_{x,y}\}$.

3.2. Введённая операция тесно связана с экспоненцированием групп перестановок, называемом также сплетением в примитивном действии (см., например, [8]). Экспоненцирование $G \uparrow K$ группы перестановок $G \le \mathrm{Sym}(V)$ посредством группы перестановок $K \le \mathrm{Sym}(X)$ есть по определению группа, состоящая из перестановок $(\{g_x\}_{x\in X}, k)$ с $g_x \in G$, $k \in K$, действие которых на множестве V^X задаётся формулой

$$\{v_x\}^{(\{g_x\},k)} = \{v_{x^{k^{-1}}}^{g_{x^{k^{-1}}}}\}.$$

Справедливы следующие включения:

$$\mathrm{Aut}(W)\uparrow K \le \mathrm{Aut}(W\uparrow K) \le \mathrm{Aut}(W)\uparrow K^{(1)}, \tag{5}$$

где $K^{(1)}$ есть 1-замыкание K, то есть произведение симметрических групп, действующих на орбитах K. Первое включение проверяется непосредственно. Для проверки второго заметим, что $\mathrm{Aut}(S(V)\uparrow \mathrm{Sym}(X)) = \mathrm{Sym}(V)\uparrow \mathrm{Sym}(X)$ (обе группы, очевидно, имеют одни и те же 2-орбиты, причём вторая группа 2-замкнута, см. [8]). Поэтому каждая перестановка из $\mathrm{Aut}(W\uparrow K)$ имеет вид $\sigma = (\{g_x\}, k)$, $g_x \in \mathrm{Sym}(V)$, $k \in K$. Более того, $g_x \in \mathrm{Aut}(W)$ и $k \in K^{(1)}$, что следует из рассмотрения действия перестановки σ

на базисных отношениях алгебры $W \uparrow K$, имеющих вид R^X и $R^O \times S^{X \setminus O}$, где R, S – различные базисные отношения алгебры W и O – орбита группы K.

Проблема шуровости для экспоненцирования решается в следующем утверждении.

Теорема 3.4. *Клеточная алгебра $W \uparrow K$ является шуровой тогда и только тогда, когда алгебра W шурова.*

Доказательство. Пусть $K \leq \mathrm{Sym}(X)$. Если W – шурова алгебра, то, очевидно, шуровой является и алгебра W^X. По определению экспоненцирования это влечёт, что базисные отношения алгебры $W \uparrow K$ имеют вид $O^K = \bigcup_{k \in K} O^k$, где O – 2-орбита группы $\mathrm{Aut}(W^X)$. Поскольку группа $\mathrm{Aut}(W) \uparrow K$ действует транзитивно на O^K, достаточность следует из левого включения (5).

Обратно, пусть R – произвольное базисное отношение алгебры W. Тогда шуровость $W \uparrow K$ влечёт, что группа $\mathrm{Aut}(W \uparrow K)$ действует транзитивно на базисном отношении R^X алгебры $W \uparrow K$. С другой стороны, в силу правого включения (5) каждая перестановка из $\mathrm{Aut}(W \uparrow K)$ имеет вид $(\{g_x\}, k)$ с $g_x \in \mathrm{Aut}(W)$ для всех $x \in X$. Поэтому группа $\prod_{x \in X} \mathrm{Aut}(W)$ действует транзитивно на множестве пар $(\{u\}_{x \in X}, \{v\}_{x \in X})$, где $(u, v) \in R$. Таким образом, R является 2-орбитой группы $\mathrm{Aut}(W)$ и, следовательно, алгебра W шурова.

3.3. Если W однородна, то $W \uparrow K$ есть клеточная подалгебра однородной алгебры W^X. Поэтому она также однородна. С другой стороны, если U – клетка алгебры W, то, ясно, что $U^X \in \mathrm{Cel}(W \uparrow K)$. Таким образом, алгебра $W \uparrow K$ однородна, если и только если однородной является алгебра W. Следующее утверждение характеризует случай примитивного экспоненцирования.

Теорема 3.5. *Пусть $W \leq \mathrm{Mat}_V$ – клеточная алгебра и $K \leq \mathrm{Sym}(X)$ – группа перестановок степени большей 1. Тогда $W \uparrow K$ примитивна если и только если K транзитивна и W примитивна и нерегулярна.*

Доказательство. Пусть $W \uparrow K$ – примитивная клеточная алгебра. Тогда $|V| > 1$. Если $O \in \mathrm{Orb}(K)$, то эквивалентность на V^X, классы которой определяются равенством координат вне O, является эквивалентностью алгебры $W \uparrow K$. Она нетривиальна, если $O \neq X$. Так что группа K транзитивна. Аналогично, эквивалентность E алгебры W определяет эквивалентность алгебры $W \uparrow K$, классами которой являются множества $\prod_{x \in X} U_x$, $U_x \in V/E$. Это показывает, что W примитивна. Наконец, W не может быть регулярной алгеброй, ибо в противном случае отношение с матрицей смежности $\sum_{R \in \mathcal{R}} R^X$, где $\mathcal{R} = \mathcal{R}(W)$, было бы нетривиальной эквивалентностью алгебры $W \uparrow K$.

Обратно, рассмотрим матрицу смежности E некоторой эквивалентности алгебры $W \uparrow K$. Предположим, что $E \neq I_{V^X}$, и положим

$$\mathcal{S} = \{R \in \mathcal{R}(W^X) : R \circ E = R\}.$$

Тогда каждая матрица $R \in \mathcal{S}$ может быть записана в виде $R = \otimes_{x \in X} R_x$, где $R_x \in \mathcal{R}$ для всех x. Выберем матрицу R из $\mathcal{S}$ так, чтобы число $n_R = |\{x \in X : R_x = I_V\}|$ было минимальным. Из выбора E следует, что $R \neq I_{V^X}$ и потому $n_R < |X|$. Покажем, что $n_R = 0$. Действительно, пусть $R_x \neq I_V$ и $R_y = I_V$ для некоторых $x, y \in X$. В силу транзитивности группы K существует такая перестановка $k \in K$, что $x^k = y$. Поскольку $E^k = E$, мы заключаем, что $R^k \in \mathcal{S}$. Следовательно, все базисные матрицы алгебры W^X, входящие в RR^k также принадлежат множеству $\mathcal{S}$. С другой стороны, поскольку клеточная алгебра W примитивна и нерегулярна, произведение двух её базисных матриц кратно I_V тогда и только тогда, когда обе они равны I_V. Это влечет, что существует базисная матрица S алгебры W^X, входящая в RR^k, которая принадлежит $\mathcal{S}$, пpичем $n_S < n_R$ (действительно, выберем $S = \bigotimes_{z \in X} S_z$ так, что $S_z \neq I_V$ для всех z с $R_z \neq I_V$; тогда $S_y = R_y R_x = R_x \neq I_V$). Это, однако, противоречит выбору R.

Поскольку $R_x \neq I_V$, $x \in X$, а W примитивна и нерегулярна, то каждая базисная матрица алгебры W входит в $R_x^{i_x}$ для некоторого положительного целого i_x (см. п. 2.3). Таким образом, любая базисная матрица алгебры W^X входит в R^i для некоторого i (в качестве i можно взять, например, произведение чисел i_x по всем $x \in X$). Поскольку $R^i \circ E = R^i$, это означает, что $E = J_{V^X}$. Следовательно, алгебра $W \uparrow K$ имеет только тривиальные эквивалентности и потому примитивна.

По теоремам 3.4 и 3.5 нешурова примитивная алгебра $W = T(15)$ (см. п. 2.2) порождает серию нешуровых примитивных клеточных алгебр $W \uparrow K$, где K пробегает множество всех транзитивных групп. Наименьшая такая алгебра, не совпадающая с W (на 225 точках) возникает при $K = C_2$.

§4. Представления, базы, группы

4.1. Пусть W – клеточная алгебра на V. Будучи полупростой алгеброй над $\mathbb{C}$, она изоморфна прямому произведению полных матричных алгебр:

$$W = \prod_{P \in \mathrm{Spec}(W)} WP \cong \prod_{P \in \mathrm{Spec}(W)} \mathrm{Mat}_{n_P}, \tag{6}$$

где $\mathrm{Spec}(W)$ обозначает множество всех примитивных центральных идемпотентов алгебры W. Отсюда следует, что

$$\dim_{\mathbb{C}}(W) = \sum_{P \in \mathrm{Spec}(W)} n_P^2. \tag{7}$$

Поскольку $I_V = \sum_{P \in \mathrm{Spec}(W)} P$, имеется прямое разложение

$$\mathbb{C}^V = \sum_{P \in \mathrm{Spec}(W)} P\mathbb{C}^V, \tag{8}$$

где $\mathbb{C}^V$ – линейное пространство над $\mathbb{C}$ с базисом V. Для каждого идемпотента P связанный с ним W-модуль $P\mathbb{C}^V$ является прямой суммой попарно изоморфных неприводимых W-модулей размерности n_P над $\mathbb{C}$. Обозначим их число через m_P. Тогда разложение (8) влечёт, что

$$n = \sum_{P \in \mathrm{Spec}(W)} m_P n_P. \tag{9}$$

Числа m_p и n_P называются ниже *кратностью* и *степенью* идемпотента P соответственно.

Пусть далее W – однородная клеточная алгебра. Как показано в [6], имеет место следующее неравенство (вытекающее также из леммы 4.1 ниже):

$$n_P \le m_P, \qquad P \in \mathrm{Spec}(W). \tag{10}$$

Более того, $n_P = m_P$ для всех P тогда и только тогда, когда алгебра W регулярна.

Лемма 4.1. *Пусть* $W \le \mathrm{Mat}_V$ *– однородная клеточная алгебра. Тогда*

$$\dim(WPv) = n_P^2$$

для всех $P \in \mathrm{Spec}(W)$ *и* $v \in V$.

Доказательство. Если $P \in \mathrm{Spec}(W)$, то $WP \cong \mathrm{Mat}_{n_P}$ и потому размерность алгебры WP над $\mathbb{C}$ равна n_P^2. Это влечёт неравенство

$$\dim(WPv) \le n_P^2, \qquad v \in V. \tag{11}$$

С другой стороны, для $v \in V$ множество $X_v = \{Rv : R \in \mathcal{R}(W)\}$ является, очевидно, линейно независимым подмножеством в $\mathbb{C}^V$. Поскольку алгебра W однородна, мы имеем $|X_v| = |\mathcal{R}(W)|$. Следовательно, в силу (7)

$$\dim(Wv) = |X_v| = |\mathcal{R}(W)| = \dim(W) = \sum_{P \in \mathrm{Spec}(W)} n_P^2. \tag{12}$$

Из (8) вытекает, что $\dim(Wv) = \sum_{P \in \mathrm{Spec}(W)} \dim(WPv)$. Таким образом, формулы (12) и (11) влекут, что $\dim(WPv) = n_P^2$ для всех P.

Завершая пункт, отметим, что в любой однородной клеточной алгебре $W \le \mathrm{Mat}_V$ матрица J_V/n является примитивным центральным идемпотентом кратности и степени 1. Он называется *главным* идемпотентом алгебры W.

4.2. Следующее понятие аналогично понятию базы группы перестановок (см., например, [12]).

Определение 4.2. *Упорядоченный набор* $B = (v_1, \dots, v_b)$ *элементов из* V *называется базой клеточной алгебры* $W \le \mathrm{Mat}_V$, *если* $W_{v_1,\dots,v_b} = \mathrm{Mat}_V$. *Число* b *называется размером базы* B *и обозначается через* $|B|$. *Мы называем базу несводимой, если* $\{v_i\} \notin \mathrm{Cel}(W_{v_1,\dots,v_{i-1}})$ *для всех* $i \in [b]$. *В противном случае она называется сводимой.*

Минимальный размер базы алгебры W обозначается через $b(W)$. Легко видеть, что $0 \le b(W) \le n-1$ для всех алгебр W на V. Нижняя и верхняя границы достигаются для полной матричной алгебры Mat_V и симплекса $S(V)$ соответственно. Для группы перестановок $G \le \mathrm{Sym}(V)$ и клеточной алгебры $W \le \mathrm{Mat}_V$ имеют место следующие неравенства:

$$b(\mathrm{Aut}(W)) \le b(W), \quad b(G) \le b(\mathcal{Z}(G)), \qquad (13)$$

где $b(G)$ – минимальный размер базы группы G. Первое следует из равенств $\mathrm{Aut}(W)_{v_1,\dots,v_b} = \mathrm{Aut}(W_{v_1,\dots,v_b})$ и $\mathrm{Aut}(\mathrm{Mat}_V) = \{1\}$. Второе вытекает из первого и того очевидного факта, что $b(G) \le b(G')$ для $G \le G'$.

В этой работе мы не развиваем теорию баз клеточных алгебр, но несколько замечаний в этой связи могут быть уместны. Используя понятия базы и многомерного замыкания (см. §5) можно дать достаточное условие шуровости клеточной алгебры. Именно, в [4] было доказано, что $(b+1)$-замыкание клеточной алгебры W шурово, где $b = b(W)$. (Фактически, число расщепления алгебры W, определённое в той статье, совпадает с b.) Мы упомянем также верхнюю оценку $b \le O(\sqrt{n}\log n)$ для примитивной клеточной алгебры W, не совпадающей с симплексом $S(V)$, доказанную в [1]. Наконец, для клеточных алгебр, возникающих из адамаровых матриц, логарифмическая верхняя оценка $b \le O(\log n)$ следует из [10].

4.3. Легко видеть, что (см. (10) и ниже) что $b(W) \le 1 = m_P/n_P$ для регулярной клеточной алгебры W и каждого $P \in \mathrm{Spec}(W)$. Это наблюдение можно обобщить следующим образом.

Теорема 4.3. *Пусть $W \le \mathrm{Mat}_V$ – примитивная клеточная алгебра. Тогда*

$$|B| \le m_P/n_P$$

для каждой несводимой базы B алгебры W и каждого неглавного идемпотента $P \in \mathrm{Spec}(W)$. В частности, $b(W) \le \min_P(m_P/n_P)$, где P пробегает множество всех таких идемпотентов.

Замечание 4.4. Оценка из утверждения теоремы точна. Равенство достигается, например, в случае, если W является симплексом или регулярной алгеброй.

Замечание 4.5. Примитивность алгебры W существенна. Действительно, пусть $W = \mathcal{Z}(G)$, где G есть группа перестановок на 21 точке, определённая действием группы PSL(3,2) на флагах. Тогда W имеет несводимую базу размера 4, в то время как $m_P/n_P = 3$ для её идемпотента P степени 2 и кратности 6.

Доказательство. Начнём с двух лемм.

Лемма 4.6 ([6]). *Пусть W – клеточная алгебра на V. Для $A \in \mathrm{Mat}_V$ положим*

$$\mathrm{Eq}(A) = \{(u,v) \in V \times V \mid Au = Av \neq 0\}.$$

Тогда $A \in W$ влечёт, что матрица смежности отношения $\mathrm{Eq}(A)$ принадлежит W.

Следующая лемма была доказана лишь в препринте [5]. Поэтому мы приводим здесь ее полное доказательство.

Лемма 4.7. *Пусть W – клеточная алгебра на V и $A \in W$ – матрица с попарно различными ненулевыми столбцами. Тогда $Av \in \sum_{i=1}^k Wv_i$ влечёт $\{v\} \in \mathrm{Cel}(W_{v_1,\dots,v_k})$, где $v, v_1, \dots, v_k \in V$.*

Доказательство. Пусть Av принадлежит $\sum_{i=1}^k Wv_i$, и матрица $B \in \mathrm{Mat}_V$ определена формулой

$$Bu = \begin{cases} Av, & \text{если } u \in \{v_1, \dots, v_k\}; \\ Au, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда легко видеть, что $B \in W_{v_1,\dots,v_k}$. По лемме 4.6 получаем, что $\mathrm{Eq}(B)$ является эквивалентностью алгебры $W_{v_1,\dots,v_k}$. Из условия на A вытекает, что $k \geq 1$ и что класс эквивалентности $\mathrm{Eq}(B)$, содержащий v_1, совпадает с множеством $\{v_1, \dots, v_k, v\}$. Обозначим через U клетку алгебры $W_{v_1,\dots,v_k}$, содержащую v. Тогда $\{v_1\} \times U$ является базисным отношением алгебры $W_{v_1,\dots,v_k}$. Таким образом, $U \subset \{v_1, \dots, v_k, v\}$, откуда $U = \{v\}$.

Вернёмся к доказательству теоремы. Пусть $B = \{v_1, \dots, v_b)$ – несводимая база алгебры W и $P \in \mathrm{Spec}(W)$ – её неглавный идемпотент. Покажем, что сумма

$$L_k = \sum_{i=1}^k WPv_i \tag{14}$$

является прямой для $k \in [0, b]$. Достаточно проверить, что $WPv_k \cap L_{k-1} = \{0\}$ для всех $k \in [b]$. Пусть $Av_k \in L_{k-1}$ для некоторой матрицы $A \in WP$. Тогда несводимость B гарантирует по лемме 4.7, что отношение $\mathrm{Eq}(A)$ отлично от диагонали множества $V \times V$. Поэтому либо матрица A имеет нулевой столбец, либо $\mathrm{Eq}(A)$ является эквивалентностью алгебры W по лемме 4.6. В обоих случаях $A = 0$. В первом случае это следует из однородности алгебры W. Во втором случае примитивность алгебры W влечёт, что $\mathrm{Eq}(A) = V \times V$. Это означает, что A кратна J_V и потому $A = 0$ по выбору P.

По лемме 4.1 получаем, что $\dim(WPv_i) = n_P^2$ для всех i. С другой стороны, $L_b \subset P\mathbb{C}^V$ и $\dim(P\mathbb{C}^V) = m_P n_P$. Таким образом, прямое разложение (14) с $k = b$ влечёт неравенство

$$bn_P^2 \le m_P n_P,$$

что и доказывает теорему.

Для формулировки следствий 4.8 и 4.12 определим для однородной алгебры $W \le \mathrm{Mat}_V$ среднюю степень d_{av} и средневзвешенную двойственную степень $\widehat{d}_{av}$ формулами

$$\begin{aligned} d_{av}(W) &= \Big(\sum_R d(R) \Big) / (|\mathcal{R}| - 1), \\ \widehat{d}_{av}(W) &= \Big(\sum_P \widehat{d}(P) n_P^2 \Big) / \Big(\sum_P n_P^2 \Big), \end{aligned} \tag{15}$$

где $\mathcal{R} = \mathcal{R}(W)$, $\widehat{d}(P) = m_P/n_P$ и R (соотв. P) пробегает множество всех неединичных матриц из $\mathcal{R}$ (соотв. всех неглавных идемпотентов из $\mathrm{Spec}(W)$). В соответствии с (3), (9) и (7) мы имеем:

$$d_{av} \cdot (r-1) = \sum_{R \ne I_V} d(R) = n - 1 = \sum_{P \ne J_V/n} m_P n_P = \widehat{d}_{av} \cdot (r-1),$$

где $r = |\mathcal{R}(W)| = \dim(W)$ и $d_{av} = d_{av}(W)$, $\widehat{d}_{av} = \widehat{d}_{av}(W)$. Таким образом,

$$d_{av}(W) = \widehat{d}_{av}(W). \tag{16}$$

Теорема 4.3 влечет в силу (16) следующее утверждение.

Следствие 4.8. *Если W примитивная алгебра, то $b(W) \le d_{av}(W)$.*

Согласно теореме III.5.B из [12] обёртывающая алгебра $\mathrm{Env}(G)$ группы перестановок $G \leqslant \mathrm{Sym}(V)$ совпадает с коммутаторной алгеброй алгебры $\mathcal{Z}(G)$ в Mat_V и обратно. Более того, $\mathrm{Spec}(\mathrm{Env}(G)) = \mathrm{Spec}(\mathcal{Z}(G))$. И, наконец, степень n_π (кратность m_π) неприводимого представления группы G, отвечающее идемпотенту P, совпадает с m_P (соотв. n_P). Таким образом, теорема 4.3 и следствие 4.8 влекут в силу (13) и (16) следующее утверждение, доказанное иным путем в [11].

Следствие 4.9. *Если G – примитивная группа перестановок, то*

$$b(G) \le \min_{\pi}(n_\pi/m_\pi) \le (n-1)/(r-1),$$

где π пробегает все неглавные неприводимые представления группы G, входящие в её перестановочное представление, и r – ранг G.

4.4. Имеется очевидная верхняя оценка

$$|\operatorname{Aut}(W)| \le n^{b(W)}$$

порядка группы автоморфизмов клеточной алгебры W. Следующее утверждение даёт более сильную оценку порядка в примитивном случае.

Теорема 4.10. *Пусть W – примитивная клеточная алгебра на V. Тогда для каждого её нерефлексивного базисного отношения R существует такая несводимая база B, что*

$$|\operatorname{Aut}(W)| \le nd^{b-1},$$

где $d = d(R)$ – степень отношения R и $b = |B|$ – размер базы B.

Замечание 4.11. Утверждение теоремы остаётся справедливым, если W – произвольная клеточная алгебра, R – связное отношение на V, являющееся объединением базисных отношений S алгебры W и $d = \max_S\{d_{in}(S), d_{out}(S)\}$.

Доказательство. Пусть R – нерефлексивное базисное отношение алгебры W. Примитивность последней влечёт, что оно является сильно связным. Поэтому

$$\forall v_1, \dots, v_i \in V : W_{v_1,\dots,v_i} \ne \mathrm{Mat}_V \;\;\Rightarrow\;\; \exists u \in X_i : R(u) \not\subseteq X_i,$$

где $X_i = \{v \in V : \{v\} \in \mathrm{Cel}(W_{v_1,\dots,v_i})\}$. Это влечёт, что существует такая несводимая база $B = (v_1, \dots, v_b)$, что $v_{i+1} \in V \setminus X_i$ и $R^T(v_{i+1}) \cap X_i \ne \emptyset$ для всех $i \in [b-1]$. Следовательно,

$$[G_{v_1,\dots,v_i} : G_{v_1,\dots,v_{i+1}}] \le d, \qquad i \in [b-1],$$

где $G = \operatorname{Aut}(W)$. Поскольку $[G : G_{v_1}] \le n$, теорема доказана.

Теоремы 4.3 и 4.10 позволяют в силу (16) оценить порядок группы автоморфизмов примитивной клеточной алгебры в терминах двойственных степеней $\widehat{d}(P) = m_P/n_P$ и степеней $d(R)$.

Следствие 4.12. *Пусть $W \leq \mathrm{Mat}_V$ – примитивная клеточная алгебра. Тогда*
$$|\,\mathrm{Aut}(W)| \leq n \cdot (d_{min})^{\widehat{d}_{min}-1},$$
а также
$$|\,\mathrm{Aut}(W)| \leq n \cdot (d_{min})^{d_{av}-1}, \quad |\,\mathrm{Aut}(W)| \leq n \cdot (\widehat{d}_{av})^{\widehat{d}_{min}-1},$$
где d_{min} (соотв. d_{av}) есть минимальная (соотв. средняя) степень нерефлексивного базисного отношения алгебры W, и $\widehat{d}_{min}$ (соотв. $\widehat{d}_{av}$) есть минимальная (соотв. средневзвешенная) двойственная степень неглавного идемпотента $P \in \mathrm{Spec}(W)$ (см. (15)).

Замечание 4.13. Знаменитая гипотеза Симса, доказанная в [3] в предположении завершения классификации конечных простых групп, (CFSG) утверждает, что $|G| \leq nf(d)$, где $G \leq \mathrm{Sym}(V)$ – примитивная группа перестановок и d – её минимальная подстепень (совпадающая с d_{min} алгебры $\mathcal{Z}(G)$). Первые два неравенства следствия 4.12 с $W = \mathcal{Z}(G)$ дают другие верхние границы для $|G|$. Было бы интересно оценить d_{av} или $\widehat{d}_{min}$ функцией от d_{min}; это дало бы новое доказательство гипотезы Симса, не опирающееся на CFSG.

В завершении параграфа отметим, что по теореме 4.2 из [6] неравенство $d_{min} \leq 2^{O(m_P)}$ выполнено равномерно для всех неглавных идемпотентов $P \in \mathrm{Spec}(W)$ примитивной клеточной алгебры W. В силу теорем 4.10 и 4.3 это показывает, что неравенство
$$|\,\mathrm{Aut}(W)| \leq n \cdot 2^{O(m_P^2/n_P)} \tag{17}$$
также выполняется равномерно для всех таких P.

§5. 2-замкнутые примитивные клеточные алгебры

5.1. Понятие m-замкнутой клеточной алгебры было введено в [4] в связи с проблемой шуровости. Оно восходит к работе [13], где сходное понятие определялось алгоритмически. Мы начнём с основных определений, относящихся к сильно замкнутым клеточным алгебрам.

Пусть W – клеточная алгебра на V. Для каждого натурального числа m положим
$$\widehat{W}^{(m)} = [\underbrace{W \otimes \cdots \otimes W}_{m},\ \mathcal{Z}(\mathrm{Sym}(V), V^m)],$$

считая группу $\mathrm{Sym}(V)$ действующей на V^m покоординатно. Клеточная алгебра $\widehat{W}^{(m)} \leqslant \mathrm{Mat}_{V^m}$ называется *m-мерной расширенной алгеброй* алгебры W. Группа $\mathrm{Aut}(\widehat{W}^{(m)})$ действует точно на инвариантном множестве $\Delta = \{(v,\dots,v) : v \in V\}$. Более того, отображение $\delta : v \mapsto (v,\dots,v)$ индуцирует изоморфизм группы $\mathrm{Aut}(W)$ и составляющей группы $\mathrm{Aut}(\widehat{W}^{(m)})$ на Δ[1].

Важной чертой клеточной алгебры $\widehat{W}^{(m)}$ оказывается следующая возможность расширения алгебры W без изменения её группы автоморфизмов. Положим

$$\overline{W}^{(m)} = ((\widehat{W}^{(m)})_\Delta)^{\delta^{-1}}.$$

Мы называем $\overline{W}^{(m)}$ *m-замыканием* алгебры W и говорим, что W является *m-замкнутой*, если $W = \overline{W}^{(m)}$. Каждая клеточная алгебра, очевидно, 1-замкнута. Однако, существуют алгебры, не являющиеся 2-замкнутыми (см. п. 5.3). Следующее предложение описывает соотношение между m-замыканием и шуровым замыканием $\mathrm{Sch}(W) = \mathcal{Z}(\mathrm{Aut}(W))$ клеточной алгебры W.

Предложение 5.1 ([4]). *Для каждой клеточной алгебры W на V имеют место следующие утверждения:*

(1) $\mathrm{Aut}(\overline{W}^{(m)}) = \mathrm{Aut}(W)$ *для всех* $m \geq 1$;
(2) $W = \overline{W}^{(1)} \leq \ldots \leq \overline{W}^{(n)} = \ldots = \mathrm{Sch}(W)$;
(3) $\overline{(\overline{W}^{(m)})}^{(l)} = \overline{W}^{(m)}$ *для всех* $l \in [m]$.

Таким образом, в некотором смысле алгебра $\overline{W}^{(m)}$ может рассматриваться как аппроксимация алгебры $\mathrm{Sch}(W)$.

5.2. Ниже мы ограничиваемся случаем $m = 2$. Как будет видно из следующего пункта даже в этом случае свойства m-замкнутых клеточных алгебр отличаются от свойств общих клеточных алгебр (по крайней мере в примитивном случае). Мы будем пользоваться следующей леммой, описывающей структуру 2-расширенных алгебр, которая вытекает из предложения 3.6 и лемм 2.6 и 3.1, доказанных в [4].

[1]Можно показать, что на самом деле $\widehat{W}^{(m)} = [W \otimes \cdots \otimes W, I_\Delta]$.

Лемма 5.2. *Пусть W – клеточная алгебра на V и $\widehat{W} = \widehat{W}^{(2)}$, $\overline{W} = \overline{W}^{(2)}$. Тогда*

(1) *Подмножество R множества $V \times V$ является базисным отношением алгебры $\overline{W}$ тогда и только тогда, когда оно есть клетка алгебры $\widehat{W}$.*

(2) *Для каждой точки $v \in V$ множество $\widehat{W}_U = I_U \widehat{W} I_U$, где $U = U_v = \{v\} \times V$, может естественным образом рассматриваться как клеточная алгебра на U. Более того, $(W_v)^{\zeta_U} \le \widehat{W}_U$, где биекция $\zeta_U : V \to U$ определяется формулой $u^{\zeta_U} = (v, u)$.*

(3) *Для любых двух точек v, v' из одной и той же клетки алгебры $\overline{W}$ существует слабый изоморфизм $\psi : \widehat{W}_U \to \widehat{W}_{U'}$, где $U = U_v$ и $U' = U_{v'}$, такой, что $\psi(I_{(v,v)}) = I_{(v',v')}$ и $\psi(A^{\zeta_U}) = A^{\zeta_{U'}}$ для всех $A \in W$.*

Если G – группа перестановок на V, то, очевидно, $\mathrm{Cel}(\mathcal{Z}(G_v)) = \mathrm{Orb}(G_v)$, $v \in V$, и $\mathcal{Z}(G_v) \cong \mathcal{Z}(G_{v'})$ для v, v', принадлежащих одной и той же G-орбите (поскольку G_v и $G_{v'}$ изоморфны как группы перестановок). Следующее утверждение обобщает эти факты на 2-замкнутые клеточные алгебры.

Лемма 5.3. *Пусть W – 2-замкнутая клеточная алгебраа на V. Тогда*

(1) $\mathrm{Cel}(W_v) = \{R(v) : R \in \mathcal{R}\}$, *где $v \in V$ и $\mathcal{R}$ – множество базисных отношений алгебры W.*

(2) *Для любых двух точек v, v', принадлежащих одной и той же клетке алгебры W, существует такой слабый изоморфизм $\varphi = \varphi_{v,v'} : W_v \to W_{v'}$, что $\varphi(I_v) = I_{v'}$ и $\varphi(A) = A$ для всех $A \in W$.*

Доказательство. Пусть $v \in V$. Тогда $V = \bigcup_{R \in \mathcal{R}} R(v)$. Таким образом, для доказательства (1) достаточно проверить, что $R(v)$ является клеткой алгебры W_v для всех R. Пусть $R \in \mathcal{R}$. По утверждению (1) леммы 5.2 получаем, что $R \in \mathrm{Cel}(\widehat{W})$. С другой стороны, из первой части утверждения (2) леммы 5.2 следует, что $\widehat{W}_U = I_U \widehat{W} I_U$ является клеточной алгеброй на множестве $U = U_v$. Поэтому множество $U \cap R$ есть клетка алгебры $\widehat{W}_U$. Используя вторую часть утверждения (2) леммы 5.2, заключаем, что существует такая клетка $X \in \mathrm{Cel}(W_v)$, что $X^{\zeta} \supset U \cap R$, где $\zeta = \zeta_U$.

Из равенства $(R(v))^{\zeta} = U \cap R$ следует, что $X \supset R(v)$. Однако, $R(v) \in \mathrm{Cel}^*(W_v)$. Таким образом $X = R(v)$ и потому $R(v)$ является клеткой алгебры W.

Для доказательства (2) в обозначениях леммы 5.2 положим $\widetilde{W} = (\widehat{W}_U)^{\zeta_U^{-1}}$ и $\widetilde{W}' = (\widehat{W}_{U'})^{\zeta_{U'}^{-1}}$. Тогда по утверждение (2) этой леммы клеточные алгебры $\widetilde{W}$ и $\widetilde{W}'$ на V, содержат W_v и $W_{v'}$ соответственно. Утверждение (3) той же леммы влечёт тогда, что отображение

$$\widetilde{\varphi} : \widetilde{W} \to \widetilde{W}', \quad \widetilde{\varphi}(A) = (\psi(A^{\zeta_U})^{\zeta_{U'}^{-1}},$$

является слабым изоморфизмом из $\widetilde{W}$ в $\widetilde{W}'$. Алгебра W_v (соотв. $W_{v'}$) есть наименьшая клеточная подалгебра алгебры $\widetilde{W}$ (соотв. $\widetilde{W}'$), содержащая W и I_v (соотв. W и $I_{v'}$). Таким образом, $\widetilde{\varphi}(W_v) = W_{v'}$ по утверждению (3) леммы 5.2. Требуемый изоморфизм φ получается теперь ограничением $\widetilde{\varphi}$ на W_v.

Доказанная лемма имеет интересное следствие, относящееся к клеточным алгебрам, имеющим нерефлексивное базисное отношение степени 1.

Следствие 5.4. *Пусть W – 2-замкнутая однородная клеточная алгебра на V и E – её эквивалентность, являющаяся объединением базисных отношений степени 1. Тогда $U \in \mathrm{Cel}(W[I_U])$ для каждого класса $U \in V/E$.*

Доказательство. Из условия на E следует, что $W_u = W_v = \widetilde{W}$ для всех $u, v \in U$. Поэтому множество $\{\varphi_{u,v} : u, v \in U\}$ содержится в группе всех слабых изоморфизмов алгебры $\widetilde{W}$ на себя. Таким образом, по утверждению (2) леммы 5.3 это множество содержится в подгруппе Φ, сохраняющей стандартный базис алгебры W. Поэтому Φ действует транзитивно на множестве $\{I_u : u \in U\}$. Это влечёт, что U является клеткой клеточной алгебры $\widetilde{W}^{\Phi}$ (см. лемму 3.1). Для завершения доказательства остаётся заметить, что $\widetilde{W}^{\Phi} \geq W[I_U]$, поскольку последняя алгебра является наименьшей клеточной надалгеброй алгебры W, содержащей I_U.

5.3. В этом пункте мы устанавливаем свойства 2-замкнутых примитивных клеточных алгебр, которые обобщают аналогичные свойства примитивных групп перестановок. В каждом случае "теорема о группах перестановок" может быть выведена из соответствующей "теоремы о клеточных алгебрах" с использованием того факта, что централизаторная алгебра $\mathcal{Z}(G)$ примитивной группы G также примитивна, а также простейших свойств 2-эквивалентных групп перестановок (см. [16]). В конце этого пункта мы приводим пример, показывающий, что условие 2-замкнутости примитивной алгебры является существенным. Начнём с характеризации 2-замкнутых примитивных алгебр (см. [15, теорема 8.2]).

Теорема 5.5. *Пусть W – 2-замкнутая однородная клеточная алгебра на V. Тогда W примитивна в том и только в том случае, когда алгебра W_v является минимальной клеточной надалгеброй алгебры W для всех $v \in V$.*

Доказательство. Пусть W примитивна и W' – клеточная алгебра на V, для которой $W_v > W' \geqslant W$. Обозначим через U клетку алгебры W', содержащую точку v. Тогда $U \neq \{v\}$, ибо в противном случае $W' \geq W_v$. Таким образом, существует нерефлексивное базисное отношение R алгебры W, для которого $R(v) \cap U \neq \emptyset$. С другой стороны, по утверждению (1) леммы 5.3 мы заключаем, что $R(v) \in \mathrm{Cel}(W_v)$. Это влечёт, что $R(v)$ содержится в некоторой клетке алгебры W'. По выбору R эта клетка совпадает с U, то есть $R(v) \subset U$. Принимая во внимание, что множество $R \cap (U \times U)$ является объединением базисных отношений однородной компоненты W'_U алгебры W', мы заключаем, что $R(u) \subset U$ для всех $u \in U$. Поскольку R сильно связно (здесь мы пользуемся примитивностью алгебры W), это показывает, что $U = V$. Применяя утверждение (1) леммы 5.3 к $W_v = W'_v$, мы видим, что каждое базисное отношение алгебры W является также базисным отношением алгебры W'. Таким образом $W' = W$.

Обратно, пусть E – эквивалентность алгебры W, $E \neq V \times V$, и U – класс E. Тогда имеется включение $W[I_U] \leq W_v$ для всех $v \in U$. Поскольку $W[I_U] \neq W$ (выбор E), минимальность алгебры W_v влечёт, что $W[I_U] = W_v$ для всех $v \in U$. По лемме 5.3 отсюда следует, что $d(R) = 1$ для всех базисных отношений R алгебры W таких, что $R \subset E$. Таким образом, эквивалентность E удовлетворяет условию следствия 5.4. Следовательно, $U \in \mathrm{Cel}(W[I_U])$ и потому $|U| = 1$. Это показывает, что эквивалентность E тривиальна.

Следующее утверждение обобщает предложение 8.7 из [15].

Теорема 5.6. *Пусть W – 2-замкнутая примитивная клеточная алгебра на V и u, v – различные точки из V. Тогда либо $W = W_u \cap W_v$ либо $W \cong \mathcal{Z}(C_p)$ для некоторого простого числа p.*

Доказательство. По теореме 5.5 мы заключаем, что клеточная алгебра $W_u \cap W_v$ совпадает с W или W_u. В последнем случае, также $W_u = W_v$. В силу 2-замкнутости алгебры W из леммы 5.3 следует, что ее базисное отношение R, для которого $v \in R(u)$, имеет степень 1. Таким образом, $W \cong \mathcal{Z}(C_p)$ по лемме 2.1.

В следующей теореме мы используем обозначения $\mathrm{Cel}^{\mathrm{prim}}(W)$ (соотв. $\mathrm{Cel}^{\mathrm{impr}}(W)$) для множества клеток клеточной алгебры W, отвечающих ее примитивным (соотв. импримитивным) однородным компонентам и $\mathrm{Fix}(W)$ для множества точек W отвечающих ее клеткам мощности 1.

Теорема 5.7. *Пусть W – 2-замкнутая примитивная клеточная алгебра на V, $v \in V$ и U – максимальная по мощности клетка алгебры W_v. Тогда*

(1) *$|(\mathcal{R}_v)_{U,U'}| = 1$ для некоторой $U' \in \mathrm{Cel}(W_v) \setminus \{v\}$ тогда и только тогда, когда $W \cong \mathcal{Z}(C_p)$ для простого числа p.*
(2) *$|(\mathcal{R}_v)_{U,U}| = 2$ тогда и только тогда, когда либо $W \cong \mathcal{Z}(D_p)$ для нечетного простого числа p, либо W есть симплекс на V.*
(3) *$U' \subset \mathrm{Fix}(W_{[U]})$ для всех $U' \in \mathrm{Cel}^{\mathrm{prim}}(W_v)$.*
(4) *если $U \in \mathrm{Cel}^{\mathrm{prim}}(W_v)$, то $U \subset \mathrm{Fix}(W_{[U']})$ для всех $U' \in \mathrm{Cel}(W_v) \setminus \{v\}$,*

где $\mathcal{R}_v = \mathcal{R}(W_v)$.

Доказательство. По лемме 5.3 утверждения (1) и (2) вытекают из следующей леммы.

Лемма 5.8. *Если $W \leqslant \mathrm{Mat}_V$ примитивная алгебра и $R \in \mathcal{R}$ причем $d(R) = d_{max}$, то*

(1) *$c_{R,S}^T = d(R)$ для некоторых $S, T \in \mathcal{R}$, $T \neq \Delta_V$ тогда и только тогда, когда $W \cong \mathcal{Z}(C_p)$ для простого числа p.*
(2) *$c_{R,S}^R = d(R) - 1 > 0$ для некоторой $S \in \mathcal{R}$ тогда и только тогда, когда либо $W \cong \mathcal{Z}(D_p)$ для нечетного простого числа p, либо W есть симплекс на V,*

где $\mathcal{R} = \mathcal{R}(W)$ и $c_{R,S}^T$ – структурные константы алгебры W.

Доказательство. Мы докажем только необходимость утверждений (1) и (2), поскольку их достаточность тривиальна. Из условия утверждения (1) следует, что $S \supset R(v) \times T(v)$, где $v \in V$. Ясно, что $S^T(u) \supset R(v)$ для всех $u \in T(v)$. Поэтому

$$S^T(u) = R(v), \quad u \in T(v) \tag{18}$$

по выбору R. Эквивалентность на V, определенная так, что $u \sim w$ тогда и только тогда, когда $S^T(u) = S^T(w)$, совпадает с Δ по примитивности W и лемме 4.6 (примененной к матрице смежности отношения S^T). Следовательно, $d(T) = |T(v)| = 1$ в силу (18), то есть $W \cong \mathcal{Z}(C_p)$ (см. лемму 2.1).

Из условия утверждения (2) следует, что R и S – нерефлексивные отношения, причем $S = S^T$ и $d(S) \geqslant d(R) - 1$. Более того, $d(S) \neq d(R) - 1$ в силу примитивности W (в противном случае отношение $S \cup \Delta$ является нетривиальной эквивалентностью алгебры W с классами мощности $d(R)$). Так что $d(S) = d(R)$ по выбору R. Пусть $v \in V$ и $u \in U$, где $U = R(v)$. Тогда $S(u) = (U \setminus \{u\}) \cup \{u'\}$ для некоторой $u' \in V \setminus U$. Число $|S(w) \cap S(u)|$ не зависит от выбора $w \in S(u)$, поскольку совпадает со структурной константой $c_{S,S}^S$. Если $W \ncong \mathcal{Z}(D_p)$, то $|U| \geqslant 3$ по лемме 2.1. Последнее неравенство влечет, что $|S(w) \cap S(u)| \geqslant |U| - 2 > 0$ для всех $w \in U \setminus \{u\}$. Поэтому из доказанного выше следует, что $S(u') \cap S(u) \neq \emptyset$. Следовательно, $|S(w) \cap S(u)| = d(R) - 1$ для всех $w \in S(u') \cap S(u)$ и потому для $w = u'$. Это означает, что множество $U \cup \{u'\}$ есть класс эквивалентности $S \cup \Delta$. Поскольку W примитивна, мы заключаем, что $u' = v$, $S = R$ и, значит, W является симплексом.

Докажем утверждения (3) и (4). Для пары клеток U_1, U_2 алгебры W_v определим эквивалентность $E_{U_1}(U_2)$ на U_1 полагая

$$E_{U_1}(U_2) = \{(u, u') \in U_1 \times U_1 : S(u) = S(u') \text{ для всех } S \in (R_v)_{U_1,U_2}\}.$$

Тогда по лемме 4.6 она является эквивалентностью алгебры $(W_v)_{U_1}$. Кроме того, равенство $E_{U_1}(U_2) = \Delta_{U_1}$ очевидно влечет, что ограничение $(W_v)_{[U_2]}$ на U_1 совпадает с Mat_{U_1}. Так что (3) и (4) являются следствиями (1) для $U_1 = U'$, $U_2 = U$ и $U_1 = U$, $U_2 = U'$ соответственно при условии, что $v \in \mathrm{Fix}(W_{[X]})$ для всех $X \in \mathrm{Cel}(W_v)$. Для завершения доказательства пусть $X \in \mathrm{Cel}(W_v)$

и v' принадлежит клетке алгебры $W_{[X]}$, содержщей v. Тогда $S(v') = S(v)$, где S – базисное отношение алгебры W с $S(v) = X$ (см. лемму 5.3). Таким образом $v = v'$ по лемме 4.6.

Следующий результат, вытекающий из утверждений (3) и (4) теоремы 5.7 обобщает теорему 17.6 из [15] о точных инвариантных множествах стабилизатора точки примитивной группы перестановок. Под базой алгебры $W \leqslant \mathrm{Mat}_V$ мы понимаем ниже множество $B \subset V$, для которого $W_{[B]} = \mathrm{Mat}_V$.

Теорема 5.9. *Пусть* $X = \mathrm{Cel}^{\mathrm{impr}}(W_v)$. *Тогда*

(1) *если* $X \neq \emptyset$, *то множество* $\bigcup_{U' \in X} U'$ *есть база алгебры* W;
(2) *если* $X = \emptyset$, *то любая клетка алгебры* W_v, *отличная от* $\{v\}$, *есть база алгебры* W.

Замечание 5.10. Очевидно, в предположении утверждения (2) теоремы 5.9 мы имеем неравенство $|\mathrm{Aut}(W)| \leqslant nk!$, где $k = d_{min}(W)$, которое влечет гипотезу Симса для примитивных групп с примитивными составляющими стабилизатора точки. Кроме того, в этом случае $d(R) \leqslant \binom{k}{\lfloor k/2 \rfloor}$ для всех базисных отношений R алгебры W. (Действительно, пусть $U, U' \in \mathrm{Cel}(W_v) \setminus \{v\}$, причем U – максимальная по мощности клетка алгебры W_v, и $|U'| = k$. Тогда для любого базисного отношения $S \subset U \times U'$ алгебры W_v множества $S(u)$, $u \in U$, попарно различны в силу утверждения (1) теоремы 5.7.)

Для проверки того, что предположение о 2-замкнутости алгебры W является существенным, рассмотрим нешурову примитивную клеточную алгебру $W = T(15)$ на $V = [15]$, определённую в п. 2.2. Прямым вычислением легко показать, что существует точка $v_0 \in V$, для которой выполнены следующие утверждения:

(1) W_{v_0} имеет три клетки: две мощности 7 и одну мощности 1;
(2) если $v \neq v_0$, то W_v имеет семь клеток: четыре мощности 3 и три мощности 1;
(3) $W_v > W_{v_0}$ для $v \neq v_0$.

Выберем произвольную точку $v \in V$, отличную от v_0. Тогда легко видеть, что утверждения (1) и (2) леммы 5.3 не выполняются для точки v и пары (v_0, v) соответственно. Поэтому алгебра W не может быть 2-замкнута. (На самом деле, $\overline{W}^{(2)} = \mathrm{Sch}(W)$). С другой стороны, заключение теоремы 5.5 не выполнено, из (3) следует, что W_v не является минимальной надалгеброй алгебры W.

Аналогично можно показать, что для алгебры W заключения теорем 5.6 и 5.9 также несправедливы.

5.4. Известно, что каждая 3/2-транзитивная группа перестановок либо примитивна, либо является группой Фробениуса (см. теорему 10.4 в [15]). Следующее утверждение обобщает этот результат на клеточные алгебры (см. также [13]).

Теорема 5.11. *Пусть W – 2-замкнутая однородная клеточная алгебра на V. Предположим, что $d(R) = d(S)$ для всех её нерефлексивных базисных отношений R, S. Тогда алгебра W является шуровой и каждая её несводимая база имеет размер самое большее 2, за исключением разве лишь случая, когда W примитивна.*

Замечание 5.12. Если W импримитивна, то теорема показывает, что $W = \mathcal{Z}(G)$, где G либо группа Фробениуса, либо регулярная группа перестановок.

Доказательство. Мы воспользуемся следующей леммой.

Лемма 5.13. *Пусть W – импримитивная клеточная алгебра на V причем $d(R) = d(S)$ для всех ее нерефлексивных базисных отношений R, S. Тогда $(W_v)_{V\setminus\{v\}}$ – полурегулярная алгебра на $V\setminus\{v\}$, $v \in V$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{R}$ – множество базисных отношений алгебры W, E – её эквивалентность и $U \in V/E$. Тогда

$$|U| = \sum_{R\in\mathcal{R},\ \mathcal{R}\subset E} d(R) = d(a-1)+1,$$

где d – степень любого нерефлексивного базисного отношения алгебры W, и a – мощность множества, по которому производится суммирование. Поэтому

$$\mathrm{GCD}(d, |U|) = 1. \tag{19}$$

Для $v \in V$ положим $\mathcal{S} = \mathcal{S}(v, U) = \{S \in \mathcal{R} : S(v) \cap U \neq \emptyset\}$. Тогда множества $\mathcal{S}(v, U)$ для различных U либо совпадают, либо не пересекаются (см. [13]). Таким образом, множество $\bigcup_{S\in\mathcal{S}} S(v)$ является объединением классов эквивалентности E и, следовательно,

$$d|\mathcal{S}| = \sum_{S\in\mathcal{S}} d(S) = |U|l$$

для некоторого положительного целого числа l. Из (19) следует, что $|U|$ делит $\mathcal{S}$. Поскольку $|\mathcal{S}| \le |U|$, мы заключаем, что $|\mathcal{S}| = |U|$. Это влечёт неравенство

$$|R(v) \cap U| \le 1, \quad U \in V/E, \quad v \in V \setminus U \tag{20}$$

для всех $R \in \mathcal{R}$.

Пусть $v \in V$. Предполагая эквивалентность E нетривиальной обозначим через U ее класс, содержащий v. Тогда достаточно доказать, что $d_{in}(R) = d_{out}(R) = 1$ для всех $R \in \mathcal{R}_v$, содержащихся в $V^\# \times V^\#$, где $\mathcal{R}_v$ – множество базисных отношений алгебры W_v и $V^\# = V \setminus \{v\}$. Поскольку $W_v \ge W[I_U]$, мы видим, что для каждой клетки $X \in \mathrm{Cel}(W_v)$ либо $X \subset U$, либо $X \cap U = \emptyset$. Пусть X и X' суть клетки алгебры W_v, для которых $X \subset U^\#$ и $X' \cap U = \emptyset$, где $U^\# = U \setminus \{v\}$. Тогда в силу (20) для произвольной $u \in X'$ пары (u, w) и (u, w') с различным $w, w' \in X$ принадлежат различным базисным отношениям алгебры W. Поэтому число базисных отношений алгебры W_v, содержащихся в $X' \times X$, равно как $|X|$, так и $|X'|$. Следовательно, $|X| = |X'|$ и мы заключаем, что

$$\forall R \in \mathcal{R}_v : (R \subset U^\# \times (V \setminus U) \ \Rightarrow\ d_{in}(R) = d_{out}(R) = 1).$$

Для завершения доказательства заметим, что каждая базисная матрица алгебры W_v с носителем в $U^\# \times U^\#$ или в $(V \setminus U) \times (V \setminus U)$ может быть представлена в виде произведения двух базисных матриц из W_v с носителями в $U^\# \times (V \setminus U)$ и $(V \setminus U) \times U^\#$.

Обратимся к доказательству теоремы. Из леммы 5.13 и утверждения (2) леммы 5.3 следует, что группа $\mathrm{Aut}(W)$ транзитивна (мы используем тот факт, что любой слабый изоморфизм полурегулярных алгебр индуцируется сильным изоморфизмом). Поэтому достаточно проверить, что группа $\mathrm{Aut}(W)_v$, совпадающая с $\mathrm{Aut}(W_v)$ действует транзитивно на $R(v)$ для всех $R \in \mathcal{R}$, где $v \in V$. Однако из утверждения (1) леммы 5.3 следует, что множество $R(v)$ является клеткой алгебры W_v, которая шурова по лемме 5.13.

Литература

1. L. Babai, *On the order of uniprimitive permutation groups.* — Ann. of Math. **113** (1981), 553–568.
2. A. E. Brouwer, A. M. Cohen, A. Neumaier, *Distance-Regular graphs.* Springer, Berlin (1989).
3. P. J. Cameron, C. E. Praeger, J. Saxl, G. M. Seitz, *On the Sims conjecture and distance-transitive graphs.* — Bull. London Math. Soc. **15** (1983), 499–506.
4. S. A. Evdokimov, M. Karpinski, I. N. Ponomarenko, *On a New High Dimensional Weisfeiler-Lehman Algorithm.* — J. of Algebraic Combinatorics **10** (1999).
5. S. A. Evdokimov, I. N. Ponomarenko, *Isomorphism of Coloured Graphs with Slowly Increasing Multiplicity of Jordan Blocks.* Research Report No. 85136-CS, University of Bonn (April 1995).
6. С. А. Евдокимов, И. Н. Пономаренко, *Два неравенства для параметров клеточной алгебры.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **240** (1997), 82–95.
7. S. A. Evdokimov, I. N. Ponomarenko, *On Primitive Cellular Algebras.* Research Report No. 85168-CS, University of Bonn (February 1997).
8. I. A. Faradžev, M. H. Klin, M. E. Muzichuk, *Cellular rings and groups of automorphisms of graphs.* in: I.A. Faradžev et al. (eds): Investigations in algebraic theory of combinatorial objects, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht.
9. D. G. Higman, *Coherent algebras.* — Linear Algebra Appl. **93** (1987), 209–240.
10. J. S. Leon, *An algorithm for computing the automorphism group of a Hadamard matrix.* — J. of Combin. Theory **A27** (1979), 289–306.
11. G. R. Robinson, *On the base size and rank of a primitive permutation group.* — J. of Algebra **187** (1997), 320–321.
12. C. C. Sims, *Computation with Permutation Groups.* in: Proc. Second Symp. on Symbolic and Alg. Manip., ACM, New York.
13. B. Weisfeiler (editor), *On the construction and identification of graphs.* — Lect. Notes. Math. **558** (1976).
14. H. Weyl, *Classical groups. Their invariants and representations.*
15. H. Wielandt, *Finite permutation groups.* Academic press, New York–London (1964).
16. H. Wielandt,, *Permutation groups through invariant relations and invariant functions.* Lect. Notes Dept. Math. Ohio St. Univ., Columbus (1969).

Evdokimov S. A. and Ponomarenko I. N. On primitive cellular algebras.

First we define and study the exponentiation of a cellular algebra by a permutation group which is similar to the corresponding operation (the wreath product in primitive action) in permutation group theory. Necessary and sufficient conditions for the resulting cellular algebra to be primitive and Schurian are given. This enables us to construct infinite series of primitive non-Schurian algebras. Also we define and study for cellular algebras the notion of a base which is similar to that for permutation groups. We present an upper bound for the size of an irredundant base of a primitive cellular algebra in terms of the parameters of its standard representation. This produces new upper bounds for the order of the automorphism group of such an algebra and in particular for the order of a primitive permutation group. Finally we generalize to 2-closed primitive algebras some classical theorems for primitive groups and show that the hypothesis for a primitive algebra to be 2-closed is essential.

С.-Петербургский институт
Информатики и Автоматизации
РАН

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 19 февраля 1999 г.