Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 256, 1999 г.

М. В. Желудев

ЗАМОЩЕНИЯ РАЗЛОЖИМЫХ ГРУПП

В этой статье исследуется задача, поставленная А. М. Вершиком в связи с некоторыми проблемами траекторной теории. Пусть S – конечное подмножество счетной группы G. Существует ли конечное подмножество P, содержащее S, такое что $G = \bigcup_{i\in I} g_iP$, где $\{g_i\} \subset G$ и для любых $i \neq j$ $g_iP \cap g_jP = \emptyset$? В этой ситуации мы будем говорить, что G можно замостить множеством P. Данная задача решается в случае, когда группа G разложима в свободное произведение нетривиальных конечно-порожденных групп (см. *Теорема 2.3*).

§1. Графы Кэли

Пусть G – группа. Зафиксируем множество ее образующих $\{e_i\}$. Напомним, что правым групповым графом Кэли [1] называется граф $\Gamma_r(G) = (V,E)$, где множество вершин V совпадает с множеством G, а E – множество неориентированных ребер, причем $(a,b) \in E$ тогда и только тогда, когда $a = be_i^\sigma$, где $\sigma \in \{-1,1\}$, для некоторого i. Аналогично определяется левый групповой граф Кэли G $\Gamma_l(G) = (V,E)$, где $V = G$ и $(a,b) \in E$ тогда и только тогда, когда $a = e_i^\sigma b$, где $\sigma \in \{-1,1\}$, для некоторого i.

Графы $\Gamma_r(G) = (V,E)$ и $\Gamma_l(G) = (V,E)$ однозначно определяются выбором образующих группы G и являются связными графами. В случае, когда G является свободной группой, $\Gamma_r(G) = (V,E)$ – дерево.

Каждое слово, представляющее элемент группы, можно интерпретировать как путь графа $\Gamma_r(G)$.

Пусть $a,b \in V$. Расстоянием $\rho(a,b)$ между a и b называется минимум длин цепей, соединяющих a и b. Множество $D(n,a) = \{b \in V \mid \rho(a,b) \leqslant n\}$ называется диском радиуса n с центром a, а множество $S(n,a) = \{b \in V \mid \rho(a,b) = n\}$, соответственно, окружностью радиуса n с центром в a.

Будем говорить, что $a > b$ в $\Gamma_r(G)$, если существует минимальная цепь, соединяющая единицу группы G и a, содержащая b.

Лемма 1.1. *Определенное выше отношение $a > b$ является в $\Gamma_r(G)$ частичным порядком.*

Доказательство. Рефлексивность и антисимметричность очевидны, а транзитивность следует из того, что если кратчайшая цепь, связывающая элемент a с единицей, содержит b, и $b > c$, то подцепь, связывающая b с единицей, также является кратчайшей, а потому содержит c, что влечет $a > c$.

Лемма 1.2. *Пусть $\Gamma_r(G)$ является деревом, тогда множество $\{x \in G \mid x < y\}$ линейно упорядочено для любого $y \in G$.*

Действительно, пусть L – цепь, связывающая е и y. Если множество $\{x \in G \mid x < y\}$ не содержится в L, то множество $M = \{z \in L \mid \exists x \in L : z < x < y\}$ не пусто, так как содержит единицу группы G. В силу конечности множества L, можно взять максимальный элемент $z \in M$. Тогда существует путь A_1, соединяющий z и y в L, а также пути A_2 и A_3, соединяющие z и x, а также x и y. Тогда существование цикла $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ приводит нас к противоречию с ацикличностью $\Gamma_r(G)$.

§2. Свободное произведение групп

В этом параграфе мы будем предполагать, что группа G разложима в совбодное произведение конечно-порожденных нетривиальных групп G_0 и G_1. Единицу этой группы будем обозначать символом e. Согласно [2], любой элемент такой группы будет иметь каноническое разложение $g = \prod\limits_{k=1}^{n} g_k$, где для любого k $g_k \in G_i$, $g_{k+1} \in G_{(i+1) mod 2}$, $i \in \{0, 1\}$. Такое представление элемента g единственно в силу определения свободного произведения групп.

Лемма 2.1. *Для любого элемента $x \in G$ $xD(n, e) = D(n, x)$.*

Доказательство. Пусть $g = xb$, где $b \in D(n, e)$. Тогда существует путь длины n вида $e, b_1, b_2 \cdots b_n = b$. Следовательно, существует путь длины n вида $x, xb_1, xb_2 \cdots xb = y$, откуда $\rho(x, y) \leqslant n$, что влечет $xD(n, e) \subset D(n, x)$. Для доказательства обратного включения заметим, что если $\rho(x, y) \leqslant n$, то $y = x(x^{-1}y)$ и $b = x{-}1y \in D(n, e)$.

Лемма 2.2. *Пусть n четно. Тогда существует $x \in D(n,e)$ такой, что: 1) $xD(n,e)$ связен; 2) $e \in xD(n,e)$; 3) для любого элемента $f \in xD(n,e)$ f имеет каноническое разложение $f = \prod_{i=1}^{m} f_i g_i$, где $f_i \in G_0, g_i \in G_1$.*

Доказательство. Пусть $a_i \in G_0 \cap S(1,e)$, $b_i \in G_1 \cap S(1,e)$, $i \in \{1, \cdots, n/2\}$. Определим элемент $x = \prod_{i=1}^{n/2} a_i b_i$. Поскольку a_i и b_i – образующие групп G_0 и, соответственно, G_1, имеем $\rho(x,e) \leqslant n$, то есть $x \in D(n,e)$, откуда, в силу симметрии $D(n,e)$, получаем $x^{-1} \in D(n,e)$, что влечет $e = xx^{-1} \in xD(n,e)$. Связность последнего множества вытекает из связности диска $D(n,e)$. Пусть теперь $f \in xD(n,e)$, и f имеет каноническое разложение $f = \prod_{i=1}^{r} f_i$, и предположим, что $f_1 \in G_1$. Тогда в силу Леммы 2.1, $b_{n/2}^{-1} a_{n/2}^{-1} \cdots b_1^{-1} a_1^{-1} f_1 f_2 \cdots f_r \in D(n,e)$. Но, с другой стороны, поскольку $a_1^{-1} \in G_0$ и $f_1 \in G_1$, $\rho(e, x^{-1} f) = n/2 + n/2 + \sum_{i=1}^{r} \rho(e, f_i) > n$, и получаем противоречие.

Основным результатом настоящей работы является следующая

Теорема 2.3. *Путь группа G разложима в свободное произведение конечно-порожденнных нетривиальных групп G_0 и G_1. Тогда для любого конечного подмножества $S \subset G$ существует такое конечное подмножество $A \subset G$, что $S \subset A$ и $G = \cup g_i A$, $g_i \in G$, причем $g_i A \cap g_j A = \varnothing$.*

Доказательство. Пусть четное число n таково, что $A = D(n,e) \supset S$. Построим такое семейство подмножеств G $\{N_i\}$, что $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} N_i$ и выполнены следующие условия: a) $N_i = gA$, где $g \in G$; b) $\bigcup_{i=1}^{m} N_i$ является связным подграфом $\Gamma_r(G)$, содержащим e; s) $N_i \cap N_j = \emptyset$.

Положим $N_1 = A$ и предположим, что построено семейство множеств $\{N_i\}_{i=1}^{n}$, удовлетворяющее условиям a–s. Обозначим $\tilde{N} = \bigcup_{i=1}^{n} N_i$, и пусть $\tilde{y} \notin \tilde{N}$. Рассмотрим цепь, связывающую единицу группы G и $\tilde{y}$ $\{e = x_1, x_2 \cdots x_{r-1}, x_r = y, x_{r+1} \cdots \tilde{y}\}$, где y – первый элемент этой цепи, не содержащийся в $\tilde{N}$. Не умаляя общности, можно считать, что каноническое разложение элемента y есть $y = \prod_{i=1}^{k} g_i p_i$, где $g_i \in G_0, p_i \in G_1$. По Лемме 2.2 существует элемент $x \in A$ такой, что $e \in xA$, а также любой элемент $f \in xA$ имеет каноническое разложение $f = \prod_{i=1}^{q} f_i$, где $f_1 \in G_0$. Положим $N_{n+1} = yxA$ и проверим для этого множества выполнение условий a–s.

Условие a очевидно, a b вытекает из того, что N_{n+1} является связным подграфом, содержащим y; y же связан ребром с x_{r-1}, который принадлежит связному подграфу $\tilde{N}$. Наконец, пусть $b \in N_{n+1} \cap \tilde{N}$. В силу условия 3 Леммы 2.2, каноническое разложение элемента b имеет вид $b = g_1 p_1 \cdots g_k p_k f_1 f_1 \cdots f_q$, причем $p_k \in G_1$ и $f_1 \in G_0$. Поэтому $b > y$, и любой маршрут, связывающий в $\Gamma_r(G)$ единицу с b, проходит через y. В силу того, что $b \in \tilde{N}$ и связности $\tilde{N}$, получаем $y \in \tilde{N}$, что противоречит выбору y. Таким образом, условие c также проверено.

Повторив это рассуждение нужное количество раз, добьемся $\tilde{y} \in \bigcup_{i=1}^{t} N_i$. В силу счетности числа элементов группы G, продолжив этот процесс до бесконечности, получим $\bigcup_{i=1}^{\infty} N_i = G$, и теорема полностью доказана.

Литература

1. Б. Чандлер, В. Магнус, *Развитие комбинаторной теории групп.* М., Мир, 1985.
2. А. Г. Курош, *Теория групп.* М., Наука, 1967.

Zheludev M. V. Tiling of groups.

The following problem formulated by A. M. Vershik connected to several questions in the traectory theory of the finite generated groups pavements is being researched. The result is: let G be decomposed into the free product of two nontrivial groups. Then for any finite subset S of group G there exists a finite subset P of group G including S such that G is being covered by nonintersected left translations of the set P.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 24 июня 1999г.