В. Н. Иванов

КОМБИНАТОРНАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ ФАКТОРИАЛЬНЫХ Q–ФУНКЦИЙ ШУРА

§0. Введение

Классический способ вычисления неприводимых характеров симметрической группы $S(n)$ основан на использовании S-функций Шура s_λ, параметризованных разбиениями числа n. Их первое определение в виде отношения двух детерминантов предложил Якоби. Позднее Юнг получил для s_λ формулу в терминах таблиц, связанных с соответствующей диаграммой Юнга, названную комбинаторной формулой. В алгебраической комбинаторике эта формула активно используется, как формула для производящей функции числа таблиц данной формы.

Для вычисления проективных характеров симметрической группы $S(n)$ И. Шур в работе [12] ввел симметрические функции Q_λ, параметризуемые строгими разбиениями числа n, названные впоследствии Q-функциями Шура. Q-функции Шура обладают замечательным свойством суперсимметричности (Определение 1.1 в данной работе). Позднее для функций Q_λ также была доказана комбинаторная формула. Эта формула для Q-функций Шура допускает красивую формулировку в терминах таблиц сдвинутой диаграммы Юнга, см., например, в [13, 6, 10].

В этой работе мы вводим факториальные аналоги Q-функций Шура – суперсимметрические функции Q^*_λ. Факториальные аналоги различных симметрических функций также называются интерполяционными аналогами. Определение функций Q^*_λ было предложено А. Ю. Окуньковым (Определение 1.15). Основным результатом этой работы является комбинаторная формула для факториальных Q-функций Шура (Теорема 2.10). Эта формула выявляет дополнительную скрытую симметрию комбинаторной формулы для Q_λ.

При поддержке РФФИ – инициативные гранты 98-01-00303 и 96-01-00146, грант поддержки научных школ 96-15-96060, Международной Соросовской Программы Образования в Области Точных Наук – грант s98-658.

Ранее в работах [8, 4] были введены интерполяционные аналоги S-функций Шура – функции s^*_μ. s^*_μ также называются сдвинутыми функциями Шура, потому что они становятся симметрическими при определенном сдвиге переменных. В работе [4] для s^*_μ была получена комбинаторная формула. С помощью функций s^*_μ в [4] была получена формула для количества путей между двумя вершинами на графе диаграмм Юнга, а именно, число путей от μ к λ равно с точностью до простого множителя значению $s^*_\mu(\lambda)$. В работе [2], используя метод [4], было получено, что количество путей между двумя вершинами μ и λ на графе сдвинутых диаграмм Юнга равно с точностью до простого множителя значению $Q^*_\mu(\lambda)$. С помощью этого результата в [2], используя методы [1, 3], было получено новое доказательство теорем Назарова, приведенных в [7], о классификации проективных характеров бесконечной симметрической группы.

Обобщением S- и Q-функций Шура являются полиномы Макдональда, смотри [6]. В работах [5, 11, 9] были введены интерполяционные аналоги полиномов Макдональда – сдвинутые полиномы Макдональда. В [9] была получена комбинаторная формула для интерполяционных полиномов Макдональда. Однако, факториальные Q-функции Шура, видимо, не получаются как частный случай интерполяционных полиномов Макдональда.

Основная часть работы состоит из двух параграфов. В §1 мы даем основные определения, в том числе для факториальных и обобщенных Q-функций Шура (Определения 1.9 и 1.15) и приводим их основные приложения: формулу для размерности косой сдвинутой диаграммы Юнга (Теорема 1.18), свойство обнуления (Предложение 1.16). В §2 мы доказываем правило ветвления (Теорема 2.7) и с его помощью получаем основной результат этой работы – комбинаторную формулу для факториальных Q-функций Шура (Теорема 2.10).

Автор глубоко благодарен Г. И. Ольшанскому за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

§1. Основные определения и предварительные сведения

Определение 1.1. *Полином $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется суперсимметрическим, если выполнены следующие условия:*

(1) *f симметричен по $x_1, \ldots, x_n$;*

(2) *для любых натуральных i, j таких, что $1 \leqslant i < j \leqslant n$, полином*

$$f(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, -t, x_{j+1}, \dots, x_n)$$

не зависит от t.

Суперсимметрические полиномы от n переменных образуют алгебру. Обозначим эту алгебру через $\Gamma(n)$. $\Gamma(n)$ градуирована степенью полиномов, то есть

$$\Gamma(n) = \bigoplus_{k \geqslant 0} \Gamma^k(n),$$

где $\Gamma^k(n)$ состоит из однородных суперсимметрических полиномов степени k (включая нулевой полином).

При $m \geqslant n$ рассмотрим гомоморфизм

$$p_{m,n} : \Gamma(m) \to \Gamma(n),$$

такой, что

$$(p_{m,n} f)(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n, 0, 0, \dots, 0).$$

При ограничении на $\Gamma^k(m)$ получаются линейные отображения

$$p^k_{m,n} : \Gamma^k(m) \to \Gamma^k(n).$$

Определение 1.2. *Проективный предел градуированных алгебр $\Gamma(n)$ в категории градуированных алгебр, взятый в соответствии с морфизмами $p_{m,n}$, является алгеброй и называется алгеброй суперсимметрических функций. Обозначим эту алгебру через Γ. Элемент f, принадлежащий Γ, – это по определению последовательность $(f_n)_{n \geqslant 1}$ такая, что выполнены следующие условия:*

(1) $f_n \in \Gamma(n)$, $n = 1, 2, \dots,$

(2) $f_{n+1}(x_1, \dots, x_n, 0) = f_n(x_1, \dots, x_n)$ *(условие стабильности),*

(3) $\sup\limits_n \deg f_n < \infty$.

Определение 1.3. *Разбиением называется произвольная (конечная или бесконечная) последовательность целых неотрицательных чисел $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$, расположенных в порядке нестрогого убывания, т. е.*

$$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_3 \geqslant \dots \tag{1.1}$$

и содержащей лишь конечное число ненулевых членов. Мы не будем различать две такие последовательности, отличающиеся лишь цепочкой нулей на конце. Число ненулевых членов в разбиении λ называется длиной разбиения λ и обозначается через $\ell(\lambda)$. Из нашего соглашения, в частности, следует, что $\lambda_{\ell(\lambda)+1} = 0$. Ненулевые члены λ_i в (1.1) называются частями разбиения λ, а сумма всех частей разбиения λ называется весом разбиения и обозначается через $|\lambda|$:

$$|\lambda| = \sum_{i=1}^{\ell(\lambda)} \lambda_i .$$

Если $|\lambda| = n$, то говорим, что λ – разбиение числа n и пишем $\lambda \vdash n$.

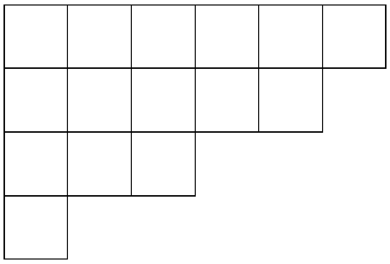
Определение 1.4. *Пусть λ – произвольное разбиение. Множество*

$$\{(i, j) \in \mathbb{Z}^2 \,|\, 1 \leqslant j \leqslant \lambda_i, 1 \leqslant i \leqslant \ell(\lambda)\}$$

называется диаграммой Юнга разбиения λ и обозначается через $D(\lambda)$.

Для изображения диаграммы Юнга на плоскости мы будем заменять точки единичными квадратами и примем соглашение, что первая координата i (индекс строки) возрастает при движении сверху вниз, а вторая координата j (индекс столбца) возрастает при движении слева направо. Например, если $\lambda = (6, 5, 3, 1)$, то

$D(\lambda) =$

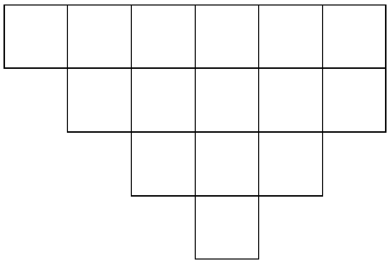


Определение 1.5. *Разбиение λ называется строгим, если все его части различны. Множество всех строгих разбиений обозначим через DP. Для строгих разбиений помимо обычной диаграммы Юнга можно определить сдвинутую диаграмму Юнга. Если λ является строгим разбиением, то множество*

$$\{(i, j) \in \mathbb{Z}^2 \,|\, i \leqslant j \leqslant \lambda_i + i - 1, 1 \leqslant i \leqslant \ell(\lambda)\}$$

называется сдвинутой диаграммой Юнга разбиения λ *и обозначается через* $D(\lambda)'$.

Например, если $\lambda = (6, 5, 3, 1)$, то

$D(\lambda)' =$ 

Определение 1.6. *Пусть* μ *и* λ *– произвольные разбиения. Будем писать* $\mu \subset \lambda$, *если* $D(\mu) \subset D(\lambda)$, *как множества на плоскости, что равносильно тому, что* $\mu_i \leqslant \lambda_i, \forall i$. *Если же* $D(\mu) \subset D(\lambda)$ *и разность* $D(\lambda) \setminus D(\mu)$ *содержит в каждом столбце не более одной клетки, то будем говорить, что* λ/μ *является горизонтальной полосой и обозначать это* $\lambda/\mu \in \mathrm{Hor}$.

Определение 1.7. *Определим* k*-ую убывающую факториальную степень переменной* x *формулой*

$$[x \downharpoonleft k] = \prod_{i=1}^{k}(x - i + 1), \quad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Рассмотрим также обобщение этого определения.

Определение 1.8. *Пусть* $(a_n)_{n \geqslant 1}$ *– последовательность комплексных чисел. Определим* k*-ую обобщенную степень переменной* x *формулой*

$$(x|a)^k = \prod_{i=1}^{k}(x - a_i), \quad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Заметим, что $[x \downharpoonleft 0] = (x|a)^0 = 1$.

Определение 1.9. *Пусть* $\ell(\lambda) \leqslant n$, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *– переменные,* $(a_n)_{n \geqslant 1}$ *– последовательность комплексных чисел. Положим*

$$F_\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{\ell(\lambda)}(x|a)^{\lambda_i} \prod_{\substack{i \leqslant \ell(\lambda), \\ i < j \leqslant n}} \frac{x_i + x_j}{x_i - x_j}$$

и

$$Q_{\lambda|n}(x_1, x_2, \dots, x_n|a) = \frac{2^{\ell(\lambda)}}{(n-\ell(\lambda))!} \sum_{\omega \in S(n)} F_\lambda(x_{\omega(1)}, x_{\omega(2)}, \dots, x_{\omega(n)}|a).$$

Если $\ell(\lambda) > n$, то положим $Q_{\lambda|n}(x_1, x_2, \dots, x_n|a) = 0$.

Предложение 1.10. (а) *$Q_{\lambda|n}(x_1, x_2, \dots, x_n|a)$ является суперсимметрическим многочленом от $x_1, x_2, \dots, x_n$ степени $|\lambda|$, то есть $Q_{\lambda|n}(x_1, x_2, \dots, x_n|a) \in \Gamma(n)$.*

(б) *Если $a_1 = 0$, то*

$$Q_{\lambda|n+1}(x_1, x_2, \dots, x_n, 0|a) = Q_{\lambda|n}(x_1, x_2, \dots, x_n|a).$$

(в) *Если разбиение λ не является строгим, то*

$$Q_{\lambda|n}(x_1, x_2, \dots, x_n|a) = 0.$$

Доказательство. Все утверждения следуют из [2, Предложение 1.1] □

Далее в статье $(a_n)_{n\geqslant 1}$ обозначает такую последовательность, что $a_1 = 0$.

Определение 1.11. *Из Предложения 1.10(б) и Определения 1.2 следует, что последовательность $(Q_{\lambda|n}(x_1, x_2, \dots, x_n|a))_{n\geqslant 1}$ определяет суперсимметрическую функцию, эта функция называется обобщенной Q-функцией и обозначается $Q_\lambda(\cdot|a)$.*

Определение 1.12. *Если $a_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$, то $Q_\lambda(\cdot|a)$ называется Q-функцией Шура и обозначается $Q_\lambda(\cdot)$.*

Q-функции были введены Шуром в работе [12] для изучения проективных представлений симметрической группы. Множество $\{Q_\lambda(\cdot)\,|\,\lambda$ – строгое разбиение$\}$ является линейным базисом Γ, смотри [6].

Предложение 1.13. *Если $\ell(\lambda) \leqslant n$, то*

$$Q_\lambda(x_1, \dots, x_n|a) = Q_\lambda(x_1, \dots, x_n) + g(x_1, \dots, x_n),$$

где $g(x_1, \dots, x_n)$ – суперсимметрический многочлен степени меньшей, чем $|\lambda|$.

Доказательство. Следует из [2, Предложение 1.1] □

Следствие 1.14. *Множество* $\{Q_\lambda(\cdot|a)\,|\,\lambda$ *– строгое разбиение*$\}$ *является линейным базисом* Γ.

Введем теперь функции, играющие основную роль в этой статье.

Определение 1.15 (А. Ю. Окуньков). *Если* $a_n = n-1, \forall n \in \mathbb{N}$, *то функции* $Q_\lambda(\cdot|a)$ *обозначаются* $Q^*_\lambda(\cdot)$ *и называются факториальными* Q*-функциями Шура. Если* $\ell(\lambda) \leqslant n$, *то, вспомнив обозначения Определения 1.7 можно написать*

$$Q^*_\lambda(x_1,\dots,x_n) = \frac{2^{\ell(\lambda)}}{(n-\ell(\lambda))!}\sum_{\omega\in S(n)}\prod_{i=1}^{\ell(\lambda)}[x_i\downharpoonleft\lambda_i]\prod_{i\leqslant\ell(\lambda),i<j\leqslant n}\frac{x_i+x_j}{x_i-x_j}.$$

Отметим теперь одно замечательное свойство функций Q^*_λ.

Предложение 1.16. *Если* $\mu \not\subset \lambda$ *(Определение* 1.6*), то*

$$Q^*_\mu(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_{\ell(\lambda)}) = 0.$$

(Утверждение этой теоремы аналогично свойству обнуления для s^*-функций, приведенному в [4] и в [8], также его можно сравнить с определением сдвинутых полиномов Макдональда в [9].)

Доказательство. Это утверждение следует из [2, Теорема 1.5]. □

Функции Q^*_λ участвуют в формуле для размерности косой сдвинутой диаграммы Юнга, ниже мы сформулируем это подробнее.

Определение 1.17. *Если* μ *и* λ *– строгие разбиения такие, что* $\mu \subset \lambda$, *то сдвинутая косая диаграмма, соответствующая паре* (λ,μ), *есть разность сдвинутых диаграмм* $D(\lambda)'$ *и* $D(\mu)'$. *Сдвинутой стандартной таблицей формы* λ/μ *называется заполнение косой сдвинутой диаграммы* $D(\lambda)'\setminus D(\mu)'$ *числами* $1,2,\dots,|\lambda|-|\mu|$ *так, чтобы числа строго возрастали при чтении слева направо по строкам и сверху вниз по столбцам. Размерностью* $g_{\lambda/\mu}$ *сдвинутой косой диаграммы* $D(\lambda)'\setminus D(\mu)'$ *называется число сдвинутых стандартных таблиц формы* λ/μ. *Условимся, что* $g_{\lambda/\mu}=0$, *если* $\mu\not\subset\lambda$. *Положим* g_λ *равным* $g_{\lambda/\{\varnothing\}}$, *то есть числу сдвинутых стандартных таблиц формы* λ. *Для* g_λ *есть явная формула, приведенная в*

[6,III, §7,examples]:

$$g_\lambda = \frac{|\lambda|!}{\lambda_1!\dots\lambda_{\ell(\lambda)}!}\prod_{i<j}\frac{\lambda_i-\lambda_j}{\lambda_i+\lambda_j}.$$

Сформулируем теперь результат, позволяющий получить явную формулу для $g_{\lambda/\mu}$.

Теорема 1.18 [2]. *Пусть μ и λ – строгие разбиения, тогда*

$$g_{\lambda/\mu} = 2^{-\ell(\lambda)} g_\lambda\cdot\frac{Q^*_\mu(\lambda)}{[|\lambda|\downharpoonleft|\mu|]}.$$

Доказательство. Доказательство этой теоремы содержится в [2]. □

В качестве приложения Теоремы 1.16 в работе [2] получено новое доказательство теорем Назарова о проективных характерах бесконечной симметрической группы [7].

§2. Правило ветвления и комбинаторная формула

В этом параграфе мы докажем правило ветвления для факториальных Q-функций (Теорема 2.7). Из правила ветвления мы выведем основной результат этой статьи – комбинаторную формулу для факториальных Q-функций (Теорема 2.10). В начале этого параграфа мы докажем несколько вспомогательных утверждений. Все результаты этого параграфа можно естественным образом переформулировать для обобщенных Q-функций. Утверждения и доказательства приведены для факториальных Q-функций только для того, чтобы изложение было менее громоздким. Комбинаторную формулу для обобщенных Q-функций мы выпишем в конце этого параграфа (Теорема 2.11).

Предложение 2.1. *Пусть k – произвольное натуральное число, тогда для любых x и y выполнено тождество*

$$[x\downharpoonleft k]-[y\downharpoonleft k] = (x-y)\sum_{t=0}^{k-1}[x\downharpoonleft(k-1-t)][(y-k+t)\downharpoonleft t].$$

Доказательство. Докажем тождество индукцией по k. При $k=1$ тождество верно. Из равенства

$$[x\downharpoonleft k]-[y\downharpoonleft k] = (x-y)\cdot[x\downharpoonleft(k-1)]+(y-k+1)\cdot\big([x\downharpoonleft(k-1)]-[y\downharpoonleft(k-1)]\big)$$

следует индукционный переход.

Предложение доказано. $\square$

Предложение 2.2. *Пусть k – произвольное натуральное число, тогда для любых x и y выполнено тождество*

$$\left([x \downharpoonleft k]-[y \downharpoonleft k]\right)\frac{x+y}{x-y}=$$

$$=[x \downharpoonleft k]+2\left(\sum_{t=0}^{k-2}[x \downharpoonleft (k-1-t)]y[(y-k+t) \downharpoonleft t]\right)+[y \downharpoonleft k].$$

Доказательство. Используя равенство

$$\left([x \downharpoonleft k]-[y \downharpoonleft k]\right)\frac{x+y}{x-y}=[x \downharpoonleft k]-[y \downharpoonleft k]+2y\frac{[x \downharpoonleft k]-[y \downharpoonleft k]}{x-y}$$

и Предложение 2.1, получаем доказываемое тождество. $\square$

Предложение 2.3. *Пусть k – произвольное натуральное число, тогда для любых x, y и c выполнено тождество*

$$\left([(x-c) \downharpoonleft k]-[(y-c) \downharpoonleft k]\right)\frac{x+y}{x-y}=$$

$$=[(x-c) \downharpoonleft k]++2\left(\sum_{t=0}^{k-2}[(x-c) \downharpoonleft (k-1-t)]y[(y-c-k+t) \downharpoonleft t]\right)+$$

$$+(y+c)[(y-c-1) \downharpoonleft (k-1)].$$

Доказательство. Из равенства

$$\left([(x-c) \downharpoonleft k]-[(y-c) \downharpoonleft k]\right)\frac{x+y}{x-y}=$$

$$=\left([(x-c) \downharpoonleft k]-[(y-c) \downharpoonleft k]\right)\frac{(x-c)+(y-c)}{(x-c)-(y-c)}+$$

$$+2c\frac{[(x-c) \downharpoonleft k]-[(y-c) \downharpoonleft k]}{x-y}$$

и Предложений 2.1 и 2.2 следует доказываемое тождество. $\square$

Предложение 2.4. *Пусть $x_1,\dots,x_n$ – произвольные числа, тогда имеют место следующие равенства*

$$\sum_{i=1}^{n}\prod_{j\neq i}\frac{x_i+x_j}{x_i-x_j}=\begin{cases}0, & \text{если } n \text{ четно},\\ 1, & \text{если } n \text{ нечетно};\end{cases}$$

$$\sum_{\omega\in S(n)}\prod_{i=2}^{n}\frac{x_{\omega(1)}+x_{\omega(i)}}{x_{\omega(1)}-x_{\omega(i)}}=\begin{cases}0, & \text{если } n \text{ четно},\\ (n-1)!, & \text{если } n \text{ нечетно}.\end{cases}$$

Доказательство. Второе равенство следует из первого.

Итак, докажем, что

$$S(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\prod_{j\neq i}\frac{x_i+x_j}{x_i-x_j}=\begin{cases}0, & \text{если } n \text{ четно},\\ 1, & \text{если } n \text{ нечетно}.\end{cases}$$

Имеем, что

$$S(x_1,\dots,x_n)=\frac{R(x_1,\dots,x_n)}{\prod_{i<j}(x_i-x_j)},$$

где $R(x_1,\dots,x_n)$ – многочлен от $x_1,\dots,x_n$, $\deg R=\frac{n(n-1)}{2}=\deg\prod_{i<j}(x_i-x_j)$. С другой стороны, $S(x_1,\dots,x_n)$ является симметричной функцией от $x_1,\dots,x_n$, поэтому $R(x_1,\dots,x_n)$ – кососимметричный многочлен от $x_1,\dots,x_n$. Следовательно, $S(x_1,\dots,x_n)$ – многочлен степени 0, то есть число, зависящее только от n. Обозначим это число через s_n. Полагая $x_n=0$, получаем рекуррентное соотношение $s_n=s_{n-1}+(-1)^{n-1}$. Кроме того, $s_2=0$, и мы получаем доказываемое равенство. □

Предложение 2.5. *Пусть $x_1,\dots,x_n$ – произвольные переменные, $c_1,\dots,c_{\ell(\lambda)}$ – произвольные константы, определим функцию от $x_1,\dots,x_n$ следующей формулой*

$$B_{\lambda|n}(x_1,\dots,x_n|c_1,\dots,c_{\ell(\lambda)})=\prod_{t=1}^{\ell(\lambda)}([x_t\downharpoonleft\lambda_t]-c_t[x_t\downharpoonleft\lambda_{t+1}])\prod_{\substack{i\leqslant\ell(\lambda),\\ i<j\leqslant n}}\frac{x_i+x_j}{x_i-x_j}.\tag{2.1}$$

Если $n-\ell(\lambda)$ нечетно, то для любых $c_1,\dots,c_{\ell(\lambda)}$ выполнено равенство

$$\frac{2^{\ell(\lambda)}}{(n-\ell(\lambda))!}\sum_{\omega\in S(n)}B_{\lambda|n}(x_{\omega(1)},\dots,x_{\omega(n)}|c_1,\dots,c_{\ell(\lambda)})=Q^*_\lambda(x_1,\dots,x_n).$$

(Если $n-\ell(\lambda)$ четно, то это равенство, вообще говоря, нарушается.)

Доказательство. Пусть целое число k таково, что $1 \leqslant k \leqslant \ell(\lambda)$.

Докажем индукцией по k, что если $c_k = c_{k+1} = \ldots = c_{\ell(\lambda)} = 0$, то доказываемое равенство верно, то есть

$$Q^*_\lambda(x_1,\ldots,x_n) = \frac{2^{\ell(\lambda)}}{(n-\ell(\lambda))!}\cdot$$
$$\cdot \sum_{\omega\in S(n)} B_{\lambda|n}(x_{\omega(1)},\ldots,x_{\omega(n)}|c_1,\ldots,c_{k-1},0,\ldots,0).$$

При $k=1$ это верно по Определению 1.15.

При $1 < k \leqslant \ell(\lambda)$ имеем равенство

$$B_{\lambda|n}(x_1,\ldots,x_n|c_1,\ldots,c_{k-1},0,\ldots,0) =$$
$$= B_{\lambda|n}(x_1,\ldots,x_n|c_1,\ldots,c_{k-2},0,0,\ldots,0)+$$
$$+c_{k-1}\left(\prod_{t=1}^{k-2}([x_t\downharpoonleft\lambda_t] - c_t[x_t\downharpoonleft\lambda_{t+1}])\right)\cdot$$
$$\cdot[x_{k-1}\downharpoonleft\lambda_k]\cdot[x_k\downharpoonleft\lambda_k]\cdot\prod_{t=k+1}^{\ell(\lambda)}[x_t\downharpoonleft\lambda_t]\cdot\prod_{\substack{i\leqslant\ell(\lambda),\\ i<j\leqslant n}}\frac{x_i+x_j}{x_i-x_j}.$$

Из [2, Предложение 1.1в)] следует, что

$$\sum_{\omega\in S(n)}\left(\prod_{t=1}^{k-2}([x_{\omega(t)}\downharpoonleft\lambda_t] - c_t[x_{\omega(t)}\downharpoonleft\lambda_{t+1}])\right)\cdot$$
$$\cdot[x_{\omega(k-1)}\downharpoonleft\lambda_k]\cdot[x_{\omega(k)}\downharpoonleft\lambda_k]\cdot\prod_{t=k+1}^{\ell(\lambda)}[x_{\omega(t)}\downharpoonleft\lambda_t]\cdot\prod_{\substack{i\leqslant\ell(\lambda),\\ i<j\leqslant n}}\frac{x_{\omega(i)}+x_{\omega(j)}}{x_{\omega(i)}-x_{\omega(j)}} = 0,$$

поэтому индукционный переход доказан.

Итак,

$$Q^*_\lambda(x_1,\ldots,x_n) = \frac{2^{\ell(\lambda)}}{(n-\ell(\lambda))!}\cdot$$
$$\cdot \sum_{\omega\in S(n)} B_{\lambda|n}(x_{\omega(1)},\ldots,x_{\omega(n)}|c_1,\ldots,c_{\ell(\lambda)-1},0).$$

Отметим равенство

$$B_{\lambda|n}(x_1,\dots,x_n|c_1,\dots,c_{\ell(\lambda)}) = B_{\lambda|n}(x_1,\dots,x_n|c_1,\dots,c_{\ell(\lambda)-1},0)+$$
$$+c_{\ell(\lambda)}\left(\prod_{t=1}^{\ell(\lambda)-1}([x_t\downharpoonright\lambda_t]-c_t[x_t\downharpoonright\lambda_{t+1}])\right)\cdot$$
$$\cdot\prod_{\substack{i\leqslant\ell(\lambda)-1,\\ i<j\leqslant n}}\frac{x_i+x_j}{x_i-x_j}\prod_{j=\ell(\lambda)+1}^{n}\frac{x_{\ell(\lambda)}+x_j}{x_{\ell(\lambda)}-x_j}.$$

Если $n-\ell(\lambda)$ нечетно, то из Предложения 2.4 следует, что

$$\sum_{\omega\in S(n)}\left(\prod_{t=1}^{\ell(\lambda)-1}([x_{\omega(t)}\downharpoonright\lambda_t]-c_t[x_{\omega(t)}\downharpoonright\lambda_{t+1}])\right)\cdot$$
$$\cdot\prod_{\substack{i\leqslant\ell(\lambda)-1,\\ i<j\leqslant n}}\frac{x_{\omega(i)}+x_{\omega(j)}}{x_{\omega(i)}-x_{\omega(j)}}\prod_{j=\ell(\lambda)+1}^{n}\frac{x_{\omega(\ell(\lambda))}+x_{\omega(j)}}{x_{\omega(\ell(\lambda))}-x_{\omega(j)}}.=0.$$

Таким образом, предложение доказано. $\square$

Определение 2.6. *Пусть строгие разбиения λ и μ таковы, что $\lambda/\mu\in\mathrm{Hor}$ (Определение 1.6). Определим в этой ситуации функцию $\varphi_{\lambda/\mu}:(D(\lambda)\setminus D(\mu))\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ формулой*

$$\varphi_{\lambda/\mu}(i,j;x)=\begin{cases} x+j-1, & \text{если}\ \ (i+1,j-1)\in D(\lambda)\setminus D(\mu),\\ x-j+1, & \text{если}\ \ (i,j-1)\in D(\lambda)\setminus D(\mu),\\ 2x, & \text{иначе.}\end{cases} \tag{2.2}$$

Также определим выражение $b(\mu,\lambda,x)$ формулой

$$b(\mu,\lambda,x)=\prod_{(i,j)\in D(\lambda)\setminus D(\mu)}\varphi_{\lambda/\mu}(i,j;x) \tag{2.3}$$

Теорема 2.7. *(Правило ветвления для факториальных Q-функций) Пусть $x_1,\dots,x_n$ – переменные, а λ – строгое разбиение, тогда для полинома $Q^*_\lambda(x_1,\dots,x_n)$ (Определение 1.10) выполнено равенство*

$$Q^*_\lambda(x_1,\dots,x_n)=\sum_{\mu\in DP,\lambda/\mu\in\mathrm{Hor}}b(\mu,\lambda,x_n)Q^*_\mu(x_1,\dots,x_{n-1}).$$

Доказательство. Если $\ell(\lambda) > n$, то в обеих частях доказываемого равенства стоят нули.

Рассмотрим теперь случай, когда $\ell(\lambda) \leqslant n$.

Предположим сперва, что $n - \ell(\lambda)$ нечетно. Тогда из Предложения 2.5 следует равенство

$$Q^*_\lambda(x_1, \dots, x_n) = \\ = \frac{2^{\ell(\lambda)}}{(n-\ell(\lambda))!} \sum_{\omega \in S(n)} B_{\lambda|n}(x_{\omega(1)}, \dots, x_{\omega(n)} | c_1, \dots, c_{\ell(\lambda)}), \tag{2.4}$$

где

$$B_{\lambda|n}(x_1, \dots, x_n | c_1, \dots, c_{\ell(\lambda)}) = \\ = \prod_{t=1}^{\ell(\lambda)} ([x_t \downharpoonleft \lambda_t] - c_t [x_t \downharpoonleft \lambda_{t+1}]) \prod_{\substack{i \leqslant \ell(\lambda), \\ i<j\leqslant n}} \frac{x_i + x_j}{x_i - x_j}.$$

Зафиксируем переменную x_n и положим

$$c_i = [(x_n - \lambda_{i+1}) \downharpoonleft (\lambda_i - \lambda_{i+1})] \tag{2.5}$$

для $1 \leqslant i \leqslant \ell(\lambda)$. Будем обозначать так выбранные $c_1, \dots, c_{\ell(\lambda)}$ через $c_1^0, \dots, c^0_{\ell(\lambda)}$ соответственно. Из (2.4) имеем равенство

$$Q^*_\lambda(x_1, \dots, x_n) = \\ = \frac{2^{\ell(\lambda)}}{(n-\ell(\lambda))!} \sum_{\omega \in S(n)} \Bigg(\prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} ([x_{\omega(i)} \downharpoonleft \lambda_i] - \\ -[(x_n - \lambda_{i+1}) \downharpoonleft (\lambda_i - \lambda_{i+1})][x_{\omega(i)} \downharpoonleft \lambda_{i+1}]) \cdot \\ \cdot \prod_{\substack{i \leqslant \ell(\lambda), \\ i<j\leqslant n}} \frac{x_{\omega(i)} + x_{\omega(j)}}{x_{\omega(i)} - x_{\omega(j)}} \Bigg). \tag{2.6}$$

Если $\omega^{-1}(n) \leqslant \ell(\lambda)$, то

$$B_{\lambda|n}(x_{\omega(1)}, \dots, x_{\omega(n)} | c_1^0, \dots, c^0_{\ell(\lambda)}) = 0.$$

Если $\omega^{-1}(n) > \ell(\lambda)$, то

$$B_{\lambda|n}(x_{\omega(1)}, \dots, x_{\omega(n)} | c_1^0, \dots, c^0_{\ell(\lambda)}) = B_{\lambda|n}(x_{\rho(1)}, \dots, x_{\rho(n)} | c_1^0, \dots, c^0_{\ell(\lambda)}),$$

где ρ получается из ω умножением на транспозицию : $\rho = \omega \cdot (\omega^{-1}(n), n)$. Заметим, что $\rho(n) = n$, то есть фактически $\rho \in S(n-1)$. Для каждого $\rho \in S(n-1)$ существует ровно $n-\ell(\lambda)$ таких $\omega \in S(n)$, что $\omega^{-1}(n) > \ell(\lambda)$ и $\rho = \omega \cdot (\omega^{-1}(n), n)$. Поэтому из (2.6) получаем

$$Q^*_\lambda(x_1, \dots, x_n) = \frac{2^{\ell(\lambda)}}{(n-\ell(\lambda)-1)!}\cdot$$
$$\cdot \sum_{\rho \in S(n-1)} B_{\lambda|n}(x_{\rho(1)}, \dots, x_{\rho(n-1)}, x_n | c^0_1, \dots, c^0_{\ell(\lambda)}). \tag{2.7}$$

Положим $r(i) = \lambda_i - \lambda_{i+1}$ для $i = 1, \dots, \ell(\lambda)$. Из (2.5) и Предложения 2.3 следуют равенства

$$\big([x_k \downharpoonleft \lambda_k] - c^0_k [x_k \downharpoonleft \lambda_{k+1}]\big) \frac{x_k + x_n}{x_k - x_n} =$$
$$= [x_k \downharpoonleft \lambda_{k+1}] \left(\big([(x_k - \lambda_{k+1}) \downharpoonleft r(k)] - [(x_n - \lambda_{k+1}) \downharpoonleft r(k)]\big) \frac{x_k + x_n}{x_k - x_n} \right) =$$
$$= [x_k \downharpoonleft \lambda_{k+1}] \Bigg([(x_k - \lambda_{k+1}) \downharpoonleft r(k)] +$$
$$+2 \sum_{i=0}^{r(k)-2} [(x_k - \lambda_{k+1}) \downharpoonleft (r(k)-1-i)] x_n [(x_n - \lambda_{k+1} - r(k) + i) \downharpoonleft i] +$$
$$+ (x_n + \lambda_{k+1}) [(x_n - \lambda_{k+1} - 1) \downharpoonleft (r(k)-1)] \Bigg). \tag{2.8}$$

Из (2.1) и (2.8) получаем

$$B_{\lambda|n}(x_1, \dots, x_n | c^0_1, \dots, c^0_{\ell(\lambda)}) =$$
$$= \Bigg(\prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} \big([x_i \downharpoonleft \lambda_i] - [(x_n - \lambda_{i+1}) \downharpoonleft r(i)] \cdot$$
$$\cdot [x_i \downharpoonleft \lambda_{i+1}]\big) \frac{x_i + x_n}{x_i - x_n} \Bigg) \cdot \Bigg(\prod_{\substack{i \leqslant \ell(\lambda), \\ i < j \leqslant n-1}} \frac{x_i + x_j}{x_i - x_j} \Bigg) =$$
$$= \Bigg(\prod_{\substack{i \leqslant \ell(\lambda), \\ i < j \leqslant n-1}} \frac{x_i + x_j}{x_i - x_j} \Bigg) \cdot \prod_{k=1}^{\ell(\lambda)} \Bigg([x_k \downharpoonleft \lambda_{k+1}] \cdot \Bigg([(x_k - \lambda_{k+1}) \downharpoonleft r(k)] +$$

$$+2\sum_{i=0}^{r(k)-2}[(x_k-\lambda_{k+1})\downharpoonleft(r(k)-1-i)]x_n[(x_n-\lambda_{k+1}-r(k)+i)\downharpoonleft i]+$$

$$+(x_n+\lambda_{k+1})[(x_n-\lambda_{k+1}-1)\downharpoonleft(r(k)-1)]\Big)\Big).$$

Используя Определение 1.7, (2.2) и (2.3), получаем, что последнее выражение равно

$$\sum_{\substack{\ell(\mu)=\ell(\lambda),\\ \lambda/\mu\in\mathrm{Hor},\\ \mu\in DP}} b(\mu,\lambda,x_n)\cdot\left(\prod_{i=1}^{\ell(\lambda)}[x_i\downharpoonleft\mu_i]\prod_{\substack{i\leqslant\ell(\lambda),\\ i<j\leqslant n-1}}\frac{x_i+x_j}{x_i-x_j}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{\substack{\ell(\mu)=\ell(\lambda)-1,\\ \lambda/\mu\in\mathrm{Hor},\\ \mu\in DP}} b(\mu,\lambda,x_n)\cdot\left(\prod_{i=1}^{\ell(\mu)}[x_i\downharpoonleft\mu_i]\prod_{\substack{i\leqslant\ell(\lambda),\\ i<j\leqslant n-1}}\frac{x_i+x_j}{x_i-x_j}\right)+$$

$$+\sum_{\substack{\lambda/\mu\in\mathrm{Hor},\\ \mu\notin DP}} d(\mu,\lambda,x_n)\cdot\left(\prod_{i=1}^{\ell(\lambda)}[x_i\downharpoonleft\mu_i]\prod_{\substack{i\leqslant\ell(\lambda),\\ i<j\leqslant n-1}}\frac{x_i+x_j}{x_i-x_j}\right),$$

где $d(\mu,\lambda,x_n)$ – некоторые функции от x_n. Введем функцию от $x_1,\dots,x_{n-1}$ формулой

$$G_{\mu|n}(x_1,\dots,x_{n-1}|\ell(\lambda))=\prod_{i=1}^{\ell(\mu)}[x_i\downharpoonleft\mu_i]\prod_{\substack{i\leqslant\ell(\lambda),\\ i<j\leqslant n-1}}\frac{x_i+x_j}{x_i-x_j}.$$

Из (2.7) следует равенство

$$Q^*_\lambda(x_1,\dots,x_n)=$$

$$=\sum_{\substack{\ell(\mu)=\ell(\lambda),\\ \lambda/\mu\in\mathrm{Hor},\mu\in DP}} b(\mu,\lambda,x_n)\frac{2^{\ell(\lambda)}}{(n-\ell(\lambda)-1)!}\cdot$$

$$\cdot\sum_{\omega\in S(n-1)}G_{\mu|n}(x_{\omega(1)},\dots,x_{\omega(n-1)}|\ell(\lambda))+$$

$$+\sum_{\substack{\ell(\mu)=\ell(\lambda)-1,\\ \lambda/\mu\in\mathrm{Hor},\mu\in DP}} b(\mu,\lambda,x_n)\frac{2^{\ell(\lambda)-1}}{(n-\ell(\lambda)-1)!}\cdot$$

$$\cdot\sum_{\omega\in S(n-1)} G_{\mu|n}(x_{\omega(1)},\dots,x_{\omega(n-1)}|\ell(\lambda))+$$

$$+\sum_{\lambda/\mu\in\mathrm{Hor},\mu\notin DP} d(\mu,\lambda,x_n)\frac{2^{\ell(\lambda)}}{(n-\ell(\lambda)-1)!}\cdot$$

$$\cdot\sum_{\omega\in S(n-1)} G_{\mu|n}(x_{\omega(1)},\dots,x_{\omega(n-1)}|\ell(\lambda)). \tag{2.9}$$

Рассмотрим три суммы, стоящие в правой части равенства (2.9).

Если μ не является строгим разбиением, то из [2, Предложение 1.1в)] следует

$$\sum_{\omega\in S(n-1)} G_{\mu|n}(x_{\omega(1)},\dots,x_{\omega(n-1)}|\ell(\lambda))=0. \tag{2.10}$$

Если $\ell(\mu)=\ell(\lambda)$ и μ – строгое разбиение, то по Определению 1.15

$$\frac{2^{\ell(\lambda)}}{(n-\ell(\lambda)-1)!}\sum_{\omega\in S(n-1)} G_{\mu|n}(x_{\omega(1)},\dots,x_{\omega(n-1)}|\ell(\lambda))=$$

$$=Q^*_\mu(x_1,\dots,x_{n-1}). \tag{2.11}$$

Если $\ell(\mu)=\ell(\lambda)-1$ и μ – строгое разбиение, то

$$\sum_{\omega\in S(n-1)} G_{\mu|n}(x_{\omega(1)},\dots,x_{\omega(n-1)}|\ell(\lambda))=$$

$$=\sum_{\omega\in S(n-1)}\left(\left(\prod_{i=1}^{\ell(\mu)}[x_{\omega(i)}\downharpoonright\mu_i]\right)\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left(\prod_{\substack{i<j\leqslant n-1\\ i\leqslant\ell(\mu)}}\frac{x_{\omega(i)}+x_{\omega(j)}}{x_{\omega(i)}-x_{\omega(j)}}\right)\cdot\left(\prod_{j=\ell(\lambda)+1}^{n-1}\frac{x_{\omega(\ell(\lambda))}+x_{\omega(j)}}{x_{\omega(\ell(\lambda))}-x_{\omega(j)}}\right)\right) \tag{2.12}$$

Из Предложения 2.4 следует, что последнее выражение равно

$$\frac{1}{n-\ell(\lambda)} \sum_{\omega \in S(n-1)} \left(\prod_{i=1}^{\ell(\mu)} [x_{\omega(i)} \downharpoonright \mu_i] \prod_{\substack{i<j\leqslant n-1 \\ i\leqslant \ell(\mu)}} \frac{x_{\omega(i)}+x_{\omega(j)}}{x_{\omega(i)}-x_{\omega(j)}} \right). \tag{2.13}$$

Из (2.9), (2.10), (2.11), (2.12) и (2.13) получаем равенство

$$Q^*_\lambda(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{\mu \in DP, \lambda/\mu \in \mathrm{Hor}} b(\mu,\lambda,x_n) Q^*_\mu(x_1,\ldots,x_{n-1}). \tag{2.14}$$

Итак, мы доказали утверждение теоремы, если $n-\ell(\lambda)$ нечетно.

Рассмотрим теперь случай, когда $n-\ell(\lambda)$ четно. Введем фиктивную переменную $x_0 = 0$. Тогда из свойства стабильности (Предложение 1.10б)) и (2.14) получаем равенства

$$Q^*_\lambda(x_1,\ldots,x_n) = Q^*_\lambda(x_0,x_1,\ldots,x_n) =$$
$$= \sum_{\mu \in DP, \lambda/\mu \in \mathrm{Hor}} b(\mu,\lambda,x_n) Q^*_\mu(x_0,x_1,\ldots,x_{n-1}) =$$
$$= \sum_{\mu \in DP, \lambda/\mu \in \mathrm{Hor}} b(\mu,\lambda,x_n) Q^*_\mu(x_1,\ldots,x_{n-1}).$$

Теорема доказана. □

Определение 2.8. *Рассмотрим упорядоченное множество* $\mathbb{A}_n = \{1' < 1 < 2' < 2 < \cdots < n' < n\}$ *для произвольного натурального числа* n. *Введем на* $\mathbb{A}_n$ *две функции* $|\cdot|$ *и* sgn *формулами*

$$|k| = |k'| = k, \quad \mathrm{sgn}(k) = -\mathrm{sgn}(k') = 1.$$

Пусть λ *и* μ *произвольные строгие разбиения,* $D(\lambda)'$ *и* $D(\mu)'$ *– соответствующие им сдвинутые диаграммы Юнга (Определение* 1.5*), такие, что* $\mu \subset \lambda$ *или равносильно* $D(\mu)' \subset D(\lambda)'$ *(в частности,* μ *может равняться нулевому разбиению). Отображение* $T : D(\lambda)' \setminus D(\mu)' \to \mathbb{A}_n$ *называется сдвинутой таблицей формы* λ/μ *порядка* n*, если выполнены следующие условия:*

(1) $T(i,j) \leqslant T(i,j+1)$;
(2) $T(i,j) \leqslant T(i+1,j)$;
(3) *не более одного* k *встречается в образе каждого столбца;*
(4) *не более одного* k' *встречается в образе каждой строки;*

Обозначим множество сдвинутых таблиц формы λ/μ *порядка* n *через* $\mathrm{STab}(\lambda/\mu, n)$. *Если* $\mu = \emptyset$, *то будем писать просто* $\mathrm{STab}(\lambda, n)$.

Для изображения таблицы T будем на сдвинутой диаграмме Юнга в клетке (i,j) писать значение $T(i,j)$. Вот пример сдвинутой таблицы формы $(6,5,3,1)$ порядка 5.

$1'$	1	1	$3'$	$4'$	4
	$2'$	2	$3'$	$4'$	5
		3	4	4	
			$5'$		

Предложение 2.9. *Пусть* λ *и* μ *– строгие разбиения такие, что* $\lambda/\mu \in \mathrm{Hor}$. *Тогда для* $b(\mu, \lambda, x)$ *(Определение 2.6) выполнено равенство*

$$b(\mu, \lambda, x) = \sum_{R \in \mathrm{STab}(\lambda/\mu, 1)} \prod_{(i,j) \in D(\lambda)' \setminus D(\mu)'} (x + \mathrm{sgn}(R(i,j))(i-j)).$$

Доказательство. Введем отображение сдвига $\mathrm{Shift} : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$, заданное формулой

$$\mathrm{Shift}(i,j) = (i, j+i-1).$$

В частности, по Определению 1.5 имеем $\mathrm{Shift}(D(\lambda)) = D(\lambda)'$.

Рассмотрим произведение

$$\prod_{(i,j) \in D(\lambda)' \setminus D(\mu)'} (x + \mathrm{sgn}(R(i,j))(i-j)). \tag{2.15}$$

Пусть $R \in \mathrm{STab}(\lambda/\mu, 1)$ и $(i,j) \in D(\lambda)' \setminus D(\mu)'$. Рассмотрим три случая.

1) Если $(i+1, j-1) \in D(\lambda)' \setminus D(\mu)'$, то клетки $\mathrm{Shift}(i,j)$ и $\mathrm{Shift}(i+1, j-1)$ находятся друг над другом в одном столбце. Поэтому из условий (2) и (3) Определения 2.8 следует, что $R(\mathrm{Shift}(i,j)) = 1'$. Тогда соответствующий член произведения (2.15) равен

$$x + \mathrm{sgn}(\mathrm{Shift}(i,j)) \cdot (i-j-i+1) = x+j-1 = \varphi_{\lambda/\mu}(i,j;x).$$

2) Если $(i,j-1)\in D(\lambda)'\setminus D(\mu)'$, то клетки $\mathrm{Shift}(i,j-1)$ и $\mathrm{Shift}(i,j)$ находятся в одной строке и из условий (1) и (4) Определения 2.8 следует, что $R(\mathrm{Shift}(i,j))=1$. Тогда соответствующий член произведения (2.15) равен

$$x+\mathrm{sgn}(\mathrm{Shift}(i,j))\cdot(i-j-i+1)=x-j+1=\varphi_{\lambda/\mu}(i,j;x).$$

3)Если $(i,j-1)\notin D(\lambda)'\setminus D(\mu)'$ и $(i+1,j-1)\notin D(\lambda)'\setminus D(\mu)'$, то $R(\mathrm{Shift}(i,j))$ может независимо от остальных значений R принимать значения 1 и 1′. Тогда в сумме произведений вида (2.15) из пар произведений, совпадающих везде, кроме $\mathrm{Shift}(i,j)$, можно вынести и сложить множители, отвечающие $R(\mathrm{Shift}(i,j))$. Получаем

$$(x+\mathrm{sgn}(1)(1-j))+(x+\mathrm{sgn}(1')(1-j))=2x=\varphi_{\lambda/\mu}(i,j;x).$$

Вспоминая Определение 2.6:

$$b(\mu,\lambda,x)=\prod_{(i,j)\in D(\lambda)\setminus D(\mu)}\varphi_{\lambda/\mu}(i,j,x),$$

получаем, что предложение доказано. $\square$

Для обычных Q-функций Шура имеет место комбинаторная формула [6,III,§8,(8.16')]

$$Q_\lambda(x_1,\dots,x_n)=\sum_{T\in\mathrm{STab}(\lambda,n)}\ \prod_{(i,j)\in D(\lambda)'}x_{|T(i,j)|}.$$

Например, если $\lambda=(6,5,3,1),n=5$ и T имеет вид

$$T=\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline 1' & 1 & 1 & 3' & 4' & 4\\ \hline \multicolumn{1}{c|}{} & 2' & 2 & 3' & 4' & 5\\ \cline{2-6} \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c|}{} & 3 & 4 & 4 & \multicolumn{1}{c}{}\\ \cline{3-5} \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c|}{} & 5' & \multicolumn{1}{|c}{} & \multicolumn{1}{c}{}\\ \cline{4-4}\end{array},$$

то соответствующее слагаемое в правой части равно $x_1^3x_2^2x_3^3x_4^5x_5^2$.

Основной результат этой работы – комбинаторная формула для факториальных Q-функций Шура.

Теорема 2.10. *(Комбинаторная формула для факториальных Q-функций.) Пусть $x_1, \ldots, x_n$ – переменные, λ – произвольное строгое разбиение, тогда выполнено равенство*

$$Q^*_\lambda(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{T \in \mathrm{STab}(\lambda, n)} \prod_{(i,j) \in D(\lambda)'} (x_{|T(i,j)|} - \mathrm{sgn}(T(i,j))(j-i)), \tag{2.16}$$

где $\mathrm{STab}, \mathrm{sgn}, |\quad|$ *введены в определении* 2.8.

Например, если $\lambda = (6, 5, 3, 1)$, $n = 5$ и T имеет вид

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1' & 1 & 1 & 3' & 4' & 4 \\ \hline \multicolumn{1}{c|}{} & 2' & 2 & 3' & 4' & 5 \\ \cline{2-6} \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c|}{} & 3 & 4 & 4 & \multicolumn{1}{|c}{} \\ \cline{3-5} \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c|}{} & 5' & \multicolumn{1}{|c}{} & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{4-4} \end{array},$$

то соответствующее слагаемое в правой части равно

$$x_1(x_1 - 1)(x_1 - 2)x_2(x_2 - 1)x_3(x_3 + 2)(x_3 + 3)(x_4 - 1)\cdot$$
$$\cdot(x_4 - 2)(x_4 + 3)(x_4 + 4)(x_4 - 5)x_5(x_5 - 4).$$

Доказательство Теоремы 2.10. Докажем утверждение теоремы индукцией по числу переменных.

При $n = 1$ равенство (2.16), очевидно, верно. Предположим, что для любого строго разбиения μ выполнено равенство

$$Q^*_\mu(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \sum_{T \in \mathrm{STab}(\mu, n-1)} \prod_{(i,j) \in D(\mu)'} (x_{|T(i,j)|} - \mathrm{sgn}(T(i,j))(j-i)).$$

Из Предложения 2.9 и Теоремы 2.7 следуют равенства

$$\sum_{T \in \mathrm{STab}(\lambda, n)} \prod_{(i,j) \in D(\lambda)'} (x_{|T(i,j)|} - \mathrm{sgn}(T(i,j))(j-i)) =$$
$$= \sum_{\mu \in DP, \lambda/\mu \in \mathrm{Hor}} b(\mu, \lambda, x_n) \sum_{T \in \mathrm{STab}(\mu, n-1)}$$
$$\prod_{(i,j) \in D(\mu)'} (x_{|T(i,j)|} - \mathrm{sgn}(T(i,j))(j-i)) =$$

$$= \sum_{\mu\in DP, \lambda/\mu\in \mathrm{Hor}} b(\mu,\lambda,x_n) Q^*_\mu(x_1,\dots,x_{n-1}) = Q^*_\lambda(x_1,\dots,x_n)$$

Таким образом, индукционный переход доказан. Теорема доказана. □

Отметим еще раз, что методом, которым мы доказали комбинаторную формулу для факториальных Q-функций Шура, можно доказать и комбинаторную формулу для обобщенных Q-функций Шура. Ниже мы приводим соответствующую ыпереформулировку основной теоремы.

Теорема 2.11. (*Комбинаторная формула для обобщенных Q-функций.*) *Пусть $x_1,\dots,x_n$ – переменные, λ – произвольное строгое разбиение, тогда выполнено равенство*

$$Q_\lambda(x_1,\dots,x_n|a) = \sum_{T\in \mathrm{STab}(\lambda,n)} \prod_{(i,j)\in D(\lambda)'} (x_{|T(i,j)|} - \mathrm{sgn}(T(i,j)) a_{j-i+1}),$$

где $\mathrm{STab}, \mathrm{sgn}, |\quad|$ *введены в определении* 2.8.

Литература

1. А. М. Вершик, *Описание инвариантных мер для действий некоторых бесконечномерных групп.* — Докл. АН СССР **218** (1974), 749–752.
2. В. Н. Иванов, *Размерность косых сдвинутых диаграмм Юнга и проективные характеры бесконечной симметрической группы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **240** (1997), 115–135.
3. С. В. Керов, *Асимптотическая теория представлений симметрической группы и ее применения в анализе.* Докторская диссертация, С.-Петербург (1994).
4. А. Ю. Окуньков, Г. И. Ольшанский, *Сдвинутые функции Шура.* — Алгебра и Анализ **9**, № 2 (1997), 73–146.
5. F. Knop, *Symmetric and non-Symmetric quantum Capelli polynomials.* q-alg 9603028 (to appear).
6. I. G. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials.* New York, 2nd ed., Oxford Univ. Press, 1995.
7. M. L. Nazarov, *Projective representations of the infinite symmetric group.* Representation theory and dynamical systems (A. M. Vershik, ed.), Advances in Soviet Mathematics, Am. Math. Soc.. vol. 9, 1992, pp. 115–130.
8. A. Yu. Okounkov, *Quantum immanants and higher Capelli identities.* — Transformation Groups **1** (1996), 99–126.
9. A. Yu. Okounkov, *(Shifted) Macdonald polynomials: q-integral representation and combinatorial formula.* — Comp. Math. **112** (1998), 147–182.
10. P. Pragacz, *Algebro-geometric applications of Schur S- and Q-polynomials.* — Lecture Notes in Mathematics **1478** (1991), 130–191.

11. S. Sahi, *Interpolation, Integrality, and a generalization of Macdonald's polynomials.* — Internat. Math. Res. Notices no. 10 (1996), 457–471.
12. I. Schur, *Uber die Darstellung der symmetrischen und der alternierenden Gruppe durch gebrocheme lineare Substitionen.* — J. Reine Angew. Math. **139** (1911), 155–250.
13. J. R. Stembridge, *Shifted tableaux and the projective representations of symmetric groups.* — Adv. in Math. **74** (1989), 87–134.

Ivanov V. N. Combinatorial formula for factorial Schur Q-functions.

We study an interpolation analogue of Schur Q-functions — factorial Schur Q-functions. We obtain an expression of factorial Schur Q-functions in terms of shifted tableaux (combinatorial formula).

Московский
государственный университет

E-mail: vivanov@vivanov.mccme.ru

Поступило 26 января 1999 г.