Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 256, 1999 г.

В. Иванов, С. Керов

АЛГЕБРА КЛАССОВ СОПРЯЖЕННОСТИ В СИММЕТРИЧЕСКИХ ГРУППАХ И ЧАСТИЧНЫЕ ПЕРЕСТАНОВКИ

1. Введение. Главная цель этой заметки – доказательство формулы для свертки классов сопряженности в симметрических группах, предложенной в [7] (формула (2.2), см. также [8]).

Если $\rho \vdash r$ – разбиение натурального числа r и $r \leqslant n$, обозначим через $\widetilde{\rho} = \rho \cup (1^{n-r})$ разбиение n, полученное из ρ добавлением нужного числа единиц. Пусть $C_{\rho;n}$ – сумма перестановок $w \in \mathfrak{S}_n$ циклового типа $\widetilde{\rho}$. Определим также "нормированные" классы

$$A_{\rho;n} = \binom{n-r+m_1(\rho)}{m_1(\rho)} C_{\rho;n}, \tag{1.1}$$

где $m_1(\rho)$ – число единичных слагаемых в разбиении ρ. Мы покажем, что существуют натуральные константы $g^{\rho}_{\sigma,\tau}$, задающие свертку нормированных классов сопряженности в симметрической группе $\mathfrak{S}_n$:

$$A_{\sigma;n} * A_{\tau;n} = \sum_{\rho} g^{\rho}_{\sigma,\tau}\, A_{\rho;n}. \tag{1.2}$$

Формула (1.2) справедлива при достаточно больших n. Более точно, n должно быть не меньше $|\sigma|+|\tau|$, где через $|\rho|$ обозначено то число, разбиением которого является ρ; в противном случае слагаемые в правой части, не реализуемые перестановками в $\mathfrak{S}_n$, следует опустить. Отметим, что элементы $C_{\rho;n}$ не образуют базис в алгебре центральных функций на $\mathfrak{S}_n$: для различных разбиений ρ они могут совпадать.

Из (1.2) немедленно следует старый результат [5]:

$$C_{\sigma;n} * C_{\tau;n} = \sum_{\rho} q^{\rho}_{\sigma,\tau}(n)\, C_{\rho;n}, \tag{1.3}$$

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 98-01-00303 (первый автор) и 99-01-00098 (второй автор).

где σ, τ, ρ пробегают лишь разбиения без единичных слагаемых, а коэффициенты $q^{\rho}_{\sigma,\tau}(n)$ зависят от n полиномиально.

Для доказательства (1.2) мы вводим полугруппы $\mathcal{P}_n$ частичных перестановок множества $\{1, 2, \dots, n\}$. Полугрупповые алгебры $\mathbb{C}[\mathcal{P}_n]$ полупросты и составляют проективное семейство с пределом $\mathcal{B}_\infty = \varprojlim \mathbb{C}[\mathcal{P}_n]$. Группа финитных перестановок $\mathfrak{S}_\infty$ действует в $\mathcal{B}_\infty$ сопряжениями, а ее орбиты A_ρ параметризуются всеми разбиениями натуральных чисел и составляют базис в алгебре инвариантов $\mathcal{A}_\infty = \mathcal{B}_\infty^{\mathfrak{S}_\infty}$. Числа $g^{\rho}_{\sigma,\tau}$ возникают как структурные константы умножения алгебры $\mathcal{A}_\infty$ в этом базисе.

Мы покажем, что алгебра $\mathcal{A}_\infty$ естественно изоморфна алгебре сдвинутых симметрических функций Λ^*, введенной в [3]. Этот изоморфизм играет для сверток центральных элементов в алгебрах $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ такую же роль, как характеристическое отображение ch по отношению к умножению - индуцированию характеров симметрических групп, см. [9, I. 7]. Мы укажем также примеры фильтраций на алгебре $\mathcal{A}_\infty$.

2. Полугруппа частичных перестановок. Обозначим через $\mathbb{P}_n = \{1, \dots, n\}$ отрезок натурального ряда и через $\mathfrak{S}_n$ группу всех перестановок $\mathbb{P}_n$. *Частичной перестановкой* множества $\mathbb{P}_n$ мы называем пару $\alpha = (d, w)$, состоящую из произвольного подмножества $d \subset \mathbb{P}_n$ и произвольной биекции $w : d \to d$ этого подмножества. Множество d условимся называть *носителем* α. Обозначим через $\mathcal{P}_n$ множество всех частичных перестановок множества $\mathbb{P}_n$.

Очевидно, что число элементов в $\mathcal{P}_n$ равно

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k! = \sum_{k=0}^{n} (n \downharpoonright k), \tag{2.1}$$

где $(n \downharpoonright k) = n(n-1)\dots(n-k+1)$ – убывающая факториальная степень. Для этих чисел справедливо рекуррентное соотношение $s_n = ns_{n-1} + 1$. Первые несколько значений таковы: $s_0 = 1$, $s_1 = 2$, $s_2 = 5$, $s_3 = 16$, $s_4 = 65$.

Если $(d, w) \in \mathcal{P}_n$ – частичная перестановка, то через $\widetilde{w}$ мы обозначаем перестановку всего множества $\mathbb{P}_n$, совпадающую с w на d и тождественную вне d. Перестановка $\widetilde{w}$ корректно определена на всех подмножествах, содержащих ее носитель. Это обстоятельство позволяет ввести на множестве частичных перестановок естественное умножение.

Для двух частичных перестановок (d_1, w_1), (d_2, w_2) мы определяем их *произведение* как пару $(d_1 \cup d_2,\ w_1 w_2)$. С этим умножением $\mathcal{P}_n$ становится полугруппой. Частичная перестановка $(\varnothing, e_0)$, где e_0 – тривиальная перестановка пустого множества $\varnothing$, служит единицей в $\mathcal{P}_n$ и является единственным обратимым элементом в полугруппе $\mathcal{P}_n$.

3. Полугрупповая алгебра. Обозначим через $\mathcal{B}_n = \mathbb{C}[\mathcal{P}_n]$ комплексную полугрупповую алгебру полугруппы $\mathcal{P}_n$. Убедимся, что эта алгебра полупроста и найдем ее неприводимые представления.

Зафиксируем подмножество $x \subset \mathbb{P}_n$ величины $|x| = k$ и обозначим через $\mathfrak{S}_x$ группу перестановок подмножества x. Легко видеть, что формула

$$\varphi_x(d, w) = \begin{cases} \widetilde{w}, & \text{если } d \subset x; \\ 0 & \text{иначе} \end{cases} \tag{3.1}$$

задает гомоморфизм алгебр $\mathcal{B}_n \to \mathbb{C}[\mathfrak{S}_x]$. Очевидно, что этот гомоморфизм сюръективен.

Лемма 3.1. *Пусть*

$$b = \sum_{k=0}^{n} \sum_{|d|=k} \sum_{w \in \mathfrak{S}_d} b_{d,w}\,(d, w)$$

– элемент алгебры $\mathcal{B}_n$. Тогда следующие условия равносильны:

(1) $\varphi_y(b) = 0$ *для всех* $y \subset x$*;*
(2) $b_{d,w} = 0$ *для всех* $d \subset x$*.*

Доказательство. Очевидно, что (2) влечет (1). Чтобы убедиться, что из (1) следует (2), проведем индукцию по величине $k = |x|$ множества x.

При $k = 0$ имеем $\varphi_\varnothing(b) = b_{\varnothing, e_0}\, e_0$ и утверждение очевидно.

Пусть $x \subset \mathbb{P}_n$ и v – перестановка множества x. Обозначим через $\overline{d}$ множество подвижных точек перестановки v и через $\overline{v}$ – ограничение v на $\overline{d}$. Частичные перестановки (d, w), для которых $\varphi_x(d, w) = v$, характеризуются следующими условиями:

(1) $\overline{d} \subset d \subset x$;
(2) ограничение w на $\overline{d}$ совпадает с $\overline{v}$;
(3) все точки $d \setminus \overline{d}$ неподвижны для w.

Поэтому коэффициент при v в разложении $\varphi_x(b)$ равен

$$\sum_{\overline{d}\subset d\subset x} \sum_{\overline{w}=\overline{v}} b_{d,w} \ ,$$

где через $\overline{w}$ обозначается ограничение перестановки w на множество ее подвижных точек. Единственное слагаемое в этой сумме, для которого $d = x$, равно $b_{x,v}$. Но по индуктивному предположению все слагаемые с $d \subsetneqq x$ равны нулю, так что этот коэффициент равен $b_{x,v}$. Лемма доказана. •

Следствие 3.2. *Алгебра $\mathcal{B}_n$ полупроста и изоморфна прямой сумме групповых алгебр симметрических групп,*

$$\bigoplus_{x\subset\mathbb{P}_n} \varphi_x : \mathcal{B}_n \cong \bigoplus_{x\subset\mathbb{P}_n} \mathbb{C}[\mathfrak{S}_x]. \tag{3.2}$$

Доказательство. По лемме 3.1 гомоморфизм $\varphi = \bigoplus \varphi_x$ инъективен, а размерность правой части равна

$$\sum_{x\subset\mathbb{P}_n} |x|! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k! = |\mathcal{P}_n|$$

и совпадает с размерностью $\mathcal{B}_n$. Поэтому φ – изоморфизм. •

Положим

$$\varepsilon_d = \sum_{y:d\subset y\subset\mathbb{P}_n} (-1)^{|y|-|d|}\,(y,e), \tag{3.3}$$

где e – тождественная перестановка. Легко видеть, что $\varphi_d(\varepsilon_d) = e \in \mathfrak{S}_d$ и $\varphi_x(\varepsilon_d) = 0$ при $x \neq d$. Поэтому элемент ε_d алгебры $\mathcal{B}_n$ является центральным проектором. Минимальные центральные проекторы имеют вид $\varepsilon_d\delta_\lambda$, где $d \subset \mathbb{P}_n$, а δ_λ пробегает минимальные центральные проекторы в алгебре $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_d]$. Центр алгебры $\mathcal{B}_n$ имеет вид

$$Z(\mathcal{B}_n) \cong \bigoplus_{d\subset\mathbb{P}_n} Z(\mathbb{C}[\mathfrak{S}_d]),$$

где $Z(\mathbb{C}[\mathfrak{S}_d])$ – центр групповой алгебры $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_d]$. Размерность центра равна

$$\dim Z(\mathcal{B}_n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p(k), \tag{3.4}$$

где $p(k)$ – число разбиений k.

4. Классы сопряженности в $\mathcal{P}_n$. Симметрическая группа $\mathfrak{S}_n$ действует автоморфизмами полугруппы $\mathcal{P}_n$ по формуле $(d,w)\mapsto(vd,vwv^{-1})$. Орбиты этого действия будем называть *классами сопряженности* в $\mathcal{P}_n$. Очевидно, что две частичные перестановки сопряжены тогда и только тогда, когда совпадают величины их носителей и цикловые типы. Таким образом, классы сопряженности $A_{\rho;n}\subset\mathcal{P}_n$ параметризуются *частичными разбиениями* n, то есть разбиениями $\rho\vdash r$ любых натуральных чисел $0\leqslant r\leqslant n$. В частности, $A_{\varnothing;0}=\{(\varnothing,e)\}$.

Если $\rho\vdash r\leqslant n$ – частичное разбиение, обозначим через $\widetilde{\rho}=\rho\cup\{1^{n-r}\}$ разбиение n, полученное добавлением необходимого числа единиц. Пусть $C_{\rho;n}$ – класс сопряженности в группе $\mathfrak{S}_n$, состоящий из перестановок циклового типа $\widetilde{\rho}$. Как обычно, обозначим через $m_k=m_k(\rho)$ число строк длины k в разбиении ρ. Дополнение $\mathbb{P}_n\setminus d$ носителя частичной перестановки (d,w) содержит $n-r$ точек, так что общее число неподвижных точек для $\widetilde{w}$ равно $n-r+m_1(\rho)$.

Обозначим через $\psi:(d,w)\mapsto\widetilde{w}$ гомоморфизм забывания носителя частичной перестановки.

Пусть перестановка $v\in\mathfrak{S}_n$ имеет цикловый тип $\widetilde{\rho}$. Множество $\psi^{-1}(v)\cap A_{\rho;n}$ состоит в точности из частичных перестановок (d,w), для которых носитель d содержит все подвижные точки перестановки v. Во множестве d можно произвольно выбирать $m_1(\rho)$ неподвижных точек из общего числа неподвижных точек перестановки v, равного $n-r+m_1(\rho)$. Следовательно, числа элементов в классе $A_{\rho;n}$ и в классе сопряженности $C_{\rho;n}$ группы $\mathfrak{S}_n$ связаны соотношением

$$|A_{\rho;n}|=\binom{n-r+m_1(\rho)}{m_1(\rho)}|C_{\rho;n}|. \tag{4.1}$$

Действие симметрической группы $\mathfrak{S}_n$ на $\mathcal{P}_n$ продолжается по линейности до действия $\mathfrak{S}_n$ на алгебре $\mathcal{B}_n$. Обозначим через $\mathcal{A}_n=\mathcal{B}_n^{\mathfrak{S}_n}$ подалгебру инвариантных элементов при этом действии.

Гомоморфизм $\psi:\mathcal{P}_n\to\mathfrak{S}_n$ также продолжается до сюръективного гомоморфизма алгебр $\psi:\mathcal{B}_n\to\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$. Он коммутирует с действием группы $\mathfrak{S}_n$ сопряжениями на алгебрах $\mathcal{B}_n$ и $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$. Поэтому $\psi(\mathcal{A}_n)=Z(\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n])$, где $Z(\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n])$ – центр групповой алгебры $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$.

Отождествим класс сопряженности $A_{\rho;n}$ с элементом

$$A_{\rho;n} = \sum_{(d,w)\in A_{\rho;n}} (d,w) \tag{4.2}$$

алгебры $\mathcal{B}_n$. В частности, если $|\rho| > n$, то $A_{\rho;n} = 0$. Из наших определений следует, что элементы $A_{\rho;n}$, где $|\rho| \leqslant n$, составляют линейный базис алгебры $\mathcal{A}_n$. Ясно, что

$$\psi(A_{\rho;n}) = \binom{n-r+m_1(\rho)}{m_1(\rho)} C_{\rho;n}. \tag{4.3}$$

В разделе 12 будут построены все неприводимые представления $\pi_{x,\lambda}$ алгебры $\mathcal{B}_n$. Отметим, что в любом неприводимом представлении $\pi_{x,\lambda}$ алгебры $\mathcal{B}_n$ элемент $A_{\rho;n}$ действует скалярным оператором. Поэтому $A_{\rho;n} \in Z(\mathcal{B}_n)$ и алгебра $\mathcal{A}_n$ содержится в центре $Z(\mathcal{B}_n)$. При $n \geqslant 2$ это включение – строгое.

5. Алгебры $\mathcal{B}_\infty$ и $\mathcal{A}_\infty$. Пусть $m \leqslant n$. Введем отображение $\theta_m : \mathcal{B}_n \to \mathcal{B}_m$ формулой

$$\theta_m(d,w) = \begin{cases} (d,w), & \text{если } d \subset \mathbb{P}_m, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases} \tag{5.1}$$

Отображение θ_m является гомоморфизмом алгебр и коммутирует с действием группы $\mathfrak{S}_m$ на $\mathcal{B}_n$ и на $\mathcal{B}_m$. Поэтому $\theta_m(\mathcal{A}_n) = \mathcal{A}_m$.

Определим *степень* частичной перестановки $(d,w) \in \mathcal{P}_n$ формулой $\deg(d,w) = |d|$. Для $b = \sum_{\alpha\in\mathcal{P}_n} b_\alpha\, \alpha \in \mathcal{B}_n$ положим $\deg b = \max \deg \alpha$, где максимум берется по всем α, для которых $b_\alpha \neq 0$. Функция $\deg$ определяет фильтрацию на алгебре $\mathcal{B}_n$. Отметим, что $\deg(\theta_m(b)) \leqslant \deg b$ при всех $b \in \mathcal{B}_n$.

Обозначим через $\mathcal{B}_\infty$ проективный предел алгебр $\mathcal{B}_n$ относительно морфизмов θ_n и через $\mathcal{A}_\infty$ проективный предел алгебр $\mathcal{A}_n$. Оба предела берутся в категории фильтрованных алгебр.

Пусть $\mathfrak{S}_\infty$ – бесконечная симметрическая группа, то есть группа финитных перестановок натурального ряда. Группа $\mathfrak{S}_\infty$ естественным образом действует на $\mathcal{B}_\infty$, и $\mathcal{A}_\infty = \mathcal{B}_\infty^{\mathfrak{S}_\infty}$ является подалгеброй инвариантов этого действия.

6. Структурные константы алгебры $\mathcal{A}_\infty$. Обозначим через θ_n естественный гомоморфизм $\theta_n : \mathcal{B}_\infty \to \mathcal{B}_n$, а также его ограничение на $\mathcal{A}_\infty$. Естественное вложение алгебр $i_n : \mathcal{B}_n \to \mathcal{B}_\infty$ согласовано с проекцией θ_n: $\theta_n \circ i_n = id_{\mathcal{B}_n}$. Элементы $\mathcal{B}_\infty$ удобно записывать как формальные бесконечные суммы,

$$b = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|d|=n} \sum_{w \in \mathfrak{S}_d} b_{d,w}\,(d,w). \tag{6.1}$$

Для заданного разбиения $\rho \vdash r$ положим $A_\rho = \sum (d,w)$; суммирование ведется по таким частичным перестановкам $(d,w) \in \mathcal{P}_\infty$, что $|d| = r$ и w имеет цикловый тип ρ. Элементы A_ρ, где ρ пробегает все разбиения, составляют линейный базис в $\mathcal{A}_\infty$.

Обозначим через $g^\rho_{\sigma,\tau}$ структурные константы алгебры $\mathcal{A}_\infty$ в базисе $\{A_\rho\}$,

$$A_\sigma\, A_\tau = \sum_\rho g^\rho_{\sigma,\tau}\, A_\rho. \tag{6.2}$$

Отметим, что $\theta_n(A_\rho) = A_{\rho;n}$, где $A_{\rho;n}$ – введенный в разделе 4 элемент алгебры $\mathcal{A}_n$. Из того факта, что $\theta_n : \mathcal{A}_\infty \to \mathcal{A}_n$ – гомоморфизм, получаем следующее утверждение.

Предложение 6.1.

$$A_{\sigma;n}\, A_{\tau;n} = \sum_\rho g^\rho_{\sigma,\tau}\, A_{\rho;n}. \tag{6.3}$$

При $|\rho| \leqslant n$ по определению имеем $A_{\rho;n} = 0$. Поясним предложение 6.1 примером. Простейшая нетривиальная формула умножения в алгебре $\mathcal{A}_\infty$ такова:

$$A_{(2)}\, A_{(2)} = A_{(1^2)} + 3A_{(3)} + 2A_{(2^2)}.$$

В алгебрах же $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$, $\mathcal{A}_4$ имеем

$$\begin{aligned}
&A_{(2);2}\, A_{(2);2} = A_{(1^2);2}\\
&A_{(2);3}\, A_{(2);3} = A_{(1^2);3} + 3A_{(3);3}\\
&A_{(2);4}\, A_{(2);4} = A_{(1^2);4} + 3A_{(3);4} + 2A_{(2^2);4}.
\end{aligned}$$

Укажем полезную комбинаторную интерпретацию структурных констант $g^\rho_{\sigma,\tau}$.

Предложение 6.2. *Для любого разбиения $\rho \vdash r$ положим $d_\rho = \mathbb{P}_r$ и пусть*

$$w_\rho = (1,\dots,\rho_1)(\rho_1+1,\dots,\rho_1+\rho_2)\dots(|\rho|-\rho_{\ell(\rho)}+1,\dots,|\rho|)$$

– фиксированная перестановка множества d_ρ циклового типа ρ. Рассмотрим множество $G^\rho_{\sigma,\tau}(n)$ таких пар $\big((d_1,w_1),(d_2,w_2)\big)\in\mathcal{P}_n\times\mathcal{P}_n$, что

(1) $(d_1,w_1)\in A_{\sigma;n}$, $(d_2,w_2)\in A_{\tau;n}$;

(2) $d_1\cup d_2=d_\rho$, $w_1\,w_2=w_\rho$.

Тогда при $n\geqslant r$ число элементов $|G^\rho_{\sigma,\tau}(n)|$ равно $g^\rho_{\sigma,\tau}$.

Доказательство. Частичная перестановка $(d_\rho,\,w_\rho)$ принадлежит классу A_ρ. По определению, число $|G^\rho_{\sigma,\tau}(n)|$ есть коэффициент при элементе $(d_\rho,\,w_\rho)$ в произведении $A_{\sigma;n}\,A_{\tau;n}$. Если $n\geqslant|\rho|$, то $A_{\rho;n}\neq0$ и, используя предложение 6.1, получаем $|G^\rho_{\sigma,\tau}(n)|=g^\rho_{\sigma,\tau}$. •

Предложение 6.3. *Если $g^\rho_{\sigma,\tau}\neq0$, то $|\rho|\leqslant|\sigma|+|\tau|$.*

Доказательство. Если $g^\rho_{\sigma,\tau}\neq0$, то из предложения 6.2 следует, что $G^\rho_{\sigma,\tau}(|\rho|)\neq\varnothing$. Следовательно, существуют множества d_1,d_2, такие, что $|d_1|=|\sigma|$, $|d_2|=|\tau|$, $|d_1\cup d_2|=|\rho|$. Таким образом, $|\rho|\leqslant|\sigma|+|\tau|$. •

Замечание 6.4. Обозначим через $\sigma\cup\tau$ разбиение, части которого получены объединением всех частей разбиений σ и τ. Из предложения 6.2 получаем, что $\rho=\sigma\cup\tau$ – единственное разбиение, для которого $|\rho|=|\sigma|+|\tau|$ и $g^\rho_{\sigma,\tau}\neq0$; при этом коэффициент равен

$$g^{\sigma\cup\tau}_{\sigma,\,\tau}=\prod_{k\geqslant1}\binom{m_k(\sigma)+m_k(\tau)}{m_k(\sigma)}.$$

7. Свертки классов сопряженности в симметрических группах. Если $\rho\vdash r$ – произвольное разбиение, обозначим через $\overline{\rho}$ разбиение, полученное из разбиения ρ удалением всех его единичных частей (если они имелись). Таким образом, $m_1(\overline{\rho})=0$ и $\rho=\overline{\rho}\cup1^{r-|\overline{\rho}|}$.

Напомним, что мы выделили в центре групповой алгебры симметрической группы $Z(\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n])$ элементы $C_{\rho;n}$, параметризованные разбиениями $\rho\vdash r$ любых чисел $0\leqslant r\leqslant n$,

$$C_{\rho;n}=\sum_{w\ \text{типа}\ \widetilde{\rho}}w. \tag{7.1}$$

В частности, $C_{\rho;n}=0$, если $|\rho|>n$. Предположим теперь, что $|\sigma|,|\tau|\leqslant n$; тогда $C_{\sigma;n}=C_{\tau;n}$ если и только если $\overline{\sigma}=\overline{\tau}$. Условимся говорить, что разбиение $\rho\vdash r$ – *собственное*, если $m_1(\rho)=0$.

Множество всех собственных разбиений обозначим через $\overline{\mathbb{Y}}$. Элементы $\{C_{\rho;n}\ :\ \rho\in\overline{\mathbb{Y}},\ |\rho|\leqslant n\}$ образуют линейный базис в $Z(\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n])$.

Теорема 7.1. *Для любого разбиения $\rho\vdash r\leqslant n$ рассмотрим образы $\psi(A_{\rho;n})$*

$$\psi(A_{\rho;n})=\binom{n-r+m_1(\rho)}{m_1(\rho)}\,C_{\rho;n} \tag{7.2}$$

элементов $A_{\rho;n}\in\mathcal{A}_n$ в центре групповой алгебры симметрической группы $\mathfrak{S}_n$ при отображении "забывания носителя" из раздела 4. Тогда

а) *для любого n выполнено равенство*

$$\psi\big(A_{\sigma;n}\big)\ \psi\big(A_{\tau;n}\big)=\sum_{\rho}g^{\rho}_{\sigma,\tau}\ \psi\big(A_{\rho;n}\big), \tag{7.3}$$

где $g^{\rho}_{\sigma,\tau}$ – не зависящие от n структурные константы алгебры $\mathcal{A}_\infty$;

б) *при $n\geqslant|\sigma|+|\tau|$ сумма в правой части равенства (7.3) стабильна, то есть отличные от нуля слагаемые индексируются одними и теми же разбиениями ρ.*

Доказательство. а) Равенство (7.3) следует из того, что ψ – гомоморфизм, и из предложения 6.1.

б) Набор слагаемых в правой части равенства (7.3), отличных от нуля, индексируется такими разбиениями ρ, что $|\rho|\leqslant n$ и $g^{\rho}_{\sigma,\tau}\neq 0$. В силу предложения 6.3 при $n\geqslant|\sigma|+|\tau|$ этот набор является фиксированным. •

Предложение 7.2. *Пусть $h^{\rho}_{\sigma,\tau}$ – такие числа, что*

$$\psi\big(A_{\sigma;n}\big)\ \psi\big(A_{\tau;n}\big)=\sum_{\rho}h^{\rho}_{\sigma,\tau}\ \psi\big(A_{\rho;n}\big),$$

для любого n. Тогда $h^{\rho}_{\sigma,\tau}=g^{\rho}_{\sigma,\tau}$ при всех ρ,σ,τ.

Доказательство. Докажем это утверждение от противного. Выберем произвольные разбиения σ и τ. Пусть ρ – такое разбиение, что $h^{\rho}_{\sigma,\tau}\neq g^{\rho}_{\sigma,\tau}$, и $h^{\nu}_{\sigma,\tau}=g^{\nu}_{\sigma,\tau}$ для любых разбиений ν таких, что $|\nu|<|\rho|$. Положим $|\rho|=n$; тогда

$$0=\sum_{\nu}(g^{\nu}_{\sigma,\tau}-h^{\nu}_{\sigma,\tau})\,\psi(A_{\nu;n})=\sum_{|\nu|=n}(g^{\nu}_{\sigma,\tau}-h^{\nu}_{\sigma,\tau})\,\psi(A_{\nu;n}).$$

С другой стороны, множество $\{\psi(A_{\nu;n}) : |\nu| = n\}$ линейно независимо. Получили противоречие. $\bullet$

Таким образом, $\{\psi(A_{\rho;n})\}$ есть семейство элементов, пропорциональных классам сопряженности (с коэффициентами пропорциональности, зависящими от ρ и от n), при этом структурные константы умножения не зависят от n. Подобное семейство было ранее введено в работах [7, 8]. Идея подобных элементов также близка к работе [1].

Вернемся к умножению классов сопряженности $C_{\rho;n}$.

Предложение 7.3. *Пусть $\sigma, \tau, \rho \in \overline{\mathbb{Y}}$ – собственные разбиения (т.е. не имеющие частей, равных единице). Определим многочлены $q^{\rho}_{\sigma,\tau}(n)$, полагая*

$$q^{\rho}_{\sigma,\tau}(n) = \sum_{k\geqslant 0} g^{\rho\cup(1^k)}_{\sigma,\,\tau} \binom{n-|\rho|}{k}. \tag{7.4}$$

Тогда

$$C_{\sigma;n} * C_{\tau;n} = \sum_{|\rho|\leqslant n,\, m_1(\rho)=0} q^{\rho}_{\sigma,\tau}(n)\, C_{\rho;n} \tag{7.5}$$

для любых $\sigma, \tau \in \overline{\mathbb{Y}}$.

Утверждение о том, что коэффициенты $q^{\rho}_{\sigma,\tau}(n)$ в (7.5) суть многочлены от n, принимающие в целых точках лишь целые значения, впервые было получено в [5, теорема 2.2].

Доказательство. Для собственного разбиения σ формула (4.3) упрощается и сводится к $\psi(A_{\sigma;n}) = C_{\sigma;n}$. Поэтому

$$\begin{aligned} C_{\sigma;n}\, C_{\tau;n} = \psi(A_{\sigma;n})\, \psi(A_{\tau;n}) &= \sum_{|\rho|\leqslant n} g^{\rho}_{\sigma,\tau}\, \psi(A_{\rho;n}) = \\ &= \sum_{|\rho|\leqslant n} g^{\rho}_{\sigma,\tau} \binom{n-|\rho|+m_1(\rho)}{m_1(\rho)} C_{\rho;n}. \end{aligned}$$

Собирая вместе подобные слагаемые вида $C_{\rho;n} = C_{\overline{\rho}\cup(1^k);n}$ при $k \geqslant 0$, получаем формулу (7.4) для коэффициентов в (7.5). $\bullet$

Из замечания 6.4 следует, что $\deg q^{\sigma\cup\tau}_{\sigma,\,\tau} = 0$.

Замечание 7.4. В сумме, участвующей в формуле (7.4), может быть более одного ненулевого слагаемого. Рассмотрим, например, $\sigma = \tau = (3)$. Из формул в разделе 11 видно, что и $g^{(3)}_{\sigma,\tau} \neq 0$, и $g^{(3,1)}_{\sigma,\tau} \neq 0$.

Замечание 7.5. Пусть Φ – кольцо полиномов от одной переменной, принимающих в целых точках лишь целые значения и $\Phi_{\mathbb{C}}$ – кольцо полиномов вида $\widetilde{P}(t) = cP(t)$, где $P \in \Phi$ и $c \in \mathbb{C}$. В статье [5] авторы работают с Φ-алгеброй $\mathcal{K}$, свободно порожденной над Φ базисом C_ρ, где $\rho \in \overline{\mathbb{Y}}$ пробегает собственные разбиения (без единичных частей). Формальная связь нашей алгебры $\mathcal{A}_\infty$ и алгебры $\mathcal{K}$ состоит в том, что отображение

$$A_\rho \mapsto \binom{n - |\rho| + m_1(\rho)}{m_1(\rho)} C_{\overline{\rho}}$$

задает эпиморфизм $\Phi_{\mathbb{C}}$-алгебр $\mathcal{A}_\infty \bigotimes_{\mathbb{C}} \Phi_{\mathbb{C}}$ и $\mathcal{K} \bigotimes_{\Phi} \Phi_{\mathbb{C}}$.

8. Полугруппа заполнений. Если $\rho \vdash r$ – разбиение, обозначим через

$$z_\rho = \prod_{i \geqslant 1} i^{m_i(\rho)} m_i(\rho)!$$

величину централизатора подстановки циклового типа ρ. Заметим, что

$$\frac{z_\rho}{m_1(\rho)!} = z_{\overline{\rho}} = \frac{z_{\widetilde{\rho}}}{(n - r + m_1(\rho))!}\,. \tag{8.1}$$

Наряду с ранее введенным элементами A_ρ мы рассмотрим родственный базис в алгебре $\mathcal{A}_\infty$, состоящий из элементов $a_\rho = z_\rho\, A_\rho$. Пусть $f^\rho_{\sigma,\tau}$ – структурные константы умножения в этом новом базисе,

$$a_{\sigma;n}\; a_{\tau;n} = \sum_\rho f^\rho_{\sigma,\tau}\, a_{\rho;n}\,. \tag{8.2}$$

Они связаны с константами $g^\rho_{\sigma,\tau}$ очевидной формулой

$$f^\rho_{\sigma,\tau} = \frac{z_\sigma z_\tau}{z_\rho}\, g^\rho_{\sigma,\tau}\,. \tag{8.3}$$

Мы покажем, что все числа $f^\rho_{\sigma,\tau}$ – целые неотрицательные и дадим их комбинаторную интерпретацию, аналогичную предложению 6.2.

Определение. Пусть λ – диаграмма Юнга с k клетками и d – множество из k различных натуральных чисел. Любую биекцию $R : \lambda \to d$ условимся называть *заполнением* формы λ и состава d, а множество d – *носителем* заполнения R. Определим перестановку $w_R \in \mathfrak{S}_d$, объявляя строки заполнения R циклами, так что цикловый тип w_R есть λ. Очевидно, что число заполнений формы λ и фиксированного состава равно $n! = z_\lambda\,|C_\lambda|$.

Например, для заполнения

$$R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 9 & 2 & 7 \\ 6 & 5 & \end{pmatrix}$$

диаграммы $\lambda = (3,3,2)$ с носителем $d = \{1,2,3,4,5,6,7,9\}$ имеем $w_R = (1,4,3)\ (2,7,9)\ (5,6)$.

Определим *свертку* $R = S{*}T$ *заполнений* S, T следующими правилами.

Пусть $d_R = d_S \cup d_T$ – объединение носителей заполнений S, T. Упорядочим множество d_R, читая сначала элементы S, а затем элементы T слева направо по строкам и сверху вниз. Повторяющиеся элементы заполнения T при этом игнорируются.

Первым элементом в d_R служит первый элемент s первой строки заполнения S. Образуем строку определяемого нами заполнения R как цикл произведения перестановок $\widetilde{w}_S$ и $\widetilde{w}_T$, содержащий s и начинающийся с s. Тильда означает, что перестановки w_S, w_T тривиально доопределяются на множество d_R: все точки вне прежней области определения считаются неподвижными.

Переходя к построению других строк заполнения R предположим, что часть строк R уже построена. Если при этом использованы не все элементы множества d_R, обозначим через s первый из оставшихся (в указанном выше порядке). Очередной строкой R объявляется цикл произведения перестановок $\widetilde{w}_S$ и $\widetilde{w}_T$, содержащий s. При этом первым элементом строки выбирается s.

Длины строк, образованных по этим правилам, не обязательно убывают. Переупорядочим строки в порядке убывающей длины, не меняя относительного порядка строк равной длины. Получившееся заполнение R и есть свертка заполнений S и T.

Поясним определение свертки примером. Пусть

$$S = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 & 9 \\ 2 & 1 & 7 & & \end{pmatrix}; \qquad T = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 9 & 6 \\ 8 & & \end{pmatrix}.$$

Тогда $d_R = \mathbb{P}_9$, а произведение перестановок $\widetilde{w}_S$ и $\widetilde{w}_T$ равно $(1,3)(2,5,6,7)(4)(8)(9)$. Поэтому

$$S * T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & & \\ 4 & & & \\ 5 & 6 & 7 & 2 \\ 9 & & & \\ 8 & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 & 2 \\ 3 & 1 & & \\ 4 & & & \\ 9 & & & \\ 8 & & & \end{pmatrix}.$$

Предложение 8.1. *Зафиксируем диаграммы Юнга σ, τ. Для любого разбиения $\rho \vdash r$ положим $d_\rho = \mathbb{P}_r$ и пусть R_ρ – каноническое заполнение диаграммы Юнга ρ, в котором клетки пронумерованы числами $1, 2, \dots, r$ последовательно слева направо и сверху вниз. Рассмотрим множество $F^\rho_{\sigma,\tau}$ таких пар заполнений (S, T), что*

(1) *S имеет форму σ, а T – форму τ;*
(2) *$S * T = R_\rho$.*

Тогда число элементов $|F^\rho_{\sigma,\tau}|$ равно $f^\rho_{\sigma,\tau}$. В частности, структурные константы в (8.2) – целые неотрицательные.

Доказательство. Множество $\mathcal{F}_r$ заполнений R с носителем $d_R \subset \mathbb{P}_r$ образует полугруппу относительно введенной выше операции свертки. Сопоставляя заполнению R частичную перестановку (d_R, w_R), получаем эпиморфизм полугрупп $u : \mathcal{F}_r \to \mathcal{P}_r$.

Группа $\mathfrak{S}_r$ очевидным образом действует автоморфизмами полугруппы $\mathcal{F}_r$, причем гомоморфизм u эквивариантен при этом действии. Каждая частичная перестановка $(d, w) \in \mathcal{P}_r$ циклового типа ρ имеет ровно z_ρ прообразов в $\mathcal{F}_r$. Поэтому структурные константы умножения $|F^\rho_{\sigma,\tau}|$ и $g^\rho_{\sigma,\tau}$ связаны формулой типа (8.3) и предложение доказано. $\bullet$

Из предложения 8.1 нетрудно вывести формулы для коэффициентов $f^\rho_{\sigma,\tau}$ в простейших случаях.

Следствие 8.2. *Если $\rho = \sigma \cup \tau$, то $f^\rho_{\sigma,\tau} = 1$.*

Следствие 8.3. *Пусть диаграмма Юнга ρ получается из диаграмм σ, τ (1) заменой строки σ длины i и строки τ длины j на строку длины $i+j-1$ и (2) объединением оставшихся строк (с последующим их упорядочением по убыванию). Пусть $m_i(\sigma)$ – кратность строк длины i в σ, а $m_j(\tau)$ – кратность строк длины j в τ. Тогда $f^{\rho}_{\sigma,\tau} = im_i(\sigma)\, jm_j(\tau)$.*

9. Изоморфизм алгебры $\mathcal{A}_\infty$ и алгебры сдвинутых симметрических функций. В работах [10, 8, 3] была введена и изучена алгебра сдвинутых симметрических функций Λ^*. В этом разделе мы устанавливаем изоморфизм этой алгебры с алгеброй $\mathcal{A}_\infty$ и указываем элементы $\mathcal{A}_\infty$, соответствующие сдвинутым функциям Шура s^*_λ и сдвинутым аналогам степенных сумм Ньютона $p^\#_\rho$, введенным в [3, (1.6) и (14.9)].

Алгебра Λ^* определяется следующим образом. Обозначим через $\Lambda^*(n)$ алгебру полиномов с комплексными коэффициентами от $x_1, \dots, x_n$, которые становятся симметричными в новых переменных $x'_i = x_i - i$. Алгебра $\Lambda^*(n)$ фильтрована степенью полинома. Специализация $x_{n+1} = 0$ задает гомоморфизм фильтрованных алгебр $\Lambda^*(n+1) \to \Lambda^*(n)$. Обозначим через Λ^* проективный предел алгебр $\Lambda^*(n)$ относительно этих гомоморфизмов (в категории фильтрованных алгебр). Алгебра Λ^* называется *алгеброй сдвинутых симметрических функций.* Кольцо Λ^* может быть определено и над $\mathbb{Z}$, но для наших целей удобнее считать, что Λ^* является алгеброй над полем $\mathbb{C}$.

Для элемента $f \in \Lambda^*$ и разбиения λ будем обозначать через $f(\lambda)$ значение $f(\lambda_1, \dots, \lambda_{\ell(\lambda)})$. Элементы алгебры Λ^* однозначно определяются своими значениями на разбиениях.

Основную роль в работе [3] играет базис *сдвинутых функций Шура* $\{s^*_\mu\}$ пространства Λ^*, параметризованный разбиениями $\mu \in \mathbb{Y}$. Для этих функций в [3] указаны явные формулы и множество других замечательных фактов, но ниже мы используем только следующие два свойства функций s^*_μ. Если $\rho \vdash r \leqslant n$, то

$$\sum_{\mu \vdash r} \frac{s^*_\mu(\lambda)}{(n \downharpoonleft r)}\, \chi^\mu_\rho = \frac{1}{\dim \lambda} \sum_{\mu \vdash r} \dim(\lambda/\mu)\, \chi^\mu_\rho = \frac{1}{\dim \lambda} \chi^\lambda_{\tilde{\rho}} \tag{9.1}$$

согласно [3, теорема 7.1]. Если же $\mu \vdash r > |\lambda|$, то

$$s^*_\mu(\lambda) = 0 \tag{9.2}$$

по [3, теорема 3.1]. Для разбиения $\lambda \vdash n$ мы обозначаем через χ^λ неприводимый характер симметрической группы $\mathfrak{S}_n$. Если ρ – разбиение числа $r \leqslant n$, то $\chi^\lambda_{\widetilde{\rho}}$ – значение характера χ^λ на элементе циклового типа $\widetilde{\rho}$.

Следуя [3, §14.2] (см. также [8]), мы введем еще один базис $\{p^\#_\rho\}$ в Λ^*, определяя его элементы формулой

$$p^\#_\rho = \sum_{\mu \vdash r} \chi^\mu_\rho \, s^*_\mu.$$

Отметим, что $\deg p^\#_\rho = |\rho|$. Из (9.1) и (9.2) следует, что

$$\frac{p^\#_\rho(\lambda)}{(n \downharpoonright r)} = \begin{cases} \frac{1}{\dim \lambda} \, \chi^\lambda_{\widetilde{\rho}}, & \text{если } n \geqslant r, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{9.3}$$

Теорема 9.1. *Линейное отображение $F : \mathcal{A}_\infty \to \Lambda^*$, определенное на базисных элементах A_ρ формулой*

$$F(A_\rho) = \frac{p^\#_\rho}{z_\rho}, \tag{9.4}$$

является изоморфизмом алгебр $\mathcal{A}_\infty$ и Λ^*.

Доказательство. Пусть ρ – разбиение числа r и $m_1 = m_1(\rho)$. Согласно (4.3), образ элемента $A_\rho \in \mathcal{A}_\infty$ в центре групповой алгебры $Z(\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n])$ равен

$$(\psi \circ \theta_n)(A_\rho) = \binom{n - r + m_1}{m_1} C_{\rho;n}.$$

Если $r \leqslant n$, то

$$\chi^\lambda\big(\psi \circ \theta_n(A_\rho)\big) = \binom{n - r + m_1}{m_1} \, \frac{n!}{z_{\widetilde{\rho}}} \, \chi^\lambda_{\widetilde{\rho}} = \frac{(n \downharpoonright r)}{z_\rho} \, \chi^\lambda_{\widetilde{\rho}},$$

так что по формуле (9.3)

$$\frac{1}{z_\rho} p^\#_\rho(\lambda) = \frac{(n \downharpoonright r)}{z_\rho} \, \frac{1}{\dim \lambda} \, \chi^\lambda_{\widetilde{\rho}} = \frac{1}{\dim \lambda} \, \chi^\lambda\big(\psi \circ \theta_n(a_\rho)\big).$$

Если же $r > n$, последняя формула также верна, поскольку обе части зануляются в силу (9.2). Таким образом, мы можем задать отображение $F:\mathcal{A}_\infty\to\Lambda^*$, определенное в (9.4), эквивалентной формулой

$$\big(F(a)\big)(\lambda)=\frac{1}{\dim\lambda}\chi^\lambda(\psi\circ\theta_{|\lambda|}(a));\qquad a\in\mathcal{A}_\infty. \tag{9.5}$$

Отображение ψ – гомоморфизм алгебры $\mathcal{A}_n$ на $Z(\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n])$, а неприводимые нормированные характеры $\chi^\lambda/\dim\lambda$ группы $\mathfrak{S}_n$ задают гомоморфизмы $Z(\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n])\to\mathbb{C}$. Следовательно,

$$F(ab)(\lambda)=(F(a)\,F(b))(\lambda) \tag{9.6}$$

при всех $a,b\in\mathcal{A}_\infty$ и формулы (9.4), (9.5) определяют изоморфизм алгебры $\mathcal{A}_\infty$ на алгебру Λ^*. Теорема доказана. $\bullet$

Предложение 9.2. *Свяжем с разбиением $\mu\vdash m$ элемент*

$$x_\mu=\sum_{|d|=m}\ \sum_{w\in\mathfrak{S}_d}\chi^\mu(w)\,(d,w) \tag{9.7}$$

алгебры $\mathcal{A}_\infty$. Тогда $F(x_\mu)=s^*_\mu$.

Доказательство. Если $|\mu|>|\lambda|$, то $F(x_\mu)(\lambda)=0=s^*_\mu(\lambda)$. Если же $|\mu|\leqslant|\lambda|$, то

$$\psi\circ\theta_n(x_\mu)=\sum_{\substack{|d|=m\\ d\subset\mathbb{P}_n}}\ \sum_{w\in\mathfrak{S}_d}\psi(d,w)=\sum_{\substack{|d|=m\\ d\subset\mathbb{P}_n}}\ \sum_{w\in\mathfrak{S}_d}\widetilde{w}.$$

Из (9.1) и соотношений ортогональности для неприводимых характеров симметрической группы $\mathfrak{S}_m$ получаем цепочку равенств

$$\begin{aligned}
F(x_\mu)(\lambda)&=\sum_{\substack{|d|=m\\ d\subset\mathbb{P}_n}}\ \sum_{w\in\mathfrak{S}_d}\chi^\mu(w)\,\frac{\chi^\lambda(\widetilde{w})}{\dim\lambda}=\\
&=\binom{n}{m}\sum_{w\in\mathfrak{S}_m}\chi^\mu(w)\sum_{\nu\vdash m}\chi^\nu(w)\frac{s^*_\nu(\lambda)}{(n\downharpoonright m)}=\\
&=\binom{n}{m}\sum_{\nu\vdash m}\frac{s^*_\nu(\lambda)}{(n\downharpoonright m)}\sum_{w\in\mathfrak{S}_m}\chi^\mu(w)\,\chi^\nu(w)=\\
&=\binom{n}{m}\frac{m!\,s^*_\mu(\lambda)}{(n\downharpoonright m)}=s^*_\mu(\lambda).
\end{aligned}$$

Предложение доказано. $\bullet$

10. Фильтрации алгебры $\mathcal{A}_\infty$. На алгебре $\mathcal{A}_\infty$ есть очевидная фильтрация

$$\deg_1(A_\rho) = |\rho|. \qquad (10.1)$$

В разложении свертки $A_\sigma A_\tau$ имеется единственное слагаемое $A_{\sigma\cup\tau}$ максимальной степени $\deg_1(A_{\sigma\cup\tau}) = |\sigma| + |\tau|$. Поэтому образующие $A_{(1)}, A_{(2)}, \ldots$ алгебраически независимы, а присоединенная градуированная алгебра естественным образом изоморфна алгебре полиномов от $A_{(1)}, A_{(2)}, \ldots$ (над полем $\mathbb{C}$).

В статье [7] была введена другая фильтрация на $\mathcal{A}_\infty$.

Предложение 10.1. *Функция*

$$\deg_2(A_\rho) = |\rho| + m_1(\rho) \qquad (10.2)$$

задает фильтрацию на алгебре $\mathcal{A}_\infty$.

Доказательство. Рассмотрим частичные перестановки (d_1, w_1), (d_2, w_2) и разобьем объединение их носителей $d_1 \cup d_2$ на непересекающиеся части следующим образом:

$$\begin{aligned} d_1 \setminus d_2 &= d_{mf}^{12} \cup d_{ff}^{12} \\ d_2 \setminus d_1 &= d_{mf}^{21} \cup d_{ff}^{21} \\ d_1 \cap d_2 &= d_{mm} \cup d_{fm} \cup d_{mf} \cup d_{ff}\,. \end{aligned}$$

Первый индекс равен f, если точки соответствующей области неподвижны для перестановки w_1 и равен m, если они подвижны. Второй индекс имеет аналогичный смысл по отношению к перестановке w_2. По определению,

$$\begin{aligned} \deg_2(w_1) &= |d_{mf}^{12}| + |d_{mm}| + |d_{mf}| + 2\,|d_{ff}^{12}| + 2\,|d_{ff}| + 2\,|d_{fm}| \\ \deg_2(w_2) &= |d_{fm}^{21}| + |d_{mm}| + |d_{fm}| + 2\,|d_{ff}^{21}| + 2\,|d_{ff}| + 2\,|d_{mf}|. \end{aligned}$$

Перестановка $w = w_1 w_2$ множества $d = d_1 \cup d_2$ не имеет неподвижных точек в областях d_{mf}^{12}, d_{mf}, d_{fm}, d_{fm}^{21}. Напротив, все точки областей d_{ff}^{12}, d_{ff}, d_{ff}^{21} неподвижны для w. В области d_{mm} могут встречаться как подвижные, так и неподвижные точки w.

Поэтому

$$\begin{aligned}\deg_2(w_1w_2) &\leqslant |d^{12}_{mf}| + |d_{mf}| + |d_{fm}| + \\ &+ |d^{21}_{fm}| + 2\,|d^{12}_{ff}| + 2\,|d_{ff}| + 2\,|d^{21}_{ff}| + 2\,|d_{mm}| \\ &\leqslant |d^{12}_{mf}| + 3\,|d_{mf}| + 3\,|d_{fm}| + \\ &+ |d^{21}_{fm}| + 2\,|d^{12}_{ff}| + 4\,|d_{ff}| + 2\,|d^{21}_{ff}| + 2\,|d_{mm}| \\ &= \deg_2(w_1) + \deg_2(w_2)\end{aligned}$$

и предложение доказано. •

Пусть $\mathcal{T}_2$ – множество транспозиций, т.е. всех перестановок из $\mathfrak{S}_\infty$ с единственным нетривиальным циклом длины 2. Длину $\deg(w)$ перестановки w относительно семейства образующих $\mathcal{T}_2$ называют метрикой Кэли. Ясно, что функция $\deg_3(d,w) = \deg(w)$ задает фильтрацию на алгебре $\mathcal{A}_\infty$. Фильтрация Кэли изучалась в работах [5], [9, Chap. I, §7, примеры 24, 25], [6]. Известно в частности, что

$$\deg_3(A_\rho) = |\rho| - \ell(\rho). \tag{10.3}$$

Отметим, что согласно [5, лемма 3.9], $\deg_3(A_\sigma) + \deg_3(A_\tau) = \deg_3(A_\rho)$ тогда и только тогда, когда многочлен $q^\rho_{\sigma,\tau}(n)$, введенный в предложении 7.3, является константой, не зависящей от n.

Можно поставить вопрос об общем описании фильтраций на алгебре $\mathcal{A}_\infty$. Не имея общего ответа, мы сделаем здесь лишь несколько наблюдений. Прежде всего дадим некоторые определения.

Обозначим через $\mathbb{Y}$ множество всех разбиений. Функция $\theta : \mathbb{Y} \to \mathbb{Z}_+$ называется *фильтрацией* алгебры $\mathcal{A}_\infty$, если для любой тройки разбиений σ, τ, ρ для которых $g^\rho_{\sigma,\tau} > 0$, выполнено неравенство $\theta(\rho) \leqslant \theta(\sigma) + \theta(\tau)$. Фильтрацию θ назовем *аддитивной*, если

$$\theta(\sigma \cup \tau) = \theta(\sigma) + \theta(\tau) \tag{10.4}$$

для всех $\sigma, \tau \in \mathbb{Y}$. Условие (10.4) означает, что

$$\theta(\rho) = \sum_{k\geqslant 1} \gamma_k\; m_k(\rho), \tag{10.5}$$

где $\gamma_k = \theta((k))$ – степени одноцикловых подстановок.

Пример 10.1. Все отмеченные выше фильтрации $\deg_1$, $\deg_2$, $\deg_3$ аддитивны. Константы γ_k имеют вид

$$\begin{array}{lll}
\gamma_1 = 1,\ \gamma_2 = 2,\ \gamma_3 = 3,\ \gamma_4 = 4,\ \ldots & \text{для} & \deg_1 \\
\gamma_1 = 2,\ \gamma_2 = 2,\ \gamma_3 = 3,\ \gamma_4 = 4,\ \ldots & \text{для} & \deg_2 \\
\gamma_1 = 0,\ \gamma_2 = 1,\ \gamma_3 = 2,\ \gamma_4 = 3,\ \ldots & \text{для} & \deg_3\,.
\end{array}$$

Отметим некоторые общие свойства констант γ_k.

Предложение 10.2. *Следующие свойства чисел $\gamma = \{\gamma_k\}_{k=1}^{\infty}$ являются общими для всех аддитивных фильтраций:*

$$0 \leqslant \gamma_1 \leqslant \gamma_2 \leqslant \gamma_3 \leqslant \gamma_4 \leqslant \ldots \tag{10.6}$$

$$\gamma_{i+j+1} \leqslant \gamma_{i+1} + \gamma_{j+1}. \tag{10.7}$$

$$k\,\gamma_1 \leqslant 2\,\gamma_k \tag{10.8}$$

$$\gamma_{k+1} \leqslant k\,\gamma_2 \tag{10.9}$$

$$\gamma_{2k+1} \leqslant 2\,\gamma_{k+1}. \tag{10.10}$$

Всегда существует предел

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\gamma_{k+1}}{k} = \inf_k \frac{\gamma_{k+1}}{k} =: L(\gamma), \tag{10.11}$$

причем $\gamma_1 \leqslant 2\,L(\gamma) \leqslant 2\,\gamma_2$.

Доказательство. Поскольку $A_{(1)} * A_{(1)} = 2A_{(1^2)} + A_{(1)}$, имеем $\gamma_1 \leqslant 2\gamma_1$ и потому $\gamma_1 \geqslant 0$. Перемножая циклы, пересекающиеся по общей паре смежных элементов, имеем

$$\begin{aligned}(b_1, b_2, \ldots, b_i, a_1, a_2) \quad (a_1, a_2, c_1, c_2, \ldots, c_j) = \\ = (b_1, b_2, \ldots, b_i, a_1)(a_2, c_1, c_2, \ldots, c_j),\end{aligned} \tag{10.12}$$

откуда следует, что $g^{(i+1),(j+1)}_{(i+2),(j+2)} > 0$ и $\gamma_{i+1} + \gamma_{j+1} \leqslant \gamma_{i+2} + \gamma_{j+2}$. В частности, при $i = j$ получаем $\gamma_j \leqslant \gamma_{j+1}$, что доказывает (10.6).

Для доказательства (10.7) заметим, что

$$(b_1, b_2, \ldots, b_i, a)\,(a, c_1, c_2, \ldots, c_j) = (b_1, b_2, \ldots, b_i, a, c_1, c_2, \ldots, c_j),$$

так что $g^{(i+j+1)}_{(i+1),(j+1)} > 0$. Утверждение (10.11) является стандартным следствием из неравенств (10.7) (см., например, [4, задача 98]).

Формула (10.8) следует из

$$(b_1, b_2, \dots, b_k)\,(b_k, b_{k-1}, \dots, b_1) = (b_1)\,(b_2)\,\dots\,(b_k),$$

а (10.10) есть частный случай (10.7) при $i = j = k$.

Поскольку

$$(a_1, a_2)\,(a_3, a_4)\,\dots\,(a_{2k-1}, a_{2k}) \qquad (a_2, a_3)\,(a_4, a_5)\,\dots\,(a_{2k}, a_{2k+1}) = \\ = (a_2, a_4, \dots, a_{2k}, a_{2k+1}, a_{2k-1}, \dots, a_3, a_1);$$
$$(a_1, a_2)\,(a_3, a_4)\,\dots\,(a_{2k+1}, a_{2k+2}) \qquad (a_2, a_3)\,(a_4, a_5)\,\dots\,(a_{2k}, a_{2k+1}) = \\ = (a_2, a_4, \dots, a_{2k}, a_{2k+2}, a_{2k+1}, a_{2k-1}, \dots, a_3, a_1),$$

получаем неравенства (10.9) при четном и нечетном k соответственно. Последнее утверждение предложения немедленно следует из определения предела $L(\gamma)$ и формул (10.8), (10.9). $\bullet$

Замечание. Условия (10.6) – (10.11) не гарантируют, что функция, определяемая числами γ по формуле (10.5) является фильтрацией. Например, число нетривиальных циклов $\theta(\rho) = \ell(\rho) - m_1(\rho)$ соответствует константам $\gamma_1 = 0$, $\gamma_k = 1$ при $k \geqslant 2$. Неравенства (10.6) – (10.11) справедливы, но функция θ не является фильтрацией:

$$(1, 2, 3, 4)\,(1, 5, 4, 6, 3) = (1, 5)\,(2, 3)\,(4, 6).$$

Замечание. Формулу (10.12) можно обобщить следующим образом:

$$(b_1, b_2, \dots, b_i, a_1, a_2, \dots, a_{2k}) \quad (a_1, a_2, \dots, a_{2k}, c_1, c_2, \dots, c_j) = \\ = (b_1, b_2, \dots, b_i, a_1, a_3, \dots, a_{2k-1})(a_2, a_4, \dots, a_{2k}, c_1, c_2, \dots, c_j)$$

при четном числе общих элементов перемножаемых циклов. При нечетном числе общих элементов имеем

$$(b_1, b_2, \dots, b_i, a_1, a_2, \dots, a_{2k}, a_{2k+1})(a_1, a_2, \dots, a_{2k}, a_{2k+1}, c_1, c_2, \dots, c_j) \\ = (b_1, b_2, \dots, b_i, a_1, a_3, \dots, a_{2k-1}, a_{2k+1}, c_1, c_2, \dots, c_j, a_2, a_4, \dots, a_{2k}),$$

откуда $\gamma_{i+j+2k+1} \leqslant \gamma_{i+2k+1} + \gamma_{j+2k+1}$. Отметим также, что

$$(b_1, b_2, \dots, b_i, a_0, a_1, \dots, a_{k-1}) \quad (a_{k-1}, \dots, a_1, a_0, c_1, c_2, \dots, c_j) = \\ = (b_1, b_2, \dots, b_i, a_0, c_1, c_2, \dots, c_j)(a_1)\,(a_2)\,\dots\,(a_{k-1}),$$

так что $\gamma_{i+j+1} + (k-1)\gamma_1 \leqslant \gamma_{i+k} + \gamma_{j+k}$ при $k \geqslant 1$.

Замечание. Из равенства

$$\begin{gathered}(a_1, \dots, a_i, w, c_1, \dots, c_k, v, b_1, \dots, b_j, u)\\(\alpha_1, \dots, \alpha_I, u, \beta_1, \dots, \beta_J, v, \gamma_1, \dots, \gamma_K, w) =\\= (a_1, \dots, a_i, w, \alpha_1, \dots, \alpha_I)\,(b_1, \dots, b_j, u, \beta_1, \dots, \beta_J)\times\\\times(c_1, \dots, c_k, v, \gamma_1, \dots, \gamma_K)\end{gathered}$$

следует неравенство $\gamma_{I+i+1}+\gamma_{J+j+1}+\gamma_{K+k+1} \leqslant \gamma_{I+J+K+3}+\gamma_{i+j+k+3}$ и в частности, $3\gamma_{2n-1} \leqslant 2\gamma_{3n}$.

Предложение 10.3. *Пусть $J \subset \mathbb{N}$. Положим*

$$\theta_J(\rho) = |\rho| + \sum_{k\in J} m_k(\rho).$$

Тогда функция θ_J является аддитивной фильтрацией алгебры $\mathcal{A}_\infty$.

Доказательство. Пусть разбиения σ, τ, ρ таковы, что $g^\rho_{\sigma,\tau} > 0$. Тогда существуют элементы $(d_1, \omega_\sigma) \in A_\sigma$, $(d_2, \omega_\tau) \in A_\tau$ такие, что $(d_1 \cup d_2, \omega_\sigma\omega_\tau) \in A_\rho$.

Рассмотрим разложения перестановок ω_σ, ω_τ, $\omega_\sigma\omega_\tau$ в произведения непересекающихся циклов. Если $1 \notin J$, то обозначим через M множество таких циклов перестановки $\omega_\sigma\omega_\tau$, что их нет ни в разложении ω_σ ни в разложении ω_τ, причем длина каждого такого цикла принадлежит J. Если же $1 \in J$, то включим в множество M также такие неподвижные точки (говоря нестрого, "циклы длины один") перестановки $\omega_\sigma\omega_\tau$ в множестве $d_1 \cup d_2$ что они не являются неподвижными ни относительно ω_σ, ни относительно ω_τ. Тогда

$$|M| \geqslant \sum_{k\in J}(m_k(\rho) - m_k(\sigma) - m_k(\tau)). \tag{10.13}$$

Пусть α — цикл, принадлежащий M, тогда в этом цикле существует хотя бы один элемент, принадлежащий $d_1 \cap d_2$. Аналогично, если x — неподвижная точка, принадлежащая M, то $x \in d_1 \cap d_2$. Поэтому

$$|M| \leqslant |d_1 \cap d_2| = |d_1| + |d_2| - |d_1 \cup d_2| = |\sigma| + |\tau| - |\rho|. \tag{10.14}$$

Из (10.13) и (10.14) следует, что

$$|\sigma| + |\tau| + \sum_{k\in J}(m_k(\sigma) + m_k(\tau)) \geqslant |\rho| + \sum_{k\in J} m_k(\rho).$$

•

11. Примеры сверток классов в алгебре $\mathcal{A}_\infty$. Ниже приведены простейшие формулы умножения базисных элементов a_ρ алгебры $\mathcal{A}_\infty$. В силу теоремы 9.1 эти же формулы можно понимать как примеры умножения функций $p^\#_\rho$ в алгебре Λ^*.

Подобные формулы можно также использовать для вычисления свертки классов сопряженности в симметрических группах. Например, подставляя $a_\rho = z_\rho\, A_\rho$, получим из соответствующей строки формулу

$$A_{(3)} * A_{(3)} = 2\, A_{(3^2)} + 5\, A_{(5)} + 8\, A_{(2^2)} + 3\, A_{(31)} + A_{(3)} + 2\, A_{(1^3)}.$$

Переходя к гомоморфным образам $\psi(A_\rho)$ и подставляя сюда

$$\psi(A_\rho) = \binom{t - r + m_1(\rho)}{m_1(\rho)}\, A_\rho,$$

получим пример формулы из статьи [5],

$$C_{(3)} * C_{(3)} = 2\, C_{(3^2)} + 5\, C_{(5)} + 8\, C_{(2^2)} + (3t-8)\, C_{(3)} + \frac{t(t-1)(t-2)}{3}\, C_\varnothing.$$

Свертки классов сопряженности получаются отсюда подстановкой различных натуральных значений переменной t. Например,

$$\begin{aligned}
&C_{(3);3} * C_{(3);3} = 2\, C_{\varnothing;3} + C_{(3);3}\\
&C_{(3);4} * C_{(3);4} = 8\, C_{\varnothing;4} + 4\, C_{(3);4} + 8\, C_{(2^2);4}\\
&C_{(3);5} * C_{(3);5} = 20\, C_{\varnothing;5} + 7\, C_{(3);5} + 8\, C_{(2^2);5} + 5\, C_{(5);5}\\
&C_{(3);6} * C_{(3);6} = 40\, C_{\varnothing;6} + 10\, C_{(3);6} + 8\, C_{(2^2);6} + 5\, C_{(5);6} + 2\, C_{(3^2);6}\ .
\end{aligned}$$

Итак, примеры формул умножения:

$$a_{(2)}\ a_{(2)} = a_{(2^2)} + 4\, a_{(3)} + 2\, a_{(1^2)}$$

$$a_{(3)}\ a_{(2)} = a_{(32)} + 6\, a_{(4)} + 6\, a_{(21)}$$

$$\begin{aligned}
a_{(4)}\ a_{(2)} &= a_{(42)} + 8\, a_{(5)} + 4\, a_{(2^2)} + 8\, a_{(31)}\\
a_{(2^2)}\ a_{(2)} &= a_{(2^3)} + 8\, a_{(32)} + 8\, a_{(4)} + 4\, a_{(21^2)}\\
a_{(3)}\ a_{(3)} &= a_{(3^2)} + 9\, a_{(5)} + 9\, a_{(2^2)} + 9\, a_{(31)} + 3\, a_{(3)} + 3\, a_{(1^3)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{(5)}\ a_{(2)} &= a_{(52)} + 10\, a_{(6)} + 10\, a_{(32)} + 10\, a_{(41)}\\
a_{(32)}\ a_{(2)} &= a_{(32^2)} + 6\, a_{(42)} + 4\, a_{(3^2)} + 12\, a_{(5)} + 6\, a_{(2^21)} + 2\, a_{(31^2)}\\
a_{(4)}\ a_{(3)} &= a_{(43)} + 12\, a_{(6)} + 24\, a_{(32)} + 12\, a_{(41)} + 12\, a_{(4)} + 12\, a_{(21^2)}\\
a_{(2^2)}\ a_{(3)} &= a_{(32^2)} + 12\, a_{(42)} + 24\, a_{(5)} + 12\, a_{(2^21)} + 24\, a_{(31)}
\end{aligned}$$

$$a_{(6)}\ a_{(2)} = a_{(62)} + 12\,a_{(7)} + 12\,a_{(42)} + 6\,a_{(3^2)} + 12\,a_{(51)}$$

$$a_{(42)}\ a_{(2)} = a_{(42^2)} + 8\,a_{(52)} + 4\,a_{(43)} + 16\,a_{(6)} + 4\,a_{(2^3)} + \\ + 8\,a_{(321)} + 2\,a_{(41^2)}$$

$$a_{(3^2)}\ a_{(2)} = a_{(3^22)} + 12\,a_{(43)} + 18\,a_{(6)} + 12\,a_{(321)}$$

$$a_{(2^3)}\ a_{(2)} = a_{(2^4)} + 12\,a_{(32^2)} + 24\,a_{(42)} + 6\,a_{(2^21^2)}$$

$$a_{(5)}\ a_{(3)} = a_{(53)} + 15\,a_{(7)} + 30\,a_{(42)} + 15\,a_{(3^2)} + \\ + 15\,a_{(51)} + 30\,a_{(5)} + 15\,a_{(2^21)} + 15\,a_{(31^2)}$$

$$a_{(32)}\ a_{(3)} = a_{(3^22)} + 9\,a_{(52)} + 6\,a_{(43)} + 36\,a_{(6)} + \\ + 9\,a_{(2^3)} + 15\,a_{(321)} + 21\,a_{(32)} + 36\,a_{(41)} + 3\,a_{(21^3)}$$

$$a_{(4)}\ a_{(4)} = a_{(4^2)} + 16\,a_{(7)} + 32\,a_{(42)} + 24\,a_{(3^2)} + 16\,a_{(51)} + 48\,a_{(5)} + \\ + 32\,a_{(2^21)} + +4\,a_{(2^2)} + 16\,a_{(31^2)} + 16\,a_{(31)} + 4\,a_{(1^4)}$$

$$a_{(2^2)}\ a_{(2^2)} = a_{(2^4)} + 16\,a_{(32^2)} + 32\,a_{(42)} + 32\,a_{(3^2)} + \\ + 64\,a_{(5)} + 8\,a_{(2^21^2)} + 32\,a_{(31^2)} + +16\,a_{(2^2)} + 8\,a_{(1^4)}$$

12. Неприводимые представления полугруппы $\mathcal{P}_n$ и характеры алгебры $\mathcal{B}_\infty$. Зафиксируем подмножество $x \subset \mathbb{P}_n$ величины $|x| = k$ и пусть λ – диаграмма Юнга с k клетками. Тогда формула

$$\pi_{x,\lambda}(d, w) = \begin{cases} \pi_\lambda(\varphi_x(d, w)), & \text{если } d \subset x; \\ 0 & \text{иначе} \end{cases} \tag{12.1}$$

задает неприводимое представление полугруппы $\mathcal{P}_n$. Здесь 0 – нулевая матрица порядка $\dim \pi_\lambda$.

Предложение 12.1. *Представления $\pi_{x,\lambda}$ (где $x \subset \mathbb{P}_n$, $|x| = k$ и $\lambda \in \mathbb{Y}_k$ – подмножество и диаграмма Юнга общего размера $0 \leqslant k \leqslant n$) неприводимы, попарно не эквивалентны и составляют полный список неприводимых представлений полугрупповой алгебры $\mathcal{B}_n$.*

Доказательство. Матрицы $\pi_{x,\lambda}(d, w)$ представления $\pi_{x,\lambda}$ отличны от нуля в точности для элементов (d, w), для которых $d \subset x$. Тем самым, представления, параметризованные разными множествами x, не эквивалентны. Очевидно, что представления $\pi_{x,\lambda}$, $\pi_{x,\mu}$ при $\lambda \neq \mu$ также не эквивалентны. Полнота списка вытекает из следствия 3.2. •

Опишем правило ветвления неприводимых представлений полугруппы $\mathcal{P}_n$ при ограничении на $\mathcal{P}_{n-1} \subset \mathcal{P}_n$.

Будем писать $\mu \nearrow \lambda$, если диаграмма λ получается из диаграммы μ путем добавления одной клетки. Пусть Γ_n – множество пар (x, λ), где $x \subset \mathbb{P}_n$ – подмножество, λ – диаграмма Юнга и предполагается, что x и λ имеют одинаковую величину, $|x| = |\lambda|$. Множество Γ_n параметризует неприводимые представления $\pi_{x,\lambda}$ полугруппы $\mathcal{P}_n$.

Предложение 12.2. *Предположим, что множество $x \subset \mathbb{P}_n$ не содержит точку n. Тогда ограничение представления $\pi_{x,\lambda}$ на подполугруппу $\mathcal{P}_{n-1}$ остается неприводимым (и параметризуется той же парой (x, λ), понимаемой как элемент Γ_{n-1}). Если же $n \in x$, то ограничение неприводимого представления $\pi_{x,\lambda}$ на $\mathcal{P}_{n-1}$ имеет вид*

$$\operatorname{Res} \pi_{x,\lambda} = \bigoplus_{\mu : \mu \nearrow \lambda} \pi_{y,\mu}, \tag{12.2}$$

где $y = x \setminus \{n\}$.

Доказательство. Непосредственно следует из конструкции представлений и хорошо известного правила ветвления неприводимых представлений симметрических групп. $\bullet$

Таким образом, множество вершин графа ветвления неприводимых представлений полугрупп $\mathcal{P}_n$ есть $\Gamma = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Gamma_n$. Пусть (y, μ), (x, λ) – вершины соседних этажей Γ_{n-1} и Γ_n. Они связаны дугой (кратности 1) тогда и только тогда, когда $\mu = \lambda$ или $\mu \nearrow \lambda$ (т.е. когда диаграмма λ совпадает с μ или получается из μ добавлением одной клетки). В первом случае $x = y$, во втором $x = y \cup \{n\}$.

Применяя эргодический метод (см.[2]) к графу ветвления Γ, нетрудно получить описание неотрицательных неразложимых гармонических функций на Γ или, что эквивалентно, характеров алгебры $\mathcal{B}_\infty$. Не останавливаясь на этом вопросе подробно, укажем лишь параметризацию характеров.

Пусть X – произвольное подмножество в $\mathbb{P}_\infty = \{1, 2, \dots\}$. Обозначим через Γ_X множество тех вершин $(x, \lambda) \in \Gamma$, для которых $x \subset X$. По предложению 12.2, Γ_X – коидеал в графе ветвления Γ, т. е.

$$(y, \mu) \nearrow (x, \lambda) \in \Gamma_X \quad \Longrightarrow \quad (y, \mu) \in \Gamma_X.$$

Любая гармоническая функция на коидеале канонически продолжается (нулем) до гармонической функции на полном графе ветвления. Заметим, что если множество X бесконечно, то граф Γ_X отличается от графа Юнга $\mathbb{Y}$ лишь тривиальным дублированием некоторых этажей. Как и для графа Юнга, его неразложимые гармонические функции $\varphi^{(\alpha;\beta;X)}$ параметризуются точками симплекса Тома Δ. По определению, Δ состоит из пар невозрастающих неотрицательных последовательностей $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots)$, для которых

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \leqslant 1.$$

Функции $\varphi^{(\alpha;\beta;X)}$ имеют вид

$$\varphi^{(\alpha;\beta;X)}(y,\mu) = \begin{cases} s_\mu(\alpha;\beta), & \text{если } y \subset X \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где $s_\mu(\alpha;\beta)$ – расширенные функции Шура, см. [1].

Если же X – конечное множество, $|X| = k$, то неразложимые гармонические функции $\varphi^{(\lambda;X)}$ на идеале Γ_X параметризуются диаграммами Юнга $\lambda \in \mathbb{Y}_k$ с k клетками и имеют вид

$$\varphi^{(\lambda;X)}(y,\mu) = \begin{cases} \frac{\dim(\mu,\lambda)}{\dim\lambda}, & \text{если } y \subset X \text{ и } \mu \subset \lambda \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где $\dim(\mu,\lambda)$ – число стандартных косых таблиц Юнга формы λ/μ и $\dim\lambda$ – число всех стандартных таблиц формы λ.

Литература

1. А. М. Вершик, С. В. Керов, *Асимптотическая теория характеров симметрической группы.* — Функц. анализ и его прил. **15**, № 4 (1981), 15–27.
2. А. М. Вершик, С. В. Керов, *Локально полупростые алгебры. Комбинаторная теория и K_0-функтор.* — Итоги науки. Современные проблемы математики. Новейшие достижения, **26** (1985), 3–56.
3. А. Ю. Окуньков, Г. И. Ольшанский, *Сдвинутые функции Шура.* — Алгебра и Анализ **9**, № 2 (1997), 73–146.
4. Г. Полиа, Г. Сеге, *Задачи и теоремы из анализа, ч. 1.* Наука, М. (1978).
5. H. K. Farahat, G. Higman, *The centres of symmetric groups rings.* — Proc. Roy. Soc. Sect. A **250** (1959), 212–221.
6. I. P. Goulden, D. M. Jackson, *Symmetric Functions and Macdonald's Result for Top Connexion Coefficients in the Symmetric Group.* — J. Algebra **166** no. 2 (1994), 364–378.
7. S. Kerov, *Gaussian Limit for the Plancherel Measure of the Symmetric Group.* — C. R. Acad. Sci. Paris **316** (1993), 303–308.

8. S. Kerov, G. Olshanski, *Polynomial functions on the set of Young diagrams.* — C. R. Acad. Sci. Paris **319** (1994), 121–126.
9. I. G. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials, 2nd edition.* Oxford Univ. Press, 1995.
10. G. Olshanski, *Representations of infinite-dimensional classical groups, limits of enveloping algebras, and Yangians.* Topics in representation theory (A. A. Kirillov ed.), Adv. Sov. Math, 2, Am. Math. Soc.. Providence, R. I., 1991, pp. 1–66.

Ivanov V., Kerov S. The algebra of conjugacy classes in symmetric groups, and partial permutations.

We prove a convolution formula for the conjugacy classes in symmetric groups conjectured by the second author. A combinatorial interpretation of coefficients is provided. As a main tool we introduce new semigroup of partial permutations. We describe its structure, representations, and characters. We also discuss filtrations on the subalgebra of invariants in the semigroup algebra.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им В. А. Стеклова РАН
Московский
государственный университет
vivanov@vivanov.mccme.ru,
kerov@pdmi.ras.ru

Поступило 22 июня 1999 г.