Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 256, 1999 г.

А. Г. Качуровский

О СХОДИМОСТИ СРЕДНИХ В ЭРГОДИЧЕСКОЙ ТЕОРЕМЕ ДЛЯ ГРУПП $\mathbb{Z}^d$

Давно и хорошо изучена сходимость средних в эргодической теореме для группы $\mathbb{Z}$; см., например, обстоятельную монографию [1] и недавний обзор результатов по скоростям сходимости в [2]. Сходимость в эргодических теоремах для более общих групп преобразований изучена гораздо хуже. Вопрос о скоростях сходимости почти не рассматривался; имеется лишь небольшая работа о действиях локально конечных групп [3].

Цель настоящей работы – перенесение основных результатов о скоростях сходимости для группы $\mathbb{Z}$ из [2] на действия групп $\mathbb{Z}^d$. Кроме того, в последнем разделе работы дается аналог для $\mathbb{Z}^d$ мартингально–эргодической теоремы из [4], которую можно рассматривать как эргодическую теорему с постепенным забыванием точками фазового пространства своих точных начальных координат.

Пользуясь случаем, выражаю благодарность А. М. Вершику и А. М. Степину, которым обязан своим интересом к действиям групп $\mathbb{Z}^d$.

1. Необходимые понятия. Пусть (Ω, F, λ) – вероятностное пространство, $T_1, \cdots, T_d$ – попарно коммутирующие его автоморфизмы. Для каждой функции $f \in L_1(\Omega)$ положим

$$S_n f = \sum_{k_1=0}^{n-1} \cdots \sum_{k_d=0}^{n-1} f \circ T_1^{k_1} \cdots T_d^{k_d} \ ; \qquad A_n f = \frac{1}{n^d} S_n f.$$

Классическая эргодическая теорема для группы $\mathbb{Z}^d$ утверждает в такой ситуации сходимость п.в. средних $A_n f$ при $n \to \infty$ (к функции f^*); см., например, [1].

Для $f \in L_2(\Omega)$ через $b_{k_1 \cdots k_d} f$ обозначим корреляционные коэффициенты нашей динамической системы, т.е. скалярные произведения $(f \circ T_1^{k_1} \cdots T_d^{k_d}, f)$. Через σ_f обозначаем спектральную

Работа выполнена при поддержке РФФИ: программа “Ведущие научные школы”, грант 96–15-96060 и грант РФФИ 96–01–00676.

меру рассматриваемой динамической системы, т.е. такую неотрицательную борелевскую меру на группе характеров группы $\mathbb{Z}^d$ (т.е. на торе $[-\pi,\pi)^d$), что для каждой $f \in L_2(\Omega)$

$$b_{k_1\cdots k_d} f = \int\limits_{[-\pi,\pi)^d} e^{i(k_1x_1+\cdots+k_dx_d)} d\sigma_f(x_1,\cdots,x_d). \tag{1}$$

Через $\Phi_n(x)$ обозначим удвоенное $(n-1)$-е ядро Фейера, т.е. положим

$$\Phi_n(x) = \frac{1}{n}\frac{\sin^2\frac{nx}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}}.$$

Как хорошо известно (см., например, [5])

$$\Phi_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{|m|<n}(n-|m|)e^{imx}. \tag{2}$$

Через $L_p^0(\Omega)$ обозначаем, как обычно, класс функций из $L_p(\Omega)$ с нулевым средним.

2. Убывание дисперсии средних. В этом разделе работы мы рассматриваем только случай $f \in L_2^0(\Omega)$, т.е. дисперсии $\mathrm{D}A_n f$ и $\mathrm{D}S_n f$ величин $A_n f$ и $S_n f$ совпадают у нас с $\|A_n f\|_2^2$ и $\|S_n f\|_2^2$, соответственно (и $\mathrm{D}A_n f = n^{-2d}\mathrm{D}S_n f$).

Следующая теорема в одномерном ($d=1$) случае хорошо известна; см., например, [5]. Ее перенесение на многомерный случай не представляет особого труда и также известно (например, А. М. Степину), – хотя, по-видимому, никогда не публиковалось.

Теорема 1. *Дисперсия величины $S_n f$, $\mathrm{D}S_n f$, следующим образом выражается через корреляционные коэффициенты $b_{k_1\cdots k_d} f$ и спектральную меру σ_f:*

$$\mathrm{D}S_n f = \sum_{|k_1|<n}\cdots\sum_{|k_d|<n}\left(\prod_{i=1}^{d}(n-|k_i|)\right) b_{k_1\cdots k_d} f; \tag{3}$$

$$\mathrm{D}S_n f = \int\limits_{[-\pi,\pi)^d} n^d \Phi_n(x_1)\cdots\Phi_n(x_d) d\sigma_f(x_1,\cdots,x_d). \tag{4}$$

Доказательство. Так как T_i, $i=1,\cdots,d$, попарно коммутируют, то

$$\mathrm{D}S_n f = (S_n f, S_n f) =$$

$$= \sum_{m_1=0}^{n-1} \cdots \sum_{m_d=0}^{n-1} \sum_{l_1=0}^{n-1} \cdots \sum_{l_d=0}^{n-1} (f \circ T_1^{m_1} \cdots T_d^{m_d}, f \circ T_1^{l_1} \cdots T_d l_d) =$$

$$= \sum_{m_1=0}^{n-1} \cdots \sum_{m_d=0}^{n-1} \sum_{l_1=0}^{n-1} \cdots \sum_{l_d=0}^{n-1} (f \circ T_1^{m_1-l_1} \cdots T_d^{m_d-l_d}, f) =$$

$$= \sum_{|k_1|<n} \cdots \sum_{|k_d|<n} \left(\prod_{i=1}^{d} (n-|k_i|) \right) (f \circ T_1^{k_1} \cdots T_d^{k_d}, f),$$

что и доказывает равенство (3). Далее из (3) заменой (1) получаем:

$$\mathrm{D}S_n f =$$

$$= \int\limits_{[-\pi,\pi)^d} \sum_{|k_1|<n} \cdots \sum_{|k_d|<n} \left(\prod_{i=1}^{d} (n-|k_i|) \right) e^{i(k_1x_1+\cdots+k_dx_d)} d\sigma_f(x_1, \cdots, x_d) =$$

$$= \int\limits_{[-\pi,\pi)^d} \left(\sum_{|k_1|<n} (n-|k_1|) e^{ik_1x_1} \right) \cdots$$

$$\cdots \left(\sum_{|k_d|<n} (n-|k_d|) e^{ik_dx_d} \right) d\sigma_f(x_1, \cdots, x_d).$$

Доказываемое равенство (4) получается отсюда заменой (2).

Теорема 2. *Дисперсия величины $S_n f$, $\mathrm{D}S_n f$, следующим образом оценивается через корреляционные коэффициенты $b_{k_1 \cdots k_d} f$:*

1) $\mathrm{D}S_n f \leqslant n^d \sum\limits_{|k_1|<n} \cdots \sum\limits_{|k_d|<n} |b_{k_1 \cdots k_d} f|$;

2) *если* $\sum\limits_{k_1} \cdots \sum\limits_{k_d} |b_{k_1 \cdots k_d} f|^p = \mathrm{S} < \infty$ *для некоторого* $p \in [1, \infty)$, *то*

$$\mathrm{D}S_n f \leqslant \mathrm{S}^{\frac{1}{p}} 2^{d-\frac{d}{p}} n^{2d-\frac{d}{p}}.$$

Доказательство. Первое утверждение теоремы 2 немедленно следует из (3). Второе ее утверждение получается из первого по неравенству Гельдера:

$$n^d \sum_{|k_1|<n} \cdots \sum_{|k_d|<n} |b_{k_1 \cdots k_d} f| \leqslant$$

$$\leqslant n^d \|\{b_{k_1\cdots k_d} f\}\|_p (2n)^{d(1-\frac{1}{p})} \leqslant \mathrm{S}^{\frac{1}{p}} 2^{d(1-\frac{1}{p})} n^{2d-\frac{d}{p}}.$$

Замечание 1. Имеется ряд работ по гармоническому анализу, в которых даются достаточные признаки абсолютной суммируемости (с p-й степенью) кратных рядов Фурье, о которой идет речь во второй части теоремы 2. Краткий обзор таких результатов можно найти в специальной работе [6] (указанной автору А. М. Степиным). Например, если спектральная мера σ_f абсолютно непрерывна (с плотностью s) относительно меры Лебега, и у функции s есть непрерывные частные производные порядка l, то

$$\sum_{k_1} \cdots \sum_{k_d} |b_{k_1\cdots k_d} f|^p < \infty$$

для всех $p > \frac{2d}{2l+d}$.

Доказательство следующей теоремы полностью аналогично доказательству ее одномерного ($d = 1$) аналога в [5].

Теорема 3. *Если спектральная мера σ_f абсолютно непрерывна (с плотностью s) относительно меры Лебега, и функция s непрерывна в точке $\mathbf{0} = (0, \cdots, 0)$, то при $n \to \infty$*

$$\mathrm{D}S_n f = (2\pi n)^d s(\mathbf{0}) + o(n^d).$$

Замечание 2. Как было показано в [2, теорема 3], в одномерном ($d = 1$) случае степенной рост дисперсии $\mathrm{D}S_n f$ равносилен степенной особенности спектральной меры σ_f в точке 0. В случае $d > 1$ из степенной особенности σ_f в точке $\mathbf{0}$ уже не следует степенной рост $\mathrm{D}S_n f$: например, для меры σ_f со степенной особенностью в $\mathbf{0}$, целиком сосредоточенной на главной диагонали тора $[-\pi, \pi)^d$. Тем не менее, и в многомерном случае из степенного роста $\mathrm{D}S_n f$ вытекает степенная особенность меры σ_f в точке $\mathbf{0}$.

Доказательство этого факта полностью аналогично доказательству его одномерного ($d = 1$) аналога в [2].

3. Убывание вероятностей ε-уклонений. Как и в одномерном ($d = 1$) случае, удается давать оценки скоростей убывания вероятностей ε-уклонения через скорость убывания дисперсий средних $A_n f$, $\mathrm{D}A_n f$. Доказательства следующих теорем 4 и 5 получаются очевидной модификацией их одномерных аналогов в [2].

Теорема 4. *Если $f \in L_\infty(\Omega)$, то для любого $\alpha > 0$ равносильны следующие два утверждения:*

1) $\lambda\{|A_n f - f^*| \geqslant \varepsilon\} = O(n^{-\alpha})$ *при* $n \to \infty$ *для любого* $\varepsilon > 0$*;*

2) $\lambda\{\sup\limits_{N \geqslant n} |A_N f - f^*| \geqslant \varepsilon\} = O(n^{-\alpha})$ *при* $n \to \infty$ *для любого* $\varepsilon > 0$.

Утверждение теоремы справедливо также при замене обоих "O" на "o".

Теорема 5. *Пусть $f \in L_\infty(\Omega)$. Если $\mathrm{D}A_n f = O(n^{-\alpha})$ при $n \to \infty$ для некоторого $\alpha \in (0, 2d]$, то для каждого $\varepsilon > 0$ при $n \to \infty$*

$$\lambda\{\sup_{N \geqslant n} |A_N f - f^*| \geqslant \varepsilon\} = O(n^{-\alpha}).$$

Утверждение теоремы справедливо также при замене обоих "O" на "o".

Суперпозиция теоремы 5 с теоремами 2 и 3 и замечанием 1 немедленно приводит к следующему утверждению о скоростях сходимости.

Теорема 6. *Пусть $f \in L^0_\infty(\Omega)$. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$:*

1) *если* $\sum\limits_{|k_1|<n} \cdots \sum\limits_{|k_d|<n} |b_{k_1 \cdots k_d} f| = O(n^\beta)$ *при* $n \to \infty$ *для* $\beta \in [0, d)$, *то при* $n \to \infty$

$$\lambda\{\sup_{N \geqslant n} |A_N f - f^*| \geqslant \varepsilon\} = O(n^{\beta - d});$$

2) *если* $\sum\limits_{|k_1<d|} \cdots \sum\limits_{|k_d|<n} |b_{k_1 \cdots k_d} f|^p < \infty$ *для* $p \in [1, \infty)$, *то при* $n \to \infty$

$$\lambda\{\sup_{N \geqslant n} |A_N f - f^*| \geqslant \varepsilon\} = O(n^{-\frac{d}{p}});$$

3) *если у спектральной меры σ_f есть непрерывная в точке $\mathbf{0} = (0, \cdots, 0)$ плотность, то при $n \to \infty$*

$$\lambda\{\sup_{N \geqslant n} |A_N f - f^*| \geqslant \varepsilon\} = O(n^{-d});$$

4) *если у спектральной меры σ_f есть плотность с непрерывными частными производными порядка l, то для всех $p > \frac{2d}{l+d}$ при $n \to \infty$*

$$\lambda\{\sup_{N \geqslant n} |A_N f - f^*| \geqslant \varepsilon\} = O(n^{-\frac{d}{p}}).$$

4. Мартингально–эргодическая теорема. В этом разделе работы $T_1, \cdots, T_d$ – произвольные положительные сжатия в $L_p(\Omega)$ для $p \in (1, \infty)$ (не обязательно порожденные автоморфизмами пространства с мерой).

Для $\mathbf{n} = (n_1, \cdots, n_d)$ под $\mathbf{n} \to \infty$ будем понимать $n_k \to \infty$ для всех $k = 1, \cdots, d$. Рассмотрим эргодические средние

$$A_{\mathbf{n}} f = \left(\prod_{k=1}^{d} n_k \right)^{-1} \left(\sum_{k_1=0}^{n_1-1} \cdots \sum_{k_d=0}^{n_d-1} T_1^{n_1} \cdots T_d^{n_d} f \right).$$

Тогда (см., например, [1]) для каждой $f \in L_p(\Omega)$, $p \in (1, \infty)$, величины $A_{\mathbf{n}} f$ сходятся п.в. при $\mathbf{n} \to \infty$; при этом справедливо следующее доминантное неравенство:

$$\| \sup_{\mathbf{n}} \{ A_{\mathbf{n}} |f| \} \|_p \leqslant \left(\frac{p}{p-1} \right)^d \|f\|_p. \tag{5}$$

Пусть $\{F_l\}_{1 \leqslant l \leqslant \infty}$ – монотонная последовательность σ-подалгебр F. Следующую теорему, в случае $F_l \downarrow$, можно рассматривать как эргодическую теорему с постепенным забыванием точками фазового пространства своих точных начальных координат (в случае $F_l \equiv F$ она просто совпадает с обычной эргодической теоремой).

Теорема 7. *Пусть* $\mathbf{n}_l = (n_1^l, \cdots, n_d^l) \to \infty$ *при* $l \to \infty$. *Тогда для каждой* $f \in L_p(\Omega)$, $p \in (1, \infty)$, *условные математические ожидания* $\mathrm{E}(A_{\mathbf{n}_l} f | F_l)$ *сходятся п.в. при* $l \to \infty$.

Доказательство теоремы 7 аналогично доказательству ее одномерного ($d = 1$) аналога в [4]. Оценки следующей теоремы 8 в случае $d = 1$ точнее соответствующих им аналогов из [4].

Теорема 8. *Если* $F_l \downarrow$, $f \in L_p(\Omega)$, $p \in (1, \infty)$ *и* $\mathbf{n}_l = (n_1^l, \cdots, n_d^l) \to \infty$ *при* $l \to \infty$, *то*

1) $\| \sup_l |\mathrm{E}(A_{\mathbf{n}_l} f | F_l)| \|_p \leqslant \left(\frac{p}{p-1} \right)^{d+1} \|f\|_p$;

2) $\lambda \{ \sup_l |\mathrm{E}(A_{\mathbf{n}_l} f | F_l)| \geqslant \varepsilon \} \leqslant \left(\frac{p}{p-1} \right)^{pd} \frac{\|f\|_p^p}{\varepsilon^p}$.

Доказательство. Положим $g_l = \sup_{m \geqslant l} |A_{\mathbf{n}_m} f|$; тогда

$$|\mathrm{E}(A_{\mathbf{n}_l} f|F_l)| \leqslant \mathrm{E}(\sup_{m\geqslant l} |A_{\mathbf{n}_m} f||F_l) = \mathrm{E}(g_l|F_l). \tag{6}$$

Докажем первое утверждение теоремы 8. По (6) получаем:

$$\|\sup_l |\mathrm{E}(A_{\mathbf{n}_l} f|F_l)|\|_p \leqslant \|\sup_l \mathrm{E}(g_l|F_l)\|_p.$$

Далее по классическому доминантному неравенству для неотрицательного субмартингала [7], примененному к неотрицательному обращенному субмартингалу $\mathrm{E}(g_l|F_l)$, имеем:

$$\|\sup_l \mathrm{E}(g_l|F_l)\|_p \leqslant \frac{p}{p-1}\|\mathrm{E}(g_1|F_1)\|_p.$$

Так как оператор условного математического ожидания сжимает в L_p [8], то

$$\frac{p}{p-1}\|\mathrm{E}(g_1|F_1)\|_p \leqslant \frac{p}{p-1}\|g_1\|_p \leqslant \frac{p}{p-1}\|\sup_m A_{\mathbf{n}_m}|f|\|_p.$$

Первое из утверждений теоремы 8 немедленно получается отсюда по доминантному неравенству (5).

Для доказательства второго утверждения теоремы 8 опять воспользуемся соотношением (6); получаем:

$$\lambda\{\sup_l |\mathrm{E}(A_{\mathbf{n}_l} f|F_l)| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \lambda\{\sup_l \mathrm{E}(g_l|F_l) \geqslant \varepsilon\}.$$

Далее применим максимальное неравенство [9] для неотрицательного (обращенного) субмартингала $\{\mathrm{E}(g_l|F_l)\}_{l\geqslant 1}$, которое дает нам соотношение

$$\lambda\{\sup_l \mathrm{E}(g_l|F_l) \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{1}{\varepsilon^p}\|\mathrm{E}(g_1|F_1)\|_p^p.$$

По уже отмечавшемуся свойству сжатия в L_p оператора условного математического ожидания

$$\frac{1}{\varepsilon^p}\|\mathrm{E}(g_1|F_1)\|_p^p \leqslant \frac{1}{\varepsilon^p}\|g_1\|_p^p \leqslant \frac{1}{\varepsilon^p}\|\sup_m A_{\mathbf{n}_m}|f|\|_p^p.$$

Остается еще раз воспользоваться доминантным неравенством (5).

Литература

1. U. Krengel, *Ergodic theorems.* Berlin–New York, Walter de Gruyter, 1985.
2. А. Г. Качуровский, *Скорости сходимости в эргодических теоремах.* — Усп. Мат. Наук **51** (1996), 73-124.
3. А. М. Вершик, А. Г. Качуровский, *Скорости сходимости в эргодических теоремах для локально конечных групп и обращенные мартингалы.* Препринт ПОМИ 2/1998. 6с.
4. А. Г. Качуровский, *Мартингально–эргодическая теорема.* — Мат. Заметки **64** (1998), 311-314.
5. И. А. Ибрагимов, Ю. В. Линник, *Независимые и стационарно связанные величины.* М., Наука, 1965.
6. М. И. Дьяченко, *Некоторые проблемы теории кратных тригонометрических рядов.* — Усп. Мат. Наук **47** (1992), 97-162.
7. А. Н. Ширяев, *Вероятность.* М., Наука, 1989.
8. J. Neveu, *Discrete parameter martingales.* Amsterdam, North Holland Publishing Co., 1975.
10. М. Лоев, *Теория вероятностей.* М., ИЛ, 1962.

Kachurovskii A. G. Convergence of averages in the ergodic theorem for groups $\mathbb{Z}^d$.

Some estimates of the rates of convergence in the ergodic theorem for actions of groups $\mathbb{Z}^d$ are given. Besides, martingale–ergodic theorem for $\mathbb{Z}^d$ is proved. This theorem may be considered as an ergodic theorem in which the exact initial coordinates of phase space's points are gradually forgotten.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 25 февраля 1999 г.