Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 256, 1999 г.

Ю. В. Якубович

ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ НОРМИРОВАННЫХ ДИАГРАММ ЮНГА РАЗБИЕНИЙ НА РАЗЛИЧНЫЕ СЛАГАЕМЫЕ

Постановка задачи и основные результаты

Пусть n – натуральное число. Рассмотрим множество $\mathcal{P}(n)$ всех разбиений числа n на различные слагаемые. (Необходимые сведения о разбиениях читатель может получить в книге [7]). Каждому такому разбиению можно сопоставить кусочно-постоянную функцию

$$g_\lambda(t) = \sum_{k \geqslant t} \rho_k(\lambda),$$

где $t \geqslant 0$, а функции ρ_k от разбиения λ (так называемые *числа заполнения*) равны 1 если k содержится как слагаемое в λ, и 0 в противном случае. Подграфик этой функции называется *диаграммой Юнга* разбиения λ.

Рассмотрим равномерную вероятностную меру $\mu^{(n)}$ на множестве $\mathcal{P}(n)$, т.е. $\mu^{(n)}(\lambda) = 1/q(n)$, где $q(n) = \#\mathcal{P}(n)$ – число всех разбиений n на различные слагаемые. Возникает естественный вопрос: найдутся ли какие-нибудь свойства, имеющие место для почти всех разбиений по мере $\mu^{(n)}$, при $n \to \infty$. Оказывается, такие свойства есть и формулируются они проще всего в терминах диаграмм Юнга. Меры $\mu^{(n)}$ стандартным способом переносятся на функции g_λ. Если нормировать диаграммы Юнга, сжав их вдоль каждой оси в $2\sqrt{3n}/\pi$ раз (множитель $2\sqrt{3}/\pi$ выбирается для сокращения формул), то мы получим (случайную по λ) функцию, которую мы будем обозначать $\widetilde{g}_\lambda(\cdot)$:

$$\widetilde{g}_\lambda(t) = \sigma^{(n)} g_\lambda(t/\sigma^{(n)}) = \sigma^{(n)} \sum_{k \geqslant t/\sigma^{(n)}} \rho_k(\lambda),$$

где

$$\sigma^{(n)} = \frac{\pi}{2\sqrt{3n}}. \tag{1}$$

При поддержке РФФИ, грант 96-15-96060.

Для функций $\widetilde{g}_\lambda$ выполнена следующая модификация закона больших чисел, см. [3]: при всех $\varepsilon > 0$ и $t \geqslant 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \mu^{(n)} \{\lambda \in \mathcal{P}(n) : |\widetilde{g}_\lambda(t) - g(t)| < \varepsilon\} = 0, \tag{2}$$

где

$$g(t) = \log(1 + e^{-t}).$$

Целью настоящей работы является уточнение этого результата. Более подробно, мы хотим доказать многомерную центральную предельную теорему для распределений значений $\widetilde{g}_\lambda(\cdot)$ в нескольких точках. Чтобы ее сформулировать, введем несколько обозначений. Фиксируем натуральное число d – размерность предельной теоремы. Рассмотрим d неотрицательных чисел $0 \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_d$ – точки, в которых мы изучаем распределение $\widetilde{g}_\lambda$. Для краткости мы будем писать $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_d)$. Рассмотрим вектор $\widetilde{\xi}(\lambda) = \big(\widetilde{g}_\lambda(t_1), \ldots, \widetilde{g}_\lambda(t_d)\big)$. Равенство (2) показывает, что предельное распределение $\widetilde{\xi}$ есть δ-мера, сосредоточенная в точке $g(\mathbf{t}) = (g(t_1), \ldots, g(t_d))$. Мы хотим уточнить это распределение. Рассмотрим зависящую от $\mathbf{t}$ и n матрицу $D = \sigma^{(n)}\big(d_{i,j}\big)_{i,j=1}^{d}$, где

$$d_{i,j} = \frac{1}{1 + e^{t_k}} - \frac{6}{\pi^2} h(t_i) h(t_j),$$

где $k = \min\{i, j\}$ и

$$h(t) = \frac{t}{1 + e^t} + \log(1 + e^{-t}).$$

Матрица D положительно определена и симметрична, и найдется единственная положительно определенная симметричная матрица $\hat{B}$, такая что $\hat{B}^2 = D^{-1}$. Обозначим $\hat{\xi} = \hat{B}(\widetilde{\xi} - g(\mathbf{t}))$. Тогда верна следующая

Теорема. *Распределения вектора $\hat{\xi}$ слабо сходятся при $n \to \infty$ к стандартному d-мерному нормальному распределению.*

Грубо говоря, теорема утверждает, что после центрирования функции g_λ ее математическим ожиданием, “правильной” нормировкой по оси ординат будет умножение на $\sqrt{\sigma^{(n)}}$, по оси абсцисс – на $\sigma^{(n)}$, после чего значения нормированной функции в точках $\mathbf{t}$ будут иметь асимптотически нормальное распределение с матрицей ковариаций $(d_{i,j})$.

Важный шаг в этом направлении следан в работе А. М. Вершика, Г. А. Фреймана и автора [2]. В [2] теорема, доказанная в этой работе для общих распределений, выведена для одномерных распределений, при этом используется некоторый вариант локальной предельной теоремы. Доказательство в работе [2] построено на использовании формулы условной вероятности, тогда как в этой работе используется частичное обратное преобразование Фурье; требуемые для этого оценки в значительной степени совпадают. Следует также отметить недавние работы [1] и [4], в которых (независимо) доказан принцип больших уклонений для этой задачи.

Автор выражает признательность А. М. Вершику за плодотворные беседы, приведшие к написанию этой работы.

Большой и малый ансамбли разбиений

Доказательство приведенного выше результата основывается на исследовании соотношения между дискретным семейством мер $\mu^{(n)}$ и непрерывным семейством мер μ_x, которое мы сейчас определим. Рассмотрим множество всех разбиений $\mathcal{P}$ произвольного натурального числа на различные слагаемые: $\mathcal{P} = \cup_{n=0}^{\infty}\mathcal{P}(n)$ (мы считаем $\mathcal{P}(0) = \{\emptyset\}$). Функции ρ_k корректно определены на всем $\mathcal{P}$. Рассмотрим семейство вероятностных мер μ_x на $\mathcal{P}$, $x \in (0,1)$, такое что, во-первых,

$$\mu_x\{\lambda \in \mathcal{P} : \rho_k(\lambda) = 0\} = \frac{1}{1+x^k}, \qquad \mu_x\{\lambda \in \mathcal{P} : \rho_k(\lambda) = 1\} = \frac{x^k}{1+x^k},$$

и, во-вторых, случайные величины ρ_k независимы. Меры μ_x обладают важным для нас свойством (см. [3]), что их ограничение (при любом $x \in (0,1)$) на $\mathcal{P}(n)$ с точностью до множителя совпадает с мерой $\mu^{(n)}$.

Отметим, что возможен и другой подход к определению мер μ_x. Рассмотрим хорошо известную (см. [7]) производящую функцию для чисел $q(n) = \#\mathcal{P}(n)$:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q(n)x^n = \prod_{k=1}^{\infty}(1+x^k).$$

Можно определить μ_x как выпуклую комбинацию мер $\mu^{(n)}$ с коэффициентами $q(n)x^n/F(x)$, т.е.

$$\mu_x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q(n)x^n}{F(x)} \mu^{(n)}.$$

Аналогичные построения проводились в классической и квантовой статистической механике, см. [5, 6]. Подчеркивая эту аналогию, мы будем называть пару $(\mathcal{P}, \mu_x)$ *большим каноническим ансамблем разбиений,* а пару $(\mathcal{P}(n), \mu^{(n)})$ – *малым каноническим ансамблем разбиений числа n.*

Наш подход к доказательству теоремы состоит в замене малого канонического ансамбля большим. Тот факт, что ограничение μ_x на $\mathcal{P}(n)$ с точностью до множителя совпадает с мерой $\mu^{(n)}$, или, другими словами, условная мера на большом ансамбле при условии, что разбиваемое число есть n, совпадает с мерой $\mu^{(n)}$, дает возможность оправдать эту замену. Более подробно, рассмотрим случайную величину $\eta(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} k\rho_k(\lambda)$ – разбиваемое число. На малом ансамбле $\mathcal{P}(n)$ ее распределение вырождено, и единственное значение есть n, а на большом ансамбле она имеет невырожденное распределение, задаваемое соотношением

$$\mu_x\{\lambda \in \mathcal{P} : \eta(\lambda) = n\} = \frac{q(n)x^n}{F(x)}.$$

Чтобы перенести определение $\widetilde{\xi}$ на большой канонический ансамбль, нам необходимо каким-то образом переопределить нормировочный множитель $\sigma^{(n)}$. Для этого мы посчитаем математическое ожидание $E_x\eta$ в большом ансамбле с мерой μ_x и подставим его в формулу для $\sigma^{(n)}$. Полученное значение мы будем обозначать

$$\sigma_x = \sigma^{(E_x\eta)}. \tag{3}$$

Таким образом определенная на большом ансамбле величина $\widetilde{\xi}$, вообще говоря, не совпадает с определенной ранее на малом, но, если мы выберем зависимость $x = x(n)$ таким образом, что

$$E_x\eta = n, \tag{4}$$

то, во-первых, определение $\widetilde{\xi}$ как функции на $\mathcal{P}(n)$ корректно, и, во-вторых, условное распределение $\widetilde{\xi}$ на $(\mathcal{P}, \mu_{x(n)})$ при условии, что $\eta = n$, совпадает с распределением $\widetilde{\xi}$ на $(\mathcal{P}(n), \mu^{(n)})$.

В дальнейшем мы предполагаем, что x и n связаны соотношением (4); ниже оно будет конкретизировано.

Рассмотрим характеристическую функцию $\phi_x(\alpha,\beta)$ распределения вектора $(\eta,\widetilde{\xi})$ на большом ансамбле разбиений. Здесь мы подразумеваем, что α – скалярная, а $\beta=(\beta_1,\dots,\beta_d)$ – d-мерная переменная. Также рассмотрим $\phi^{(n)}(\beta)$ – характеристическую функцию $\widetilde{\xi}$ на малом ансамбле. Тогда несложные вычисления, аналогичные доказательству формулы обращения для характеристических функций, показывают, что

$$\phi^{(n)}(\beta)=\frac{1}{2\pi\,\mu_x\{\lambda\in\mathcal{P}:\eta(\lambda)=n\}}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\phi_x(\alpha,\beta)e^{-in\alpha}d\alpha. \qquad (5)$$

Это соотношение мы и будем использовать для доказательства теоремы.

Чтобы показать сходство доказываемого результата с предельными теоремами не только по формулировке, но и по существу, рассмотрим следующую конструкцию. При $k\in\mathbb{N}$ определим $\varkappa=\varkappa(k)$ соотношением $k\sigma_x\in[t_\varkappa,t_{\varkappa+1})$, где t_{d+1} предполагается равным $+\infty$. Рассмотрим последовательность d-мерных векторов $\xi_k=\xi_k(\lambda)$, у каждого из которых первые $\varkappa(k)$ компонент равны $\rho_k(\lambda)$, а остальные компоненты тождественно равны нулю. Вектора ξ_k взаимно независимы, а распределения каждого из них зависят от x. Рассмотрим (случайный) вектор $\xi=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k$. Этот ряд сходится с вероятностью 1, и его сумма совпадает с величиной $\widetilde{\xi}$ с точностью до множителя σ_x: $\widetilde{\xi}=\sigma_x\xi$. Тем самым мы нашли представление исследуемого нами вектора $\widetilde{\xi}$ в виде суммы независимых (на большом ансамбле) случайных векторов, однако в нашем случае, в отличие от случая классических предельных теорем, их число все время бесконечно, а меняются их распределения.

Доказательство теоремы

Для доказательства теоремы мы исследуем распределение вектора $(\eta,\widetilde{\xi})$ на большом ансамбле. Прежде всего найдем его математическое ожидание и матрицу ковариаций.

Предложение 1. *В большом каноническом ансамбле $(\mathcal{P},\mu_x)$, при $x\to 1$ слева, справедливы следующие асимптотические формулы* *для математического ожидания:*

$$
\begin{aligned}
E_x\eta &= \frac{1}{\log^2 x}\,\frac{\pi^2}{12}\big(1+O(|\log(x)|)\big);\\
E_x\widetilde{\xi} &= \big(g(t_1),\dots,g(t_d)\big)\big(1+O(|\log(x)|)\big).
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Это позволяет нам конкретизировать связь (4), положив

$$
x = x(n) = 1 - \frac{\pi}{2\sqrt{3n}} + O\left(\frac{1}{n}\right);
$$

мы все время предполагаем, что это соотношение выполнено. Комбинируя (1), (3) и (6), видим, что

$$
\sigma_x = -\log x. \tag{7}
$$

Предложение 2. *В большом каноническом ансамбле* $(\mathcal{P},\mu_x)$, *при* $x\to 1$ *слева, для матрицы ковариаций вектора* $(\eta,\widetilde{\xi})$ *выполнена следующая асимптотическая формула:*

$$
D_x(\eta,\widetilde{\xi}) = \begin{pmatrix} a & c_1 & \dots & c_d\\ c_1 & b_{11} & \dots & b_{1d}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ c_d & b_{d1} & \dots & b_{dd}\end{pmatrix}\big(1+O(\sigma_x)\big),
$$

где

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{1}{(\sigma_x)^3}\,\frac{\pi^2}{6},\\
c_i &= \frac{1}{\sigma_x}h(t_i) = \frac{1}{\sigma_x}\left(\frac{t_i}{1+e^{t_i}} + \log(1+e^{-t_i})\right),\\
b_{ij} &= \sigma_x\frac{1}{1+e^{t_k}}, \qquad \text{где } k=\min\{i,j\}.
\end{aligned}
$$

Мы опускаем доказательство этих двух предложений, оно может быть найдено в [2]. Заметим, что, хотя компоненты матрицы ковариаций вектора $(\eta,\widetilde{\xi})$ (как и самого вектора) имеют различные порядки при $x\to 1$ слева, все слагаемые в определителе этой матрицы имеют один порядок $(\sigma_x)^{d-3}$.

Для доказательства теоремы достаточно показать, что, при фиксированном $\beta\in\mathbb{R}^d$ и $n\to\infty$, имеет место $\widehat{\phi}^{(n)}(\beta)\to\exp\left(-\frac{1}{2}\langle\beta,\beta\rangle\right)$. (Знак $\langle\cdot,\cdot\rangle$ здесь и далее обозначает скалярное произведение.) Приведем формулу (5) к виду, более удобному для вычислений. Рассмотрим характеристическую функцию $\widehat{\phi}^{(n)}(\beta)$ случайного вектора $\hat{\xi}$ в малом ансамбле $(\mathcal{P}(n), \mu_n)$. Элементарные преобразования характеристических функций, формула обращения и соотношение (5) показывают, что

$$\widehat{\phi}^{(n)}(\beta) = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} \phi_x(\alpha, \hat{B}\beta) e^{-in\alpha - i\langle g(\mathbf{t}), \hat{B}\beta\rangle} d\alpha}{\int_{-\pi}^{\pi} \phi_x(\alpha, \mathbf{0}) e^{-in\alpha} d\alpha}. \tag{8}$$

Напомним, что матрица $\hat{B}$ была определена перед формулировкой теоремы.

Для оценки интеграла в числителе правой части (8) разобьем его на две части: окрестность нуля и ее дополнение. Размер окрестности нуля будет зависеть от x как $\varepsilon_x = (\sigma_x)^{3/2} \log^2 \sigma_x$. Для вычислений нам понадобятся две технических леммы.

Лемма 1. *Пусть $\beta \in \mathbb{R}^d$ фиксирован. Тогда*

$$\left| \log \phi_x(\alpha, \hat{B}\beta) - in\alpha - i\langle g(\mathbf{t}), \hat{B}\beta\rangle - \frac{\pi^2}{6\sigma_x{}^3} \frac{\left(\alpha - (\sigma_x)^{3/2}\langle A, \beta\rangle\right)^2}{2} - \frac{\langle \beta, \beta\rangle}{2} \right|$$

$$\leqslant c\sqrt{\sigma_x} \log^6 \sigma_x$$

равномерно по $\alpha \in \left(-\varepsilon_x, \varepsilon_x\right)$ при $x \to 1$ слева, где A некоторый постоянный вектор в $\mathbb{R}^d$, и c – положительная постоянная.

Доказательство. Поскольку вектор $(\eta, \widetilde{\xi})$ может быть представлен как бесконечная сумма независимых векторов $(k\rho_k, \sigma_x \xi_k)$, то характеристическая функция $\phi_x(\alpha, \beta)$ распадается в бесконечное произведение характеристических функций этих векторов:

$$\phi_x(\alpha, \beta) = \prod_{k=1}^{\infty} \phi_{x,k}(\alpha, \beta), \tag{9}$$

где $\phi_{x,k}(\alpha, \beta)$ – характеристическая функция вектора $(k\rho_k, \sigma_x \xi_k)$. Рассмотрим характеристическую функцию $\psi_{x,k}(\alpha)$ случайной величины ρ_k в большом ансамбле:

$$\psi_{x,k}(\alpha) = \frac{1 + x^k e^{i\alpha}}{1 + x^k}.$$

Тогда $\phi_{x,k}(\alpha,\beta)=\psi_{x,k}(\gamma_k(\alpha,\sigma_x\beta))$, где

$$\gamma_k(\alpha,\beta)=k\alpha+\sum_{i=1}^{\varkappa}\beta_i,$$

а $\varkappa$ определено соотношением $\sigma_x k\in[t_\varkappa,t_{\varkappa+1})$. Поэтому

$$\log\phi_x(\alpha,\hat B\beta)=\sum_{k=1}^{\infty}\log\psi_{x,k}\bigl(\gamma_k(\alpha,\sigma_x\hat B\beta)\bigr).$$

Оценим каждое слагаемое в правой части отдельно; применим разложение в ряд Тейлора и получим, что при $\gamma_k(\alpha,\sigma_x\hat B\beta)\to 0$

$$\left|\log\psi_{x,k}\bigl(\gamma_k(\alpha,\sigma_x\hat B\beta)\bigr)-i\frac{x^k\gamma_k(\alpha,\sigma_x\hat B\beta)}{1+x^k}+\frac{x^k\gamma_k(\alpha,\sigma_x\hat B\beta)^2}{2(1+x^k)^2}\right| \leqslant c_1\frac{x^k(1-x^k)}{(1+x^k)^3}\bigl(\gamma_k(\alpha,\sigma_x\hat B\beta)\bigr)^3, \quad (10)$$

где константу c_1 можно выбрать не зависящей от x и k. Заметим, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k\gamma_k(\alpha,\sigma_x\hat B\beta)}{1+x^k}=n\alpha+\bigl\langle g(\mathbf{t}),\hat B\beta\bigr\rangle$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k\gamma_k(\alpha,\sigma_x\hat B\beta)^2}{(1+x^k)^2}=\left\langle(\alpha,\hat B\beta),\bigl(D_x(\eta,\widetilde{\xi})\bigr)(\alpha,\hat B\beta)\right\rangle,$$

где $D_x(\eta,\widetilde{\xi})$ – матрица ковариаций. Также заметим, что при всех $m\in\mathbb{Z}_+$ и $x\in(0,1)$ имеют место неравенства

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^m x^k(1-x^k)}{(1+x^k)^3}\leqslant\frac{c_2}{{\sigma_x}^{m+1}}.$$

Поэтому, суммируя неравенства (10), получаем

$$\left|\log\phi_x(\alpha,\hat B\beta)-in\alpha-i\langle g(\mathbf{t}),\hat B\beta\rangle-\frac{\left\langle(\alpha,\hat B\beta),\bigl(D_x(\eta,\widetilde{\xi})\bigr)(\alpha,\hat B\beta)\right\rangle}{2}\right| \leqslant c_3\left(\frac{\alpha^3}{{\sigma_x}^4}+\frac{\alpha^2\|\hat B\beta\|}{{\sigma_x}^2}+\alpha\|\hat B\beta\|^2+{\sigma_x}^2\|\hat B\beta\|^3\right), \quad (11)$$

где $\|\beta\| = \sum_i |\beta_i|$, и $D_x(\eta, \widetilde{\xi})$ – матрица ковариаций. Поскольку $|\alpha| < \varepsilon_x = {\sigma_x}^{3/2} \log^2 \sigma_x$, то правая часть этого неравенства не превосходит $s\sqrt{\sigma_x} \log^6 \sigma_x$ при некоторой константе c. Обозначим

$$a = \frac{\pi^2}{6{\sigma_x}^3}, \qquad C = \frac{1}{\sigma_x}(c_1, \dots, c_d), \qquad B = \sigma_x \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1d} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{d1} & \dots & b_{dd} \end{pmatrix}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} &\Big\langle (\alpha, \hat{B}\beta), \big(D_x(\eta, \widetilde{\xi})\big)(\alpha, \hat{B}\beta) \Big\rangle \\ &\qquad\qquad = a\alpha^2 + 2\langle C, \hat{B}\beta\rangle + \langle \hat{B}\beta, B\hat{B}\beta\rangle (1 + O(\sigma_x)) \\ &\qquad = a(\alpha + a^{-1}\langle C, \hat{B}\beta\rangle)^2 + \langle \beta, \hat{B}(B - C^T a^{-1} C)\hat{B}\beta\rangle (1 + O(\sigma_x)), \end{aligned}$$

и, поскольку по определению $\hat{B}^2 = (B - C^T a^{-1} C)^{-1}$ (мы считаем C вектором-строкой), то, подставляя полученное выражение в (11) мы получаем утверждение леммы.

Лемма 2. *Пусть $\beta \in \mathbb{R}^d$ фиксирован. Тогда*

$$\big|\phi_x(\alpha, \hat{B}\beta)\big| = O\left(e^{-\log^4 \sigma_x}\right)$$

равномерно при $|\alpha| \in \big[\varepsilon_x, \pi\big]$ при $x \to 1$ слева.

Доказательство. Снова применим разложение (9) и оценим модуль каждого сомножителя в правой части, а точнее выберем подмножество $K \subset \mathbb{N}$ такое, что для произведения по $k \in K$ уже выполняется утверждение леммы. Используя выполненное для всех комплексных z неравенство $|z| \leqslant \exp\big((|z|^2 - 1)/2\big)$, получаем

$$\prod_{k=1}^{\infty} \big|\phi_{x,k}(\alpha, \hat{B}\beta)\big| \leqslant \exp\left(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\big|\phi_{x,k}(\alpha, \hat{B}\beta)\big|^2 - 1\right)\right). \tag{12}$$

Несложный подсчет показывает, что

$$\big|\phi_{x,k}(\alpha, \hat{B}\beta)\big|^2 - 1 = -\frac{4x^k \sin^2\left(\gamma_k(\alpha, \sigma_x \hat{B}\beta)/2\right)}{(1 + x^k)^2}, \tag{13}$$

подробности могут быть найдены в [2], формула (15).

Нам необходимо показать, что сумма таких выражений достаточно велика по модулю. Предположим для определенности, что $\alpha > 0$, т.е. по условию леммы $\alpha \in [\varepsilon_x, \pi]$. Рассмотрим сперва случай, когда $\alpha \in [2\pi\sigma_x, \pi]$. Пусть x настолько близок к 1, что $\|\sigma_x \hat{B}\beta\| < \pi/4$ ($\|\beta\|$ здесь обозначает $\sum_i |\beta_i|$). Тогда при фиксированном α и при всех натуральных p имеем

$$\sin^2\left(\gamma_k(\alpha, \sigma_x \hat{B}\beta)/2\right) \geqslant \frac{1}{2} \tag{14}$$

если k лежит между $\frac{8p+3}{4\alpha}\pi$ и $\frac{8p+5}{4\alpha}\pi$. Из разложения (9), неравенств (12) и (14), и равенства (13) получаем

$$\left|\phi_x(\alpha, \hat{B}\beta)\right| \leqslant \exp\left(-\sum_{p=1}^{\infty} \sum_{k=\left[\frac{8p+3}{4\alpha}\pi\right]+1}^{\left[\frac{8p+5}{4\alpha}\pi\right]} \frac{x^k}{4}\right). \tag{15}$$

Оценим модуль выражения, стоящего под знаком экспоненты в правой части (15). Рассмотрим сперва случай $\alpha \in [2\pi\sigma_x, \pi/8]$. При этом $\left[\frac{8p+5}{4\alpha}\pi\right] - \left[\frac{8p+3}{4\alpha}\pi\right] \geqslant \frac{\pi}{2\alpha} - 2$ и поэтому, заменяя каждое слагаемое на меньшее, получаем

$$\sum_{k=\left[\frac{8p+3}{4\alpha}\pi\right]+1}^{\left[\frac{8p+5}{4\alpha}\pi\right]} \frac{x^k}{4} \geqslant \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2\alpha} - 3\right) x^{\frac{8p+5}{4\alpha}\pi}.$$

Суммируя полученные неравенства по p и подставляя $x = e^{-\sigma_x}$, видим, что

$$\sum_{p=1}^{\infty} \sum_{k=\left[\frac{8p+3}{4\alpha}\pi\right]+1}^{\left[\frac{8p+5}{4\alpha}\pi\right]} \frac{x^k}{4} \geqslant \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2\alpha} - 3\right) \frac{e^{-\frac{13\pi\sigma_x}{4\alpha}}}{1 - e^{-\frac{2\pi\sigma_x}{\alpha}}}.$$

Правая часть этого неравенства, рассматриваемая как функция от $\alpha \in [2\pi\sigma_x, \pi/8]$, достигает минимума в левом конце отрезка, равного $\frac{1-12\sigma_x}{16(e-1)e^{5/8}\sigma_x}$. Поэтому при $\alpha \in [2\pi\sigma_x, \pi/8]$ получаем

$$\left|\phi_x(\alpha, \hat{B}\beta)\right| = O\left(e^{-1/\sigma_x}\right). \tag{16}$$

Перейдем теперь к случаю $\alpha \in [\pi/8, \pi]$. При каждом p выберем в сумме по k в (15) по одному слагаемому (оно обязательно найдется). Для определенности пусть это будет последнее слагаемое. Получаем

$$\sum_{p=1}^{\infty} \sum_{k=\left[\frac{8p+3}{4\alpha}\pi\right]+1}^{\left[\frac{8p+5}{4\alpha}\pi\right]} \frac{x^k}{4} \geqslant \frac{1}{4} \frac{e^{-\frac{13\pi\sigma_x}{4\alpha}}}{1-e^{-\frac{2\pi\sigma_x}{\alpha}}} \geqslant \frac{c_4}{\sigma_x}.$$

Подставляя это неравенство в (15), видим, что оценка (16) выполнена и для $\alpha \in [\pi/8, \pi]$.

Рассмотрим теперь случай $\alpha \in [\varepsilon_x, 2\pi\sigma_x]$. Просуммируем выражения, стоящие в правой части (12), по k от 1 до $1/4\sigma_x$. Опять заменим $x = e^{-\sigma_x}$ и предположим, что x настолько близок к 1, что $\|\hat{B}\beta\| < \pi/2$. В силу этого предположения и поскольку $k \leqslant 1/4\sigma_x$ и $\alpha \leqslant 2\pi\sigma_x$, имеем $\gamma_k(\alpha, \hat{B}\beta) \leqslant \pi$. Применим неравенство $\sin^2(z/2) \leqslant z^2/16$, выполненное при $z \in [0, \pi]$. Получим

$$\sum_{k=1}^{1/4\sigma_x} \frac{4x^k \sin^2\left(\gamma_k(\alpha, \hat{B}\beta)/2\right)}{(1+x^k)^2} \geqslant \sum_{k=1}^{1/4\sigma_x} \gamma_k(\alpha, \hat{B}\beta)^2 e^{-k\sigma_x}$$

$$= O\left(\frac{\alpha^2}{{\sigma_x}^3}\right) = O(\log^4 \sigma_x).$$

Подставляя эту оценку в (12) и учитывая (16), получаем утверждение леммы.

Теперь мы можем завершить доказательство. Оценим числитель (8); оценка знаменателя получается подстановкой $\beta = \mathbf{0}$. Согласно лемме 2 мы можем не теряя точности заменить интегрирование по $[-\pi, \pi]$ на интегрирование по $[-\varepsilon_x, \varepsilon_x]$. В этом интеграле, вынося $e^{-\langle\beta,\beta\rangle/2}$ и делая замену $(\alpha - \langle A, \beta\rangle)/{\sigma_x}^{3/2} \to \alpha$ получаем величину, асимптотически не зависящую от β. Теорема доказана.

Литература

1. В. М. Блиновский, *Принцип больших уклонений для границы случайной диаграммы Юнга.* в печати, — Пробл. перед. инф..
2. А. М. Вершик, Г. А. Фрейман, Ю. В. Якубович, *Локальная предельная теорема для случайных разбиений натуральных чисел.* — Теор. вероятн. и прил.. № 3 (1999), (в печати).
3. А. М. Вершик, *Статистическая механика комбинаторных разбиений.* — Функц. анал. и прил. **30**, № 2, 19–39.

4. A. Dempo, A. Vershik, O. Zeitouni, *Large deviations for integer partitions.* — Adv. Appl. Math. (to appear).
5. А. Я. Хинчин, *Математические основания квантовой статистики.* ГИТТЛ, 1951.
6. К. Хуанг, *Статистическая механика.* М., Мир, 1966.
7. Г. Е. Эндрюс, *Теория разбиений.* М., Наука, 1982.

Yakubovich Yu. Central limit theorem for random strict partition.

We consider a set of partitions of number n on distinct summands (so called strict partitions) with uniform distribution on it. We investigate fluctuations of random partition near its limit shape, for large n. Usage of geometrical language allows to state the problem in terms of limit behaviour of random step functions (Young diagram). Central limit theorem for such functions is proven.

The method of investigation essentially uses the notion of large canonical ensemble of partitions.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 24 июня 1999 г.