Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 256, 1999 г.

М. А. Алексеев, Л. Ю. Глебский, Е. И. Гордон

ОБ АППРОКСИМАЦИЯХ ГРУПП, ГРУППОВЫХ ДЕЙСТВИЙ И АЛГЕБР ХОПФА

Введение

В работе [15] введен и подробно исследован класс групп, локально вложимых в класс конечных групп (ЛВК-групп). Этот класс групп естественно возникает в различных задачах аппроксимации. Прежде всего определение локальной вложимости в класс конечных групп является частным случаем (для групп с дискретной топологией) определения аппроксимируемости топологических групп конечными, введенного и изученного третьим автором в связи с задачами аппроксимации операторов в пространствах функций на топологических группах. В частности, именно это определение позволило исследовать сходимость аппроксимации преобразования Фурье в гильбертовом пространстве функций на локально компактной коммутативной группе конечным преобразованием Фурье [4], построить и исследовать аппроксимации операторов в пространствах функций на таких группах, основанные на дискретизации их символов [2].

В работе А. М. Вершика [16] "близость" бесконечных групп к конечным трактуется как аппроксимируемость их групповых алгебр конечномерными алгебрами в том или ином смысле и показывется, что существование такой аппроксимируемости в некоторых случаях влечет наличие инвариантного среднего на группе. Проблема аппроксимруемости групповых алгебр конечномерными алгебрами представляет интерес и для задач аппроксимации операторов в пространствах функций на группах. В работе [15] поставлен вопрос о связи локальной вложимости в класс конечных групп и аппроксимируемости групповых алгебр. В такой общей постановке эта проблема является, по-видимому, весьма трудной. В настоящей работе дано определение аппроксимируемости биалгебр, естественно обобщающее определение аппроксимруемости групповых алгебр из [15] и показано, что группа является ЛВК-группой в том и только в том случае, когда ее алгебра Хопфа аппроксимируется как биалгебра конечномерными биалгебрами.

В связи с исследованием аппроксимруемости компактных групп дано определение аппроксимируемости коммутативных нормированных алгебр Хопфа конечномерными биалгебрами и доказано, что компактная группа аппроксимируема конечными в том и только в том случае, когда ее коммутативная алгебра Хопфа аппроксимируется конечномерными коммутативными алгебрами Хопфа. Кроме того здесь дается отрицательный ответ на поставленный в [15] вопрос об аппроксимируемости группы $SO(3)$ конечными группами.

Еще один круг задач, в которых естественно возникает класс ЛВК-групп, связан с эргодической теорией, а именно с исследованием аппроксимируемости групповых действий в пространствах с вероятностной мерой. В частности, в работах [11] и [15] установлено, что класс счетных групп, допускающих квазиинвариантное свободно аппроксимируемое действие есть в точности класс ЛВК-групп. Известно, что всякая группа, допускающая свободное аппроксимируемое (но не обязательно свободно аппроксимируемое) инвариантное действие аменабельна. Насколько известно авторам, вопрос о справедливости обратного утверждения открыт. В связи с этим представляет интерес вопрос о взаимотношении свойств локальной вложимости в класс конечных групп и аменабельности. В [15] установлено, что эти классы находятся в общем положении: имеются как не аменабельные ЛВК-группы, так и аменабельные группы, не являющиеся ЛВК-группами. Таким образом возникает вопрос о выделении аменабельных групп в классе ЛВК-групп. В [15] было высказано предположение, что этот вопрос связан с асимптотической оценкой некоторой функции ψ, дающей количественную характеристику аппроксимируемости данной группы конечными группами. Здесь это предположение опровергается на примерах некоторых конкретных групп, но приводится достаточное условие аменабельности ЛВК-групп, основанное на свойствах асимптотики некоторой другой количественной характеристики аппроксимируемости конечными группами.

Из сказанного в предыдущем абзаце следует, что класс групп, аппроксимируемых аменабельными группами, точнее локально вложимых в класс аменабельных групп (ЛВА-группы) шире как класса ЛВК-групп, так и класса аменабельных групп. Это класс рассматривался в статье [6] в связи с исследованием эндоморфизмов проективных пределов комплексных алгебраических многообразий. Возникает естественный вопрос о существовании не ЛВА-групп. Этот вопрос был поставлен В.Н.Бергельсоном. Здесь показано, что бесконечные простые конечно представимые группы не аппроксимируеются аменабельными. Примеры таких групп были построены в [14]. В работе приводится также одно определение аппроксимируемости конечными группами, относительно которого оказываются аппроксимируемыми все ЛВА-группы. Однако вопрос о том, совпадает ли класс групп, аппроксимируемых в смысле этого определния с классом ЛВА-групп остается открытым.

Метод изучения аппроксимируемости групп и групповых действий, предложенный в данной работе, основан на том, что класс ЛВК-групп в точности совпадает с классом подгрупп ультрапроизведений конечных групп. Последнее утверждение является частным случаем общей теоремы А. И. Мальцева о локальной вложимости алгебраических систем [10]. С другой стороны в нестандартном анализе хорошо известна конструкция пространств Леба [9] (см. также [1] или [4]). В классических терминах пространства Леба представляют собой пространства с мерой, носителями которых являются как раз ультрапроизведения конечных множеств. Здесь строится некоторое специальное действие аменабельной группы G в пространстве Леба, построенном по последовательности фелнеровских множеств G. При этом оказывается, что это действие совпадает на множестве полной меры с действием некоторой подгруппы ультрапроизведения групп подстановок фелнеровских множеств. Таким образом всякая аменабельная группа является "почти" ЛВК-группой – почти подгруппой ультрапроизведения конечных групп в смысле указанного действия. Еще один пример применения указанного действия – простое доказательство известного принципа соответствия Фюрстенберга, примененного в его эргодическом доказательстве теоремы Семереди о наличии сколь угодно длинных арифметических прогрессий в множествах положительной плотности (по поводу этой проблематики см. обзор [3]).

Метод ультрапроизведений позволяет получить обобщение критерия Фелнера, на основании которого доказывается упомянутое выше достаточное условие аменабельности ЛВК-групп.

Для замкнутости изложения здесь приводятся основные факты из теории ультрапроизведений и описана конструкция пространств Леба без использования терминологии нестандартного анализа.

Авторы выражают глубокую признательность В. Н. Бергельсону, А. М. Вершику и И. А. Шерешевскому за постановку задач, полезное обсуждение и ряд ценных советов.

1. Ультрапроизведения и пространства Лёба

В настоящей работе существенно используются "малоизвестные даже сейчас в России понятия фильтра и ультрафильтра" [13]. Поэтому напомним вкратце определения и основные свойства этих понятий.

Определение 1.1. *Семейство $\mathfrak{F}$ подмножеств множества I называется фильтром (над I), если выполнены следующие условия:*

(1) $\emptyset \notin \mathfrak{F}$;
(2) $A, B \in \mathfrak{F} \Longrightarrow A \cap B \in \mathfrak{F}$;
(3) $A \in \mathfrak{F},\ A \subseteq B \Longrightarrow B \in \mathfrak{F}$.

Пример 1.2. Семейство всех коконечных подмножеств I является фильтром. Этот фильтр называется фильтром Фреше над I.

Пример 1.3. Пусть $i_0 \in I$ и $\mathfrak{F}(i_0) = \{A \subseteq I \mid A \ni i_0\}$. Тогда очевидно $\mathfrak{F}(i_0)$ – фильтр. Этот фильтр называется главным фильтром (порожденным элементом i_0). Фильтр Фреше – пример не главного фильтра.

Определение 1.4. *Пусть $\alpha : I \to \mathbb{R}$ произвольная функция, $\mathfrak{F}$ – фильтр над I. Число a называется пределом α по фильтру $\mathfrak{F}$ ($a = \lim\limits_{\mathfrak{F}} \alpha$), если для любого $\varepsilon > 0$ множество $\{i \in I \mid |\alpha(i) - a| < \varepsilon\} \in \mathfrak{F}$.*

Аналогично определяются бесконечные пределы по фильтру и пределы функций со значениями в произвольном топологическом пространстве. При этом, если пространство хаусдорфово, то каждая функция может иметь не более одного предела.

Пример 1.5. Пусть x_n – последовательность элементов произвольного топологического пространства. Тогда $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ в том и только в том случае, когда a – предел x_n по фильтру Фреше над $\mathbb{N}$.

Фильтр $\mathfrak{F}$ над I называется ультрафильтром, если он является максимальным по включению фильтром. Из леммы Цорна немедленно следует, что каждый фильтр содержится в некотором ультрафильтре. Легко доказывется следующее

Предложение 1.6. *Фильтр $\mathfrak{F}$ является ультрафильтром в том и только в том случае, когда*

$$\forall A \subseteq I \ (A \in \mathfrak{F} \vee I \setminus A \in \mathfrak{F}).$$

Теперь очевидно, что главный фильтр $\mathfrak{F}(i_0)$ из примера 1.3 является ультрафильтром. Не главный ультрафильтр называется еще *свободным*. Легко видеть, что ультрафильтр $\mathfrak{F}$ – свободный в том и только в том случае, когда он содержит фильтр Фреше.

Предложение 1.7. *(Свойства предела по ультрафильтру).*

(1) *Пусть X – хаусдорфово топологическое пространство, функция $\alpha : I \to X$ такова, что множество ее значений относительно компактно, тогда α имеет предел по произвольному ультрафильтру над I. В частности, существует предел ограниченной числовой последовательности по произвольному ультрафильтру.*

(2) $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ *в том и только в том случае, когда* $a = \lim\limits_{\mathfrak{F}} x_n$ *для любого свободного ультрафильтра $\mathfrak{F}$ над $\mathbb{N}$.*

(3) *Число a является частичным пределом последовательности x_n в том и только в том случае когда $a = \lim\limits_{\mathfrak{F}} x_n$ для некоторого свободного ультрафильтра $\mathfrak{F}$ над $\mathbb{N}$.*

Доказательство. Утверждение (1) легко следует из компактности замыкания множества значений α. Утверждения (2) и (3) непосредственно вытекают из следующего утверждения (см. пример 1.5):

Пусть n_k – возрастающая последовательность натуральных чисел, A – множество ее значений. Тогда $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$ в том и только в том случае когда $a = \lim\limits_{\mathfrak{F}} x_n$ для любого свободного ультрафильтра $\mathfrak{F}$ над $\mathbb{N}$, содержащего A •

Ниже нам потребуются только ультрафильтры над множеством $\mathbb{N}$, поэтому все последующие рассмотрения проводятся для этого случая, хотя они без большого труда могут быть распространены и на случай ультрафильтров над произвольным бесконечным множеством I.

Определение 1.8. *Пусть заданы ультрафильтр $\mathfrak{F}$ и последовательность множеств $\{K_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. На декартовом произведении $\underset{i}{\times} K_i$ определим отношение эквивалентности*

$$\langle x_i\rangle \sim \langle y_i\rangle \quad \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \{i \mid x_i = y_i\} \in \mathfrak{F}.$$

Фактор-множество множества $\underset{i}{\times} K_i$ по введенному отношению эквивалентности называется ультрапроизведением множеств K_i по $\mathfrak{F}$ и обозначается через $\underset{i}{\times} K_i/\mathfrak{F}$. В случае $K_i = K$ для всех i это ультрапроизведение называется ультрастепенью множества K по $\mathfrak{F}$ и обозначается $K^{\mathfrak{F}}$. Существует каноническое вложение $\iota : K \to K^{\mathfrak{F}}$, котрое определяется из условия $\iota(k) = \langle k_i\rangle_{\mathfrak{F}}$. Здесь $k_i = k\ \forall i \in \mathbb{N}$, а $\langle k_i\rangle_{\mathfrak{F}}$ – класс элемента $\langle k_i\rangle \in \underset{i}{\times} K_i$ в $\underset{i}{\times} K_i/\mathfrak{F}$.

Если множество тех индексов i, для которых $k_i \in K_i$ обладает свойством $\mathcal{P}$ лежит в ультрафильтре $\mathfrak{F}$, то будем говорить, что свойство $\mathcal{P}$ выполнется для почти всех k_i (относительно $\mathfrak{F}$).

Если каждое множество K_i является группой относительно операции $\odot_i$, то ультрапроизведение $\underset{i}{\times} K_i/\mathfrak{F}$ также является группой относительно операции $\odot_{\mathfrak{F}}$ (называемой ультрапроизведением операций $\odot_i$):

$$\langle x_i\rangle_{\mathfrak{F}} \odot_{\mathfrak{F}} \langle y_i\rangle_{\mathfrak{F}} = \langle x_i \odot_i y_i\rangle_{\mathfrak{F}}$$

При этом, если K – группа, то каноническое вложение $\iota : K \to K^{\mathfrak{F}}$ является инъективным гомоморфизмом.

Аналогично, если $\varphi_i : A_i \to B_i$ - последовательность отображений, то ультрапроизведением отображений φ_i называется отображение

$$\underset{i}{\times}\varphi_i/\mathfrak{F} : \underset{i}{\times} A_i/\mathfrak{F} \to \underset{i}{\times} B_i/\mathfrak{F}, \quad \underset{i}{\times}\varphi\left(\langle a_i\rangle_{\mathfrak{F}}\right) = \langle \varphi_i(a_i)\rangle_{\mathfrak{F}}$$

Очевидно следующее

Предложение 1.9. *Если почти все отображения φ_i инъективны, то их ультрапроизведение $\underset{i}{\times}\varphi_i/\mathfrak{F}$ также инъективно.*

Определение 1.10. *Подмножество ультрапроизведения* $\underset{i}{\times} K_i/\mathfrak{F}$ *множеств* K_i *называется внутренним, если оно является ультрапроизведением подмножеств* $A_i \subseteq K_i$.

Предложение 1.11. *Совокупность* $\mathfrak{K}^{\mathfrak{F}}$ *всех внутренних подмножеств* $\underset{i}{\times} K_i/\mathfrak{F}$ *образует алгебру. При этом* $\mathfrak{A} = \underset{i}{\times} A_i/\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{B} = \underset{i}{\times} B_i/\mathfrak{F}$ *в том и только в том случае, когда* $\{i \in \mathbb{N} \mid A_i \subseteq B_i\} \in \mathfrak{F}$.

Простое доказательство данного утверждения опустим.

Следующая теорема – хорошо известный факт из теории моделей. Ее более общую формулировку и доказательство можно найти в [8]. Для полноты изложения приведем доказательство этой теоремы для случая ультрафильтров над $\mathbb{N}$.

Теорема 1.12. *Алгебра внутренних множеств насыщена, т.е. для любой последовательности* $\mathfrak{A}_0 \supset \mathfrak{A}_1 \supset \ldots \supset \mathfrak{A}_n \supset \ldots$ *внутренних множеств*

$$\bigcap_n \mathfrak{A}_n = \emptyset \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists N \quad \forall n \geqslant N \quad \mathfrak{A}_n = \emptyset. \tag{1}$$

Доказательство. Нетривиальную импликацию докажем от противного. Пусть $\mathfrak{A}_n = \underset{i}{\times} A_i^n/\mathfrak{F} \neq \emptyset$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Не ограничивая общности, можно считать, что $A_i^n \neq \emptyset$ при любых i, n. Для $m \in \mathbb{N}$ определим

$$I_m = \{i \geqslant m \mid A_i^0 \supset A_i^1 \supset \ldots \supset A_i^m \neq \emptyset\}.$$

Нетрудно видеть, что

(1) $I_0 = \mathbb{N}$;
(2) $I_m \in \mathfrak{F}$;
(3) $I_m \supset I_{m+1} \quad \forall m \in \mathbb{N}$;
(4) $\bigcap\limits_{m \in \mathbb{N}} I_m = \emptyset$.

Для каждого $i \in \mathbb{N}$ определим

$$m(i) = \max\{m \mid i \in I_m\}$$

Из определения I_m следует, что $m(i) \leq i$. Для каждого i выберем некоторый элемент $a_i \in A_i^{m(i)}$. Покажем, что $\langle a_i \rangle_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{A}_m$ для всех $m \in \mathbb{N}$, т.е. что $\{i \in \mathbb{N} \mid a_i \in A_i^m\} \in \mathfrak{F}$. Но для этого достаточно показать, что $I_m \subset \{i \in \mathbb{N} \mid a_i \in A_i^m\}$. Последнее, однако, очевидно, поскольку из включения $i \in I_m$ вытекает, что $m(i) \geqslant m$, т.е. $A_i^{m(i)} \subseteq A_i^m$. $\square$

Пусть $\langle X_i, \Omega_i, \mu_i \rangle$, $i \in \mathbb{N}$ – последовательность пространств с конечно-аддитивными вероятностными мерами, т.е. Ω_i – алгебра подмножеств X_i, $\mu_i(X_i) = 1$. Если $\mathfrak{X} = \underset{i}{\times} X_i/\mathfrak{F}$, то семейство Ω всех внутренних подмножеств $\mathfrak{X}$, имеющих вид $\underset{i}{\times} A_i/\mathfrak{F}$, где $A_i \in \Omega_i$, очевидно образует алгебру. На этой алгебре определена конечно аддитивная мера $\underset{i}{\times}\mu_i/\mathfrak{F}$ по формуле

$$\underset{i}{\times}\mu_i/\mathfrak{F}(\underset{i}{\times} A_i/\mathfrak{F}) = \lim_{\mathfrak{F}} \mu_i(A_i)$$

Предложение 1.13. *Мера $\underset{i}{\times}\mu_i/\mathfrak{F}$ продолжается до счетно аддитивной меры μ_L на $\sigma-$алгебре $\sigma(\Omega)$. При этом для любого множества $B \in \sigma(\Omega)$ найдется такое множество $U \in \Omega$, что $\mu_L(B\Delta U) = 0$.*

Пространства $(\mathfrak{X}, \sigma(\Omega), \mu_L)$ называются пространствамим Лёба, а меры μ_L – мерами Леба.

Доказательство. Если последовательность $\mathfrak{A}_1 \supset \mathfrak{A}_2 \supset \ldots \supset \mathfrak{A}_n \supset \ldots$ множеств из Ω имеет пустое пересечение, то из Теоремы 1.12 следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} \underset{i}{\times}\mu_i/\mathfrak{F}(\mathfrak{A}_n) = 0$, и по условию Каратеодори меру $\underset{i}{\times}\mu_i/\mathfrak{F}$ можно продожить на σ-алгебру. Если $B \in \sigma(\Omega)$, то из конструкции продолжения меры легко следует существование таких последовательностей множеств $\mathfrak{A}_n \in \Omega$ и $\mathfrak{B}_n \in \Omega$, что $\mathfrak{A}_n \subseteq \mathfrak{A}_{n+1} \subseteq B \subseteq \mathfrak{B}_{n+1} \subseteq \mathfrak{B}_{n+1}$ и $\underset{i}{\times}\mu(\mathfrak{A}_n) + \frac{1}{n} > \mu_L(B) > \underset{i}{\times}\mu(\mathfrak{B}_n) - \frac{1}{n}$. Пусть $\mathfrak{A}_n = \underset{i}{\times} A_i^{(n)}/\mathfrak{F}$, $\mathfrak{B}_n = \underset{i}{\times} B_i^{(n)}/\mathfrak{F}$. Не ограничивая общности, можно считать, что для любых $n, i \in \mathbb{N}$ $A_i^{(n)} \subseteq A_i^{(n+1)}$, $B_i^{(n)} \supseteq B_i^{(n+1)}$, а также $A_i^{(n)} \subseteq B_i^{(m)}$ при любом m. Положим теперь $U = \underset{i}{\times} A_i^{(i)}/\mathfrak{F}$. Поскольку множество $\{i \mid A_i^{(i)} \supseteq A_i^{(m)}\} \supseteq \{i \mid i > m\} \in \mathfrak{F}$, то для любого m $U \supseteq \mathfrak{A}_m$. Аналогично $U \subseteq \mathfrak{B}_m$. Теперь очевидно, что U удовлетворяет условиям предложения. $\square$

Определение 1.14. *Множество называется ультраконечным, если оно является ультрапроизведением конечных множеств.*

В случае, когда $\mathfrak{X}$ – ультраконечное множество, т.е. все X_i конечны, ниже рассматривается только пространство Леба, порожденное равномерными вероятностными мерами, т.е. Ω_i – алгебра всех подмнжеесть X_i, а $\mu_i(A_i) = \frac{|A_i|}{|X_i|}$. Такое пространство будем называть каноническим пространством Леба, построенным по X_i.

2. Аппроксимируемость и локальная вложимость

Далее для краткости записи "для любого конечного..." и "существует конечное..." будут использоваться обозначения $\forall^f$ и $\exists^f$. Кроме того для обозначения инъективных отображений будет использоваться знак $\rightarrowtail$.

Нижеследующие определение и теорема являются частными случаями общего понятия локальной вложимости алгебраической системы в некоторый класс алгебраических систем той же сигнатуры и соответствующей теоремы для общих алгебраических систем из [10]. Мы приводим доказательство для замкнутости изложения. Все рассматриваемые ниже группы предполагаются счетными, но это предположение не является существенным.

Определение 2.1. *Группа G называется аппроксимируемой группами из класса $\mathfrak{K}$ (локально вложимой в класс $\mathfrak{K}$), если для любого конечного подмножества $H \subset G$ существует группа $\langle K, \odot\rangle \in \mathfrak{K}$ и отображение $\psi : H \rightarrowtail K$ такое, что $\forall h_1, h_2 \in H$*

$$h_1 h_2 \in H \to \varphi(h_1 h_2) = \varphi(h_1) \odot \varphi(h_2). \qquad (2)$$

Теорема 2.2. *Группа G локально вложима в класс групп $\mathfrak{K}$ в том и только в том случае, когда существует последовательность групп $K_i \in \mathfrak{K}$, $i \in \mathbb{N}$, свободный ультрафильтр $\mathfrak{F}$ на $\mathbb{N}$ и инъективный гомоморфизм $\psi : G \to \mathop{\times}\limits_i K_i/\mathfrak{F}$.*

Доказательство. Пусть группа G локально вложима в класс групп $\mathfrak{K}$. Зафиксируем возрастающую последовательность $\{H_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ конечных подмножеств G такую, что $\bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} H_i = G$ (напомним, что мы ограничились рассмотрением только счетных групп), и построим для каждого H_i группу $\langle K_i, \odot_i\rangle$ и отображение $\varphi_i : H_i \to$

K_i, удовлетворяющие условиям предыдущего определения. Зафиксируем произвольный свободный ультрафильтр $\mathfrak{F}$ на $\mathbb{N}$ и построим вложение $\psi : G \to \mathop{\times}\limits_i K_i/\mathfrak{F}$ следующим образом. Пусть $g \in G$. Определим последовательность $k_i \in K_i$ по формуле

$$k_i = \begin{cases} \varphi_i(k), & k \in H_i \\ e_i, & k \notin H_i \end{cases},$$

где e_i – единица группы K_i, и положим $\psi(g) = \langle k_i \rangle_{\mathfrak{F}}$. Поскольку $k_i = \varphi_i(k)$ для почти всех i, а все φ_i инъективны, то отображение ψ инъективно (см. предложение 1.9). Пусть $g_1, g_2 \in G$ и $g_1 g_2 = g_3$. Для почти всех $i \in \mathbb{N}$ $g_1, g_2, g_3 \in H_i$, т.е. $\varphi_i(g_1 g_2) = \varphi_i(g_1) \odot_i \varphi_(g_2)$, а это значит, что $\psi(g_1 g_2) = \psi(g_1) \odot_{\mathfrak{F}} \psi(g_2)$, тем самым ψ – гомоморфизм.

Пусть, наоборот, $\psi : G \to \mathop{\times}\limits_i K_i/\mathfrak{F}$ – инъективный гомоморфизм, $K_i \in \mathfrak{K}$ $\forall i \in \mathbb{N}$. Рассмотрим произвольное конечное множество $H \subseteq G$. Для каждого $h \in H$ зафиксируем представителя $\langle k_i^{(h)} \rangle \in \mathop{\times}\limits_i K_i$ элемента $\psi(h)$ Для любых $h_1 \neq h_2 \in H$ пусть $A_{h_1,h_2} = \{i \in \mathbb{N} \mid k_i^{(h_1)} \neq k_i^{(h_2)}\}$. Тогда $A_{h_1,h_2} \in \mathfrak{F}$ ввиду инъективности ψ. Пусть теперь $h_1, h_2, h_3 \in H$ таковы, что $h_1 h_2 = h_3$. Обозначим $B_{h_1,h_2,h_3} = \{i \in \mathbb{N} \mid k_i^{(h_1)} \odot_i k_i^{(h_2)} = k_i^{(h_3)}\}$. Ввиду того, что ψ – гомоморфизм, $B_{h_1,h_2,h_3} \in \mathfrak{F}$. Следовательно

$$C = \bigcap_{\substack{h_1,h_2 \in H \\ h_1 \neq h_2}} A_{h_1,h_2} \cap$$

$$\bigcap_{\substack{h_1,h_2,h_3 \in H \\ h_1 h_2 = h_3}} B_{h_1,h_2,h_3} \neq \emptyset.$$

Пусть $i_0 \in C$. Определим $\varphi : H \to K_{i_0}$, положив $\varphi(h) = k_{i_0}^{(h)}$. Очевидно, что K_{i_0} и φ удовлетворяют условиям определения локальной вложимости. $\square$

В статье [15] подробно изучается класс групп, локально вложимых в класс конечных групп (ЛВК-группы). Этот же класс неявно возникает и в [11]. В этих работах установлено, в частности, что конечно представимая группа является ЛВК-группой в том и только в том случае, когда она финитно аппроксимируема, т.е. пересечение всех нормальных подгрупп конечного индекса состоит только из единицы. Распространим это утверждение на случай локальной вложимости в произвольный класс $\mathfrak{K}$. Напомним, что класс групп $\mathfrak{K}$ называется *наследственным*, если вместе с каждой группой $G \in \mathfrak{K}$ класс $\mathfrak{K}$ содержит все ее подгруппы.

Предложение 2.3. *Пусть конечно представимая группа G локально вложима в наследственный класс $\mathfrak{K}$. Тогда для любого конечного множества $H \subseteq G$ существуют группа $K \in \mathfrak{K}$ и сюрвективный гомоморфизм $\varphi : G \to K$, инвективный на H.*

Доказательство. Пусть $g_1, \dots, g_n$ – образующие группы G, а $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ – определяющие соотношения, т.е. некоторые слова в алфавите $g_1^{\pm 1}, \dots, g_n^{\pm 1}$. Зафиксируем какую-нибудь систему слов $\beta_1, \dots, \beta_s$, определяющих элементы конечного множества H. Обозначим через H_1 конечное множество элементов группы G, состоящее из образующих и элементов, представленных всевозможными подсловами слов $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_s$. Построим по H_1 группу $K_1 \in \mathfrak{K}$ и инъективное отображение $\psi : H_1 \to K_1$, удовлетворяющие условиям определения 2.1. Рассмотрим в K_1 подгруппу K, порожденную элементами $\psi(g_1^{\pm 1}), \dots, \psi(g_n^{\pm 1})$. Из наследственности класса $\mathfrak{K}$ следует, что $K \in \mathfrak{K}$. Из условия (2) следует, что в группе K выполненыы соотношения $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ (точнее $\psi(\alpha_1), \dots, \psi(\alpha_k)$). А это значит, что отображение ψ (инъективное на H) продожается до гомоморфизма $\varphi : G \to K$. $\square$

Замечание 2.4. Очевидно любая группа G, для которой выполнено утверждение последнего предложения, локально вложима в класс $\mathfrak{K}$. Как известно, группы обладающие этим свойством в случае, когда $\mathfrak{K}$ – класс конечных групп, называются финитно аппроксимируемыми. Таким образом, все финитно аппроксимируемые группы являются ЛВК-группами [15].

Приведем одно достаточное условие локальной вложимости группы G в класс $\mathfrak{K}$.

Пусть $\mathcal{G}$ – группа с метрикой ρ, обладающей следующим свойством:

$$\begin{gathered}\forall \gamma \in \mathcal{G} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \, \forall \xi \eta \in \mathcal{G} (\rho(\xi, \eta)) < \delta \Longrightarrow \\ \Longrightarrow \max\{\rho(\gamma\xi, \gamma\eta), \rho(\xi\gamma, \eta\gamma)\} < \varepsilon)\end{gathered} \tag{3}$$

Вот несколько примеров групп с естественной метрикой, обладающей указанным свойством.

Пример 2.5. Любая инвариантная метрика ρ на группе $\mathcal{G}$ очевидно обладает свойством (3).

Пример 2.6. Пусть (X, μ) – пространство с вероятностной мерой, $\mathcal{G}$ – группа квазиинвариантных (т.е. сохраняющих идеал множеств меры нуль) преобразований пространства X. Определеим метрику ρ на $\mathcal{G}$, положив

$$\rho(\xi, \eta) = \mu(\{x \in X \mid \xi x \neq \eta x\}). \tag{4}$$

Это действительно метрика, если отождествить преобразования, совпадающие почти всюду. Покажем, что ρ удовлетворяет условию (3). Поскольку каждое преобразование $\gamma \in \mathcal{G}$ обратимо, то $\forall x \in X$ $\xi x = \eta x \iff \gamma\xi x = \gamma\eta x$, т.е. $\rho(\xi, \eta) = \rho(\gamma\xi, \gamma\eta)$ для любых $\xi, \eta \in \mathcal{G}$. Аналогичное равенство при умножении на γ справа уже не имеет места. Однако из того, что $\gamma \in \mathcal{G}$ сохраняет идеал множеств меры нуль следует, что мера μ^γ, определяемая из равенства $\mu^\gamma(A) = \mu(\gamma^{-1}A)$ для любого $A \subseteq X$, абсолютно непрерывна относительно меры μ. Это означает, что

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall A \subseteq X\, (\mu(A) < \delta \Longrightarrow \mu^\gamma(A) < \varepsilon). \tag{5}$$

Положим $A = \{x \in X \mid \xi x \neq \eta x\}$. Тогда $\gamma^{-1}A = \{x \in X \mid \xi\gamma x \neq \eta\gamma x\}$. Теперь (3) немедленно следует из (5).

Пример 2.7. Если $\mathcal{G}$ – группа унитарных операторов в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, а $\rho(U, V) = \|U - V\|$, то очевидно имеют место неравенства $\rho(UW, VW) \leqslant \rho(U, V)$ и $\rho(WU, WV) \leqslant \rho(U, V)$, из которых немедленно следует условие (3).

Пример 2.8. Пусть снова $\mathcal{G}$ – группа унитарных операторов в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Рассмотрим теперь метрику ρ, определяющую сильную операторную топологию на $\mathcal{G}$. Для этого зафиксируем какой-нибудь ортонормированный базис $\{e_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ и положим

$$\rho(U, V) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\|Ue_i - Ve_i\|}{2^i}. \tag{6}$$

Тогда снова $\rho(WU, WV) \leqslant \rho(U, V)$. При умножении на W справа аналогичное неравенство уже не имеет места. Однако $\rho(UW, VW)$ при фиксированном W и переменных U и V можно рассматривать, как метрику, которая строится точно также по ортонормированному базису $\{We_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, т.е. задающую сильную операторную топологию, а следовательно, эквивалентную исходной. Отсюда сразу следует выполнение условия (3).

Замечание 2.9. Метрики в примерах 2.6–2.8 ограничены, т.е. $\exists a > 0\ \forall \xi, \eta\ \rho(\xi, \eta) < a$.

Определение 2.10. *Пусть $q > 0$ и H – подгруппа группы $\mathcal{G}$ с метрикой ρ. Назовем ее q-дискретной, если $\forall h \in H$ $(h \neq e \Longrightarrow \rho(h, e) \geqslant q)$, где e – единица группы $\mathcal{G}$.*

Пример 2.11. В условиях примера 2.6 группа H квазиинвариантных преобразований пространства (X, μ) 1-дискретна в том и только в том случае, когда она действует в X свободно. Напомним, это означает, что $\forall \xi \in H$ $(\xi \neq e \Longrightarrow \mu(\{x \in X \mid \xi x = x\}) = 0)$. Аналогично, будем говорить, что H действует в X q-свободно, если $\forall \xi \in H$ $(\xi \neq e \Longrightarrow \mu(\{x \in X \mid \xi x = x\}) \leqslant 1 - q)$.

Пример 2.12. Рассмотрим левое регулярное представление группы G. Положим $\mathfrak{H} = l_2(G)$ и отождествим G с группой операторов этого представления. Здесь $\mathcal{G}$ – группа всех унитарных операторов пространства $l_2(G)$. Выберем базис $\{e_g \mid g \in G\}$ в $\mathfrak{H}$, такой, что $e_g(h) = \delta_{gh}$. Если теперь ρ определяется формулой (6) после какой-нибудь нумерации элементов G, то очевидно, что $\forall g_1, g_2\ \rho(g_1, g_2) = \sqrt{2}$, т.е. $G - \sqrt{2}$ – дискретная подгруппа $\mathcal{G}$.

Определение 2.13. *Назовем подгруппу G группы $\mathcal{G}$ с метрикой ρ q-дискретно аппроксимируемой группами из класса $\mathfrak{K}$, если для любого $\varepsilon > 0$и любого конечного множества $\{g_1, \dots, g_n\} \subseteq G$ найдутся такие $h_1, \dots, h_n \in \mathcal{G}$, что $\rho(g_i, h_i) < \varepsilon$, $i = 1 \dots n$ и подгруппа H группы G, порожденная элементами $h_1, \dots, h_n$ q-дискретна и принадлежит классу $\mathfrak{K}$.*

Очевидно, если подгруппа H q-дискретно аппроксимируема какими-нибудь группами, то она сама q'-дискретна для любого $q' < q$.

Теорема 2.14. *Пусть подгруппа G группы $\mathcal{G}$ с ограниченной метрикой ρ, удовлетворяющей условию (3), q-дискретно аппроксимируется группами из класса $\mathfrak{K}$ для некоторого $q > 0$. Тогда G локально вложима в класс $\mathfrak{K}$.*

Доказательство. Пусть $G = \{g_1, \dots, g_n, \dots\}$ и положим $G_n = \{g_1, \dots, g_n\}$. Выберем последовательность $\varepsilon_n \searrow 0$ и построим последовательность групп, $H_n \in \mathfrak{K}$, удовлетворяющих условию теоремы. Обозначим через $\varphi : G_n \to H_n$ – инъективное отображение, такое, что $\varphi_n(g_i) = h_i$. Зафиксируем свободный ультрафильтр $\mathfrak{F}$

на $\mathbf{N}$ и рассмотрим ультрастепень $\mathcal{G}^{\mathfrak{F}}$. На этой группе определим псевдометрику $\rho^{\mathfrak{F}}$, положив

$$\rho^{\mathfrak{F}}(\alpha,\beta)=\lim_{\mathfrak{F}}\rho(a_n,b_n),$$

где $\langle a_n\rangle$ и $\langle b_n\rangle$ – представители классов α и β соответственно. Условие (3) обеспечивает то, что $K=\{\alpha\mid\rho^{\mathfrak{F}}(\alpha,e)=0\}$ – нормальный делитель в $\mathcal{G}^{\mathfrak{F}}$. Обозначим $\mathcal{G}^{\#}=\mathcal{G}^{\mathfrak{F}}/K$. Пусть $\mathcal{H}=\prod_n H_n/\mathfrak{F}$. Тогда $\mathcal{H}$ – подгруппа $\mathcal{G}^{\mathfrak{F}}$. При этом условие q-дискретности аппроксимации обеспечивает, то, что $\mathcal{H}\cap K=\varnothing$, т.е. $\mathcal{H}$ инъективновкладывается в $\mathcal{G}^{\#}$. Построим вложение $\Psi: G\to\mathcal{H}$, положив $\Psi(g)$ – класс последовательности $\varphi_n(g)$ (для конечного числа n таких, что $g\notin G_n$, соответствующая компонента может быть определена произвольно). Условие аппроксимируемости влечет то, что $\rho^{\mathfrak{F}}\iota(g),\Psi(g))=0$, т.е. образы этих элементов в $\mathcal{G}^{\#}$ совпадают, что и доказывает инъективную вложимость G в ультрапроизведение $\mathcal{H}$ групп из класса $\mathfrak{K}$. □

Определение 2.15. *Будем говорить, что группа G квазиинвариантных преобразований пространства с вероятностной мерой (X,μ) q-свободно аппроксимируема группами из класса $\mathfrak{K}$, если для любого $\varepsilon>0$ и любого конечного множества $\{g_1,\dots,g_n\}\subseteq\mathcal{G}$ найдутся такие квазиинвариантные преобразования $h_1,\dots,h_n$ пространства (X,μ), что*

$$\mu(\{x\in X\mid h_ix=g_ix,\ i=1,\dots,n\})\geqslant 1-\varepsilon,$$

подгруппа H, порожденная преобразованиями $h_1,\dots,h_n$, действует q-свободно на X (см. пример 2.11) и $H\in\mathfrak{K}$.

Из рассмотрений примеров 2.6 и 2.11 следует, что если G q-свободно аппроксимируема группами из класса $\mathfrak{K}$, то она и q-дискретно аппроксимируема группами из этого класса, если на группе $\mathcal{G}$ рассмотреть метрику (4). Теперь из теоремы 2.14 непосредственно вытекает

Следствие 2.16. *Если группа G квазиинвариантных преобразований пространства с вероятностной мерой (X,μ) q-свободно аппроксимируема группами из класса $\mathfrak{K}$, то она локально вложима в класс $\mathfrak{K}$.*

Последнее следствие установлено в работах [11] и [15] для частного случая, когда класс $\mathfrak{K}$ есть класс конечных групп и группа G *свободно* аппроксимируема конечными группами. Там же установлено и обратное утверждение: всякая ЛВК-группа имеет квазиинвариантное свободно аппроксимируемое действие в некотором вероятностном пространстве с мерой (X,μ).

Для ЛВК-групп утверждение теоремы обращается и для случая, рассмотренного в примере 2.12.

Предложение 2.17. *Пусть G – ЛВК-группа. Тогда в условиях примера* 2.12 *G – q-дискретно аппроксимируема конечными группами для некоторого $q > 0$.*

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что $G = \{1, 2, \dots\}$, причем 1 – единица группы G. Тогда метрика в $\mathcal{G}$ (см. пример 2.12) определяется формулой (6). Для $m \in \mathbb{N}$ положим $\mathbb{N}_m = \{1, \dots, m\}$. Определим квазиметрику ρ_m в $\mathcal{G}$ формулой

$$\rho_m(U,V) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\|Ue_i - Ve_i\}}{2^i}.$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Выберем $m \in \mathbb{N}$ так, что $|\rho - \rho_m| < \varepsilon$ при любых U и V.

Зафиксируем произвольные $g_1, \dots, g_n \in G$. Положим $F = \{g_1, \dots, g_n\} \cup \mathbb{N}_m$ и $H = F^2$. Поскольку F содержит единицу, то $F \subseteq H$. Построим по H конечную группу $(K, \odot)$, удовлетворяющую определению 2.1. Не ограничивая общности можно считать, $K \subseteq G$ как множество и отображение ψ тождественное, т.е. $H \subseteq K$. Определим на $\mathcal{G}$ метрику ρ_K, положив

$$\rho_K(U,V) = \sum_{i\in K} \frac{\|Ue_i - Ve_i\|}{2^i}.$$

Поскольку $N_m \subseteq K$, то $|\rho - \rho_K| < \varepsilon/2$ при любых U и V. Определим теперь операторы $h_1, \dots, h_n$, которые действуют на элементы e_i, как операторы левого регулярного представления группы $(K, \odot)$, если $i \in K$ и оставляют e_i неподвижным, если $i \notin K$. Из определения 5 следует, что при $j \leqslant n$ и при $i \leqslant m$ $\rho_m(g_j, h_j) = 0$, т.е. $\rho(g_j, h_j) < \varepsilon$. По построению группа, порожденная операторами $h_1, \dots, h_n$ изоморфна подгруппе K, т.е. конечна. Из рассмотрений примера 2.12, примененных к группе K следует, что K – $\sqrt{2}/2$-дискретна в группе всех унитарных операторов пространства $l_2(K)$, т.е. для любого элемента $h \neq e$ этой группы

$\rho_K(h,e) > \sqrt{2}/2$, а значит $\rho(h,e) > \sqrt{2}/2 - \varepsilon$. Если с самого начала выбирать ε меньше, чем, скажем, $\sqrt{2}/4$, получим требуемое. $\square$

3. Аппроксимируемость и аменабельность

Напомним определение аменабельной группы

Определение 3.1. *Дискретная группа G называется аменабельной, если на множестве всех ее подмножеств $\mathcal{P}(G)$ существует конечно аддитивная конечная нетривиальная левоинвариантная (правоинвариантная) мера μ.*

Одним из важных критериев аменабельности является условие Фёлнера (см., например, [5]).

Теорема 3.2 условие Фёлнера. *Группа G аменабельна тогда и только тогда, когда для любого $\epsilon > 0$ и для любого конечного множества $K \subset G$ найдется непустое конечное множество $U \subset G$ такое, что*

$$\forall x \in K \quad \frac{|xU \bigtriangleup U|}{|U|} < \epsilon. \tag{7}$$

Из этой теоремы легко выводится

Следствие 3.3. *Счетная группа G аменабельна тогда и только тогда, когда существует расширяющаяся к G последовательность конечных подмножеств $U_1 \subset U_2 \subset \ldots \subset U_n \subset \ldots \subset G$ такая, что*

$$\forall x \in G \quad \lim_{n\to\infty} \frac{|xU_n \cap U_n|}{|U_n|} = 1. \tag{8}$$

Такую последовательность в дальнейшем будем называть "фёлнеровской".

В работе [15] показано, что класс аменабельных групп находится в общем положении с классом ЛВК-групп – существуют не аменабельные ЛВК-группы (таковыми являются, например, свободные группы с конечным числом образующих, поскольку они финитно аппроксимируемы – см. Замечание в предыдущем разделе), а также аменабельные не ЛВК-группы (такой пример построить значительно сложнее – см. [15]).

Группы, локально вложимые в класс аменабельных групп, будем называть ЛВА-группами. Из сказанного только что следует, что класс ЛВА-групп шире класса ЛВК-групп. Однако имеет место

Предложение 3.4. *Существуют группы, не являющиеся локально вложимыми в класс аменабельных групп.*

Доказательство. В [14] построен пример бесконечной конечно представимой простой не аменабельной группы G. Если G – ЛВА-группа, то в силу предложения 2.3 для любого, отличного от единицы элемента $a \in G$ существуют такая аменабельная группа K и такой сюръективный гомоморфизм $\varphi : G \to K$, что $\varphi(a) \neq e$. Это означает, что группа K нетривиальна. Тогда ввиду простоты G гомоморфизм φ инъективен, т.е. является изоморфизмом. Это означает, что группа G аменабельна. Противоречие $\square$

Ниже дается еще одно определение аппроксимируемости конечными группами, которое охватывает как класс аменабельных групп, так и класс ЛВК-групп.

Определение 3.5. *Группа G называется слабо аппроксимируемой конечными группами, если $\forall \epsilon > 0 \forall^f H \subset G \exists^f (K, A)$, где K – группа действующая на множестве A, $\exists \varphi : H \rightarrowtail K$ такие, что $\forall h_1, h_2 \in H$*

$$h_1 h_2 \in H \to \frac{|\{x \in A \mid \varphi(h_1 h_2)x = \varphi(h_1)\varphi(h_2)x\}|}{|A|} \geqslant 1 - \epsilon. \qquad (9)$$

Нетрудно показать, что ЛВК группа слабо аппроксимируема конечными. Для этого достаточно положить $A = K$ и рассматривать действие K на себе левыми сдвигами.

Предложение 3.6. *Пусть G аменабельная группа, тогда G слабо аппроксимируема конечными группами.*

Доказательство. Пусть H конечное подмножество G. Можно считать, что для любого h из H обратный элемент h^{-1} также лежит в H. По условию Фёлнера для любого $\epsilon > 0$ существует такое конечное $U \subset G$, что

$$\forall h \in H \quad \frac{|hU \cap U|}{|U|} \geqslant 1 - \epsilon/2$$

Положим $A = U$ и $K = S(U)$. Для каждого $h \in H$ зафиксируем произвольную биекцию $\psi_h : (U \setminus h^{-1}U) \longrightarrow (U \setminus hU)$ и определим $\varphi : H \rightarrowtail K$ по правилу

$$\varphi(h)u = \begin{cases} hu, & \text{если} \quad hu \in U; \\ \psi_h(u), & \text{если} \quad hu \notin U. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что

$$\{x \in A \mid \varphi(h_1 h_2)x = \varphi(h_1)\varphi(h_2)x\} \supset h_2^{-1}U \cap (h_1 h_2)^{-1}U \cap U. \quad (10)$$

Для $B = h_2^{-1}U \cap U$ и $C = (h_1 h_2)^{-1}U \cap U$ справедливо

$$1 \geqslant \frac{|B \cup C|}{|U|} = \frac{|B|}{|U|} + \frac{|C|}{|U|} - \frac{|B \cap C|}{|U|} \geqslant (1 - \epsilon/2) + (1 - \epsilon/2) - \frac{|B \cap C|}{|U|}.$$

Откуда

$$\frac{|h_2^{-1}U \cap (h_1 h_2)^{-1}U \cap U|}{|U|} = \frac{|B \cap C|}{|U|} \geqslant 1 - \epsilon,$$

что ввиду (10) доказывает (9) □

Предложение 3.7. *Пусть G – ЛВА-группа, тогда G слабо аппроксимируема конечными группами.*

Доказательство. Так как G аппроксимируема аменабельными группами, то для любого конечного $H \subset G$ существует аменабельная группа M и отображение $\psi : H \rightarrowtail M$ такое, что $\forall h_1, h_2 \in H$

$$h_1 h_2 \in H \to \varphi(h_1 h_2) = \varphi(h_1)\varphi(h_2).$$

По предыдущему предложению группа M слабо аппроксимируема конечными группами, и, значит, в частности, для любого $\epsilon > 0$ существует конечная группа K, действующая на множестве A, и отображение $\theta : \psi(H) \rightarrowtail K$ такие, что $\forall m_1, m_2 \in \psi(H)$

$$m_1 m_2 \in \psi(H) \to \frac{|\{x \in A \mid \theta(m_1 m_2)x = \theta(m_1)\theta(m_2)x\}|}{|A|} \geqslant 1 - \epsilon.$$

Теперь, если положить $\varphi = \theta \circ \psi$, то (9) будет очевидным образом выполняться □

Пусть G – аменабельная группа. Зафиксируем некоторую фелнеровскую последовательность $\{U_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ подмножеств G, свободный ультрафильтр $\mathfrak{F}$ на $\mathbb{N}$ и построим по U_i каноническое пространство Леба. Как множество $\mathcal{U} = \underset{i}{\times} U_i/\mathfrak{F}$ является подмножеством ультрастепени $G^{\mathfrak{F}}$. Как было показано во втором разделе, группа G канонически вкладывается в группу $G^{\mathfrak{F}}$, поэтому ниже для краткости записи считаем, что G – подгруппа $G^{\mathfrak{F}}$. Положим $\mathcal{X} = \bigcap_{g \in G} g\mathcal{U}$.

Предложение 3.8.

(1) *Мера Леба* $\mu_L(\mathcal{X}) = 1$.
(2) *Множество* $\mathcal{X}$ *инвариантно относительно действия группы* G *левыми сдвигами в* $G^{\mathfrak{F}}$.
(3) *Действие группы* G *в* $\mathcal{X}$ *свободно и сохраняет меру Леба.*

Доказательство. Для доказательства части 1 достаточно показать, что $\mu_L(\mathcal{U} \cap g\mathcal{U}) = 1$, но это очевидно поскольку из условия (8) и предложения 1.7 (2) следует, что $\lim\limits_{\mathfrak{F}} \frac{|gU_i \cap U_i|}{|U_i|} = 1$. Часть 2 непосредственно следует из определения множества $\mathcal{X}$. Действие групы G в $G^{\mathfrak{F}}$ очевидно свободно, поскольку свободно действие любой группы на себе левыми сдвигами. Для доказательства части 3 теперь достаточно показать, что для любого внутреннего множества $\mathcal{D} = \underset{i}{\times} D_i/\mathfrak{F} \subseteq \mathcal{U}$ имеет место равенство $\mu_L(\mathcal{X} \cap \mathcal{D}) = \mu_L(g(\mathcal{X} \cap \mathcal{D}))$. Очевидно $\mu_L(g(\mathcal{X} \cap \mathcal{D})) = \mu_L(\mathcal{X} \cap g\mathcal{D}))$. Имеем $|D_i| = |gD_i| = |gD_i \cap gU_i|$ для почти всех i поскольку $D_i \subseteq U_i$ для почти всех i. Следовательно,

$$| \, |D_i| - |gD_i \cap U_i| \, | = | \, |gD_i \cap gU_i| - |gD_i \cap U_i| \, | \leq |U_i \Delta gU_i|.$$

В силу (8) имеет место равенство $\lim\limits_{\mathfrak{F}} \frac{|U_i \Delta gU_i|}{|U_i|} = 0$, т.е. $\lim\limits_{\mathfrak{F}} \frac{|D_i|}{|U_i|} = \lim\limits_{\mathfrak{F}} \frac{|gD_i \cap U_i|}{|U_i|}$, что и требуется, ввиду того, что $\mathcal{X}$ – множество полной меры в $\mathcal{U}$ $\square$

Замечание 3.9. Для произвольного $A \subseteq G$ положим $\nu(A) = \mu_L(A^{\mathfrak{F}} \cap \mathcal{X})$. Из предложения 3.8 немедленно следует, что ν инвариантная конечно аддитивная мера на $\mathcal{P}(G)$, причем очевидно, что $\nu(G) = 1$. Тем самым из предложения 11 немедленно следует доказательство достаточности критерия Фелнера.

Построение, приведенное в последнем замечании можно несколько модифицировать для получения известной конструкции Фюрстенберга, сопоставляющей каждому подмножеству положительной плотности в $\mathbb{N}$ некоторое пространство с мерой так, что сдвигу на единицу в $\mathbb{N}$ сопоставляется сохраняющее меру преобразованию этого пространства. Эта конструкция была использована Фюрстенбергом в “эргодическом” доказательтсве теоремы Семереди о существовании сколь угодно длинных арифметических прогрессий в произвольном множестве положительной плотности.

Определение 3.10. *Пусть $A \subseteq G$. Назовем плотностью A относительно фелнеровской последовательности $U = \{U_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ число*

$$d_U(A) = \overline{\lim_{i\to\infty}} \frac{|A \cap U_i|}{|U_i|}.$$

Тогда имеет место предложение, которое, следуя [3] назовем принципом соответствия Фюрстенберга.

Предложение 3.11. *Пусть G – счетная аменабельная группа и $U = \{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ есть фёлнеровкая последовательность подмножеств G. Тогда для любого множества $A \subset G$ с $d_U(A) > 0$ существует вероятностное пространство $(X, \mathfrak{B}, \mu)$, инвариантное действие T группы G на X и гомоморфизм булевых алгебр $\varphi : 2^G \longrightarrow \mathfrak{B}$ такие, что:*

(и) $\forall B \subset G \quad \mu(\varphi(B)) \leqslant d_U(B)$;
(ии) $\forall B \subset G \quad \varphi(gB) = T_g(\varphi(B))$;
(иии) $\mu(\varphi(A)) = d_U(A)$.

Доказательство. В силу предложения 1.7 для любого свободного ультрафильтра $\mathfrak{F}$ на $\mathbb{N}$ $\lim\limits_{\mathfrak{F}} \frac{|A\cap U_i|}{|U_i|} \le d_U(A)$ и существует такой ультрафильтр $\mathfrak{F}_0$ на $\mathbb{N}$, что $\lim\limits_{\mathfrak{F}_0} \frac{|A\cap U_i|}{|U_i|} = d_U(A)$. Построим по этому $\mathfrak{F}_0$ пространство Леба $\mathcal{X}$, такое же как в предложении 3.8 и также определим в нем действие группы G. Теперь для любого $B \subseteq G$ положим $\varphi(B) = B^{\mathfrak{F}} \cap \mathcal{X}$. Теперь условия (и)–(иии) данного предложения выполняются очевидным образом. □

Несколько модифицируя конструкцию пространства $\mathcal{X}$ можно получить следующее усиление критерия Фелнера.

Теорема 3.12. *Для того, чтобы группа G была аменабельной, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\exists q > 0 \forall^f H \subset G \exists^f U \subset G \quad \frac{|\{x \in U \mid \forall h \in H\ hx \in U\}|}{|U|} \geqslant q. \qquad (11)$$

Доказательство.

1) Достаточность. Рассмотрим расширяющуюся к G последовательность $H_i \subset H_{i+1} \subset \ldots \subset G$ и соответствующую ей последовательность U_i. Обозначим $\mathfrak{H} = \underset{i}{\times} H_i/\mathfrak{F}, \mathfrak{U} = \underset{i}{\times} U_i/\mathfrak{F}$. Легко понять,

что $G \subset \mathfrak{H} \subset G^{\mathfrak{F}}$. Рассмотрим множество $V = \bigcap\limits_{g \in G} g\mathfrak{U}$ пространства $(\mathfrak{U}, \mu_L)$. Нетрудно понять, что $V \supset \mathop{\times}\limits_{i} \{x \in U_i \mid \forall h \in H_i\ hx \in U_i\}/\mathfrak{F}$, а поэтому $\mu_L(V) \geqslant q$.

На 2^G определим меру $\mu(A) = \mu_L(A^{\mathfrak{F}} \cap V)$. Покажем, что эта мера левоинвариантна. Пусть C – произвольное множество, на котором действует группа G, $D \subset C$ и $B \subset G$ тогда обозначим $B \star D \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap\limits_{g \in B} gD$. Понятно, что $V = \lim\limits_{B \in \rho(G)} B \star \mathfrak{U}$, где $\rho(G) = \{B_\alpha\}$ – произвольная расширяющаяся к группе G направленность ее конечных подмножеств. Зафиксируем произвольный элемент $g \in G$. Направленность $g\rho(G) = \{gB_\alpha\}$ будет так же расширяющейся к G, и поэтому $V = \lim\limits_{B \in g\rho(G)} B \star \mathfrak{U}$. Теперь

$$\mu(A) = \mu_L(A^{\mathfrak{F}} \cap V) = \lim_{B \in \rho(G)} \mu_L(A^{\mathfrak{F}} \cap B \star \mathfrak{U}) =$$

$$= \lim_{B \in \rho(G)} \lim_{\mathfrak{F}} \frac{|A \cap B \star U_i|}{|U_i|} =$$

$$= \lim_{B \in \rho(G)} \lim_{\mathfrak{F}} \frac{|gA \cap gB \star U_i|}{|U_i|} = \lim_{B \in \rho(G)} \mu_L(gA^{\mathfrak{F}} \cap gB \star \mathfrak{U}) =$$

$$= \lim_{B \in g\rho(G)} \mu_L(gA^{\mathfrak{F}} \cap B \star \mathfrak{U}) = \mu_L(gA^{\mathfrak{F}} \cap V) = \mu(gA).$$

2) Необходимость. Пусть группа G аменабельна, тогда для нее справедливо условие Фёлнера. В частности, его можно записать в виде

$$\forall^f H \subset G\ \exists^f U \subset G\ \forall h \in H \quad \frac{|U \setminus h^{-1}U|}{|U|} \leqslant \frac{1}{2|H|}$$

С другой стороны понятно, что

$$\{x \in U \mid \forall h \in H\ hx \in U\} = \bigcap_{h \in H} h^{-1}U \cap U = U \setminus \bigcup_{h \in H} (U \setminus h^{-1}U).$$

Откуда

$$\frac{|\{x \in U \mid \forall h \in H\ hx \in U\}|}{|U|} \geqslant 1 - \frac{|\bigcup\limits_{h \in H} (U \setminus h^{-1}U)|}{|U|} \geqslant$$

$$\geqslant 1 - \sum_{h\in H} \frac{|U \setminus h^{-1}U|}{|U|} \geqslant 1 - \sum_{h\in H} \frac{1}{2|H|} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

и, таким образом, условие (11) выполняется для $q = \frac{1}{2}$. □

Следствие 3.13. *Пусть G – ЛВК группа и*

$$\exists q > 0 \forall^f H \subset G \exists^f (K, \odot), H \subset K \subset G \mid$$

$$\forall h_1, h_2 \in H \, (h_1 h_2 \in H \to h_1 h_2 = h_1 \odot h_2)$$

$$\&$$

$$\frac{|\{k \in K \mid \forall h \in H \; hk = h \odot k\}|}{|K|} \geqslant q.$$

Тогда группа G аменабельна.

Доказательство. Ввиду включения

$$\{k \in K \mid \forall h \in H \; hk \in K\} \supset \{k \in K \mid \forall h \in H \; hk = h \odot k\},$$

условие (11) будет выполнятся при У1К.

В статье [15] был поставлен вопрос о том как, выделить аменабельные группы в классе ЛВК групп и было высказано предположение о том, что свойство аменабельности связано с количественными характеристиками аппроксимации группы G конечными группами. Предыдущее следствие показывает, что в качестве такой характеристики можно рассмотреть следующую функцию, определенную на всех конечных подмножествах G.

Определение 3.14. *Будем говорить, что конечная группа $(K, \odot)$ H-аппроксимирует G, если имеет место включение множеств $H \subseteq K \subseteq G$ и*

$$\forall h_1, h_2 \in H \, (h_1 h_2 \in H \to h_1 h_2 = h_1 \odot h_2) \, .$$

При этом будем писать $K \in Ap_H(G)$.

Определим функцию λ_G на конечных подмножествах G, положив

$$\lambda_G(H) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{K \in Ap_H(G)} \frac{|\{k \in K \mid \forall h \in H \; hk = h \odot k\}|}{|K|}.$$

Теперь предыдущее следствие может быть переформулировано как

Предложение 3.15. *Если ЛВК группа G такова, что*

$$\inf_{H\subseteq G, |H|<\infty} \lambda_G(H) > 0,$$

то G аменабельна.

Вопрос о том, справедливо ли обратное утверждение, открыт.

В [15] доказано, что G – ЛВК-группа в том и только в том случае, когда существует расширяющаяся к G последовательность ее конечных подмножеств L_n, на каждом из которых определена операция $\odot_n$, превращающая L_n в группу и удовлетворяющая условию

$$\forall a, b \in L_n \ (a \cdot b \in L_n \longrightarrow a \odot_n b \in L_n).$$

Последовательность $(L_n, \odot_n)$ будем называть аппроксимирующей последовательностью группы G.

Если аппроксимирующая последовательность (L_n) группы G, как последовательность множеств является фёлнеровской, то нетрудно показать, что

$$\forall 0 < q < 1 \forall^f H \subset G \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N$$

$$\frac{|\{x \in L_n \mid \forall h \in H \ hx = h \odot_n x\}|}{|L_n|} \geqslant q$$

и, таким образом, выполняются условия предложения 3.15.

В [15] было высказано предположение о том, что существует связь между ее аменабельностью и асимтотическим поведением функции

$$\psi(n) = \frac{|\{< a, b >\in L_n^2 \mid a \cdot b \in L_n\}|}{|L_n|^2}, \tag{12}$$

где L_n – аппроксимирующая последовательность группы G. Ниже рассмотрены два примера аменабельных ЛВК-групп (во втором из них группа даже коммутативна) в которых аппроксимирующая последовательность L_n является фелнеровской, т.е. выполнены условия предложения 3.15, но $\lim\limits_{n\to\infty} \psi(n) = 0$.

3.1. Группа $Symm(\mathbb{Z}) \leftthreetimes \mathbb{Z}$.

Эта группа рассматривалась в [15], как пример ЛВК-группы, которая не является локально финитно аппроксимируемой.

Пусть $Symm(\mathbb{Z})$ – группа финитных подстановок $\mathbb{Z}$. Действие $\mathbb{Z}$ на себе сдвигами порождает действие $\mathbb{Z}$ на $Symm(\mathbb{Z})$ автоморфизмами:

$$\forall \pi \in Symm(\mathbb{Z}) \quad \forall m, k \in \mathbb{Z} \qquad \pi^{(m)}(k) \stackrel{\text{def}}{=} \pi(k+m) - m.$$

Таким образом, определено полупрямое произведение $Symm(\mathbb{Z}) \rtimes \mathbb{Z}$ с операцией

$$(m, \pi) \cdot (k, \sigma) = (m + k, \pi^{(-k)}\sigma).$$

Группа $Symm(\mathbb{Z}) \rtimes \mathbb{Z}$ аменабельна как полупрямое произведение аменабельных групп.

Пусть $\mathbb{Z}_{2n+1} \stackrel{\text{def}}{=} \{-n, \dots, n\}$ – группа вычетов по модулю $2n+1$, и

$S_{2n+1} \stackrel{\text{def}}{=} \{\pi \in Symm(\mathbb{Z}) \mid \pi\big|_{\mathbb{Z}\setminus\mathbb{Z}_{2n+1}} = Id\}$.

Покажем, что подмножества $U_n = \mathbb{Z}_{2n+1} \times S_{2n+1} \subset Symm(\mathbb{Z}) \rtimes \mathbb{Z}$ образуют фелнеровскую последовательность.

Зафиксируем элемент $x = (m, \pi) \in Symm(\mathbb{Z}) \rtimes \mathbb{Z}$. Нетрудно заметить, что существует номер n_0 такой, что $m \in \mathbb{Z}_{2n_0+1}$ и $\pi \in S_{2n_0+1}$. Можно считать, что $n \geqslant n_0$. Найдем число элементов $(k, \sigma) \in U_n$ таких, что

$$(m, \pi) \cdot (k, \sigma) \in U_n$$

или, что то же самое, удовлетворяющих двум условиям

$$m + k \in \mathbb{Z}_{2n+1} \tag{13}$$

$$\pi^{(-k)}\sigma \in S_{2n+1} \tag{14}$$

Покажем, что для выполнения этих условий достаточно, чтобы $|k| \leqslant n - n_0$. Действительно, $|k+m| \leqslant |k| + |m| \leqslant (n - n_0) + n_0 = n$ и (13) выполняется. Пусть $|t| > n$, тогда $\sigma(t) = t$ ввиду $\sigma \in S_{2n+1}$. Так как $|t - k| \geqslant |t| - |k| > n - (n - n_0) = n_0$, то $\pi^{(-k)}(t) = t$. Таким образом, при $|t| > n \quad \pi^{(-k)}\sigma(t) = t$, что равносильно (14).

Так как при $|k| \leqslant n - n_0$ выбор $\sigma \in S_{2n+1}$ ничем не ограничен, то $|U_n \cap xU_n| \geqslant (2(n - n_0) + 1)(2n + 1)!$. Отсюда

$$\frac{|U_n \bigcap xU_n|}{|U_n|} \geqslant \frac{(2(n - n_0) + 1)(2n + 1)!}{(2n + 1)(2n + 1)!} = 1 - \frac{2n_0}{2n + 1} \longrightarrow_{n\to\infty} 1,$$

что доказывает справедливость (8).

В [15] показано, что $Symm(\mathbb{Z}) \rightthreetimes \mathbb{Z}$ есть ЛВК-группа. При этом в качестве аппроксимирующей последовательности L_n можно взять последовательность множеств U_n с операцией $\odot_n$, определенной ниже. Действие $\mathbb{Z}_{2n+1}$ на себе сдвигами по модулю $2n+1$ индуцирует действие $\mathbb{Z}_{2n+1}$ на S_{2n+1} автоморфизмами:

$$\forall \pi \in S_{2n+1} \quad \forall m \in \mathbb{Z}_{2n+1}$$

$$\pi^{[m]}(k) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \pi(k \oplus_n m) \ominus_n m, & k \in \mathbb{Z}_{2n+1}; \\ k, & k \notin \mathbb{Z}_{2n+1}. \end{cases}$$

где $\oplus_n$ и $\ominus_n$ – сложение и вычитание по модулю $2n+1$.

Теперь, очевидно, что $L_n = U_n$ является носителем группы $S_{2n+1} \rightthreetimes \mathbb{Z}_{2n+1}$, т.е. операция в L_n определяется по формуле

$$(m, \pi) \odot_n (k, \sigma) = (m \oplus_n k, \pi^{[-k]}\sigma)$$

Легко видеть, что группы $(L_n, \odot_n)$ образуют аппроксимирующую последовательность группы $G = Symm(\mathbb{Z}) \rightthreetimes \mathbb{Z}$.

Изучим поведение функции (12) для последовательности $(L_n, \odot_n)$. Для этого найдем число пар элементов, удовлетворяющих равенству

$$(m, \pi) \odot_n (k, \sigma) = (m, \pi) \cdot (k, \sigma) \tag{15}$$

или, что то же самое, двум равенствам

$$m \oplus_n k = m + k \tag{16}$$

$$\pi^{[-k]}\sigma(t) = \pi^{(-k)}\sigma(t). \tag{17}$$

Зафиксируем $k \in \mathbb{Z}_{2n+1} \subset \mathbb{Z}$. Пусть для определенности $k > 0$, тогда для выполнения (16) необходимо, чтобы m было одним из чисел $\{-n, \dots, n-k\}$, то есть его выбор возможен $(2n+1-k)$ способами.

Теперь выберем произвольное $\sigma \in S_{2n+1}$ ($(2n+1)!$ способами). Для всех $t \in \mathbb{Z}$ должно выполнятся (17). При $t > n+k$ и $t < -n$ оно тривиально ввиду того, что $\sigma, \pi, \pi^{[-k]} \in S_{2n+1}$. При $n < t \leq n+k$ равенство (17) равносильно $t - k = \pi(t-k)$, что означает тождественность π на $\{n+1-k, ..., n\}$. При $t \in \mathbb{Z}_{2n+1}$ равенство (17) можно переписать в виде

$$\pi(\sigma(t) \ominus_n k) \oplus_n k = \pi(\sigma(t) - k) + k.$$

Обозначим $z = \sigma(t)$. Т.к. σ биективна на $\mathbb{Z}_{2n+1}$, то, когда t пробегает $\mathbb{Z}_{2n+1}$, z также пробегает $\mathbb{Z}_{2n+1}$. Потому последнее равенство равносильно

$$\forall z \in Z_{2n+1} \quad \pi(z \ominus_n k) \oplus_n k = \pi(z-k)+k.$$

При $z \in \{-n+k, ..., n\}$ это равенство очевидно выполняется. В случае же $z \in \{-n, ..., -n+k-1\}$ оно равносильно

$$\pi(z \ominus_n k) = z \ominus_n k,$$

что так же означает тождественность π на $\{n+1-k, ..., n\}$. Таким образом, число возможностей выбора π равно $(2n+1-k)!$.

Получаем, что число пар с фиксированным $k > 0$, удовлетворяющих (15) равно $(2n+1-k)(2n+1)!(2n+1-k)!$. При $k \leqslant 0$ аналогичные рассуждения приведут к результату $(2n+1+k)(2n+1)!(2n+1+k)!$.

Итак, число пар, удовлетворяющих (15), равно

$$\sum_{k=-n}^{n}(2n+1-|k|)(2n+1)!(2n+1-|k|)! =$$
$$= 2\sum_{k=1}^{n}(2n+1-k)(2n+1)!(2n+1-k)!+$$
$$+(2n+1)(2n+1)!(2n+1)! =$$
$$= (2n+1)!\left[2\sum_{t=n+1}^{2n} t\ \ t! + (2n+1)(2n+1)!\right] =$$
$$= (2n+1)!\left[2\sum_{t=n+1}^{2n}((t+1)-1)t! + (2n+1)(2n+1)!\right] =$$
$$= (2n+1)!\left[2\left(\sum_{t=n+2}^{2n+1} t! - \sum_{t=n+1}^{2n} t!\right) + (2n+1)(2n+1)!\right] =$$
$$= (2n+1)!\left[2\left((2n+1)!-(n+1)!\right)+(2n+1)(2n+1)!\right] =$$
$$= (2n+1)!\left[(2n+3)(2n+1)!-2(n+1)!\right]$$

Соответственно,

$$\psi(n) = \frac{(2n+1)!\left[(2n+3)(2n+1)!-2(n+1)!\right]}{\left[(2n+1)(2n+1)!\right]^2} =$$

$$= \frac{2n+3}{(2n+1)^2} - \frac{2(n+1)!}{(2n+1)^2(2n+1)!} \sim \frac{1}{2n} \longrightarrow_{n\to\infty} 0.$$

3.2. Группа $(\mathbb{Q}_+, \cdot)$.

Рассмотрим группу $(\mathbb{Q}_+, \cdot)$ положительных рациональных чисел с операцией умножения. Поскольку эта группа коммутативна, она является аменабельной ЛВК-группой. Любое число из $x \in \mathbb{Q}_+$ представимо единственным образом ввиде бесконечного произведения $x = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{k_n} \cdot \ldots$, где p_n - простые, идущие в естественном порядке, а все $k_n \in \mathbb{Z}$, начиная с некоторого, равны 0. Таким образом, $\mathbb{Q}_+$ есть бесконечная прямая сумма $\bigoplus\limits_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}^{(n)}$. Отсюда возникает "естественная" аппроскимация $\mathbb{Q}_+$.

Итак, пусть $L_n = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} \mathbb{Z}_{2n+1}^{(i)}$, где $Z_{2n+1} = \{-n, -n+1, \ldots, n\}$ - группа вычетов по модулю $2n+1$. Очевидно, последовательность L_n является аппроксимирующей последовательностью группы $(\mathbb{Q}_+, \cdot)$.

Так как для любого $k \in \mathbb{Z}$ и достаточно большого n

$$|(k + \mathbb{Z}_{2n+1}) \cap \mathbb{Z}_{2n+1}| = (2n+1) - |k|,$$

то для любого $x = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{k_m} \in \mathbb{Q}_+$ имеем

$$|xL_n \cap L_n| = (2n+1-|k_1|)(2n+1-|k_2|)\ldots(2n+1-|k_m|)(2n+1)^{n-m}$$

и, стало быть,

$$\frac{|(xL_n) \triangle L_n|}{|L_n|} =$$

$$2\frac{(2n+1)^n - (2n+1-|k_1|)(2n+1-|k_2|)\ldots(2n+1-|k_m|)(2n+1)^{n-m}}{(2n+1)^n} =$$

$$2\left(1 - \frac{2n+1-|k_1|}{2n+1}\frac{2n+1-|k_2|}{2n+1}\cdots\frac{2n+1-|k_m|}{2n+1}\right) \longrightarrow_{n\to\infty} 0.$$

Таким образом, L_n есть фёлнеровская последовательность, т.е. выполнено условие предложения 3.15.

Нетрудно получить, что число пар элементов $\mathbb{Z}_{2n+1}$, при обычном сложении попадающих туда же, равно $(2n+1)^2 - n(n+1) = 3n^2+3n+1$. Теперь для построенной аппроксимации функция (12) легко вычисляется

$$\psi(n) = \frac{(3n^2+3n+1)^n}{(2n+1)^{2n}} = \frac{(3n^2+3n+1)^n}{(4n^2+4n+1)^n} \sim \left(\frac{3}{4}\right)^n \longrightarrow_{n\to\infty} 0.$$

4. Аппроксимируемость дискретных групп и их алгебр Хопфа

Определение 4.1. *Будем говорить, что биалгебра* $(A, \cdot, \Delta)$ *аппроксимируется конечномерными биалгебрами* $(A_n, \odot_n, \Delta_n)$, *если*

(1) A_n *есть линейное подпространство* A_{n+1} *и* $A = \cup_n A_n$;
(2) $\forall a, b \in A\ \exists n\ \forall m > n\ a \cdot b = a \odot_m b$;
(3) $\forall a \in A \exists n \forall m > n \Delta_m(a) = \Delta(a)$.

Напомним определение кокомутативной алгебры Хопфа $A(G)$ дискретной группы G (над полем $\mathbb{C}$). Как линейное пространство

$$A(G) = \{\sum_{i=1}^{n} a_i g_i\ ;\ a_i \in \mathbb{C},\ g_i \in G,\ n < \infty\}.$$

Умножение $(\cdot)$, коумножение (Δ), антипод S, и коединицу ϵ достаточно определить на групповых элементах, дальше они распространяются по линейности: умножение совпадает с групповым умножением, для $g \in G$ имеем $\Delta(g) = g \otimes g$, $S(g) = g^{-1}$, $\epsilon(g) = 1$.

Теорема 4.2. *Кокоммутативная алгебра Хопфа счетной дискретной группы* G *аппроксимируется (как биалгебра) конечномерными биалгебрами тогда и только тогда, когда* G *– ЛВК группа.*

Для доказательства теоремы напомним определение group-like элемента биалгебры.

Определение 4.3. *Group-like элементом биалгебры* A *называется* $a \in A$, *такое что* $a \neq 0$ *и* $\Delta(a) = a \otimes a$.

Нам потребуются также два почти очевидных свойства group-like элементов.

Предложение 4.4. *Group-like элементы биалгебры линейно независимы.*

Доказательство. Пусть $a = \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \ldots + \lambda_n g_n$ – group-like элемент, где $\lambda_i \neq 0$ и $g_1, g_2, \ldots, g_n$ – линейно-независимые group-like элементы. Но тогда $x = a \otimes a - \Delta(a) = 0$. Имеем

$$x = \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{n} \lambda_i \lambda_j g_i \otimes g_j - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i \otimes g_i = 0,$$

что не верно, так как, например, $\delta_i \otimes \delta_j(x) = \lambda_i \lambda_j$, где $\delta_k(g_i) = 1$, если $k = i$, и $\delta_k(g_i) = 0$, если $k \neq i$.

Предложение 4.5. *Произведение group-like элементов биалгебры либо group-like элемент, либо* 0.

Доказательство. $\Delta(g_1 \cdot g_2) = \Delta(g_1) \cdot \Delta(g_2) = g_1 g_2 \otimes g_1 g_2$.

Доказательство теоремы. Пусть $A(G)$ – аппроксимируемая кокомутативная алгебра Хопфа дискретной группы G; $(A_n, \odot_n, \Delta_n)$ – аппроксимирующие биалгебры. По любому набору элементов $\{g_1, g_2, ..., g_n\} \subset G$ мы построим группу $(H, \odot)$, $\{g_1, g_2, ..., g_n\} \subset H \subset G$, такую что

(1) $(H, \odot)$ – конечная группа;
(2) $g_i^{\pm 1} \cdot g_j^{\pm 1} = g_i^{\pm 1} \odot g_j^{\pm 1}$.

Это и будет означать, что G – ЛВК-группа. Выберем такое m, что

i). $g_1^{\pm 1}, g_2^{\pm 1}, ..., g_n^{\pm 1} \in A_m$,
ii). $g_i^{\pm 1} \cdot g_j^{\pm 1} = g_i^{\pm 1} \odot_m g_j^{\pm 1}$, $i, j = 1, ..., n$,
iii). $\Delta_m(g_i^{\pm 1}) = g_i^{\pm 1} \otimes g_i^{\pm 1}$, $i = 1, ..., n$.

Рассмотрим в $(A_m, \odot_m)$, подполугруппу H, порожденную элементами $\{g_i^{\pm 1}\ ,\ i = 1, ..., n\}$. В силу свойства ii) порождающее множество этой полугруппы вместе с каждым элементом содержит и обратный к нему (относительно умножения $\odot_m$). Следовательно H – группа. В силу предложения 4.5 и свойства iii) группа H состоит из group-like элементов биалгебры A_m. Из предложения 4.4 следует, что все элементы H линейно независимы в A_m, а поскольку алгебра A_m конечномерна, то группа H конечна.

Пусть, наоборот G – ЛВК-группа. Рассмотрим ее аппроксимирующую последовательность $(K_n, \odot_n)$ (определение аппроксимирующей последовательности см. в разделе 3 после предложения 3.15). Тогда алгебры $A(K_n)$ аппроксимируют $A(G)$. Действительно, пусть $a = \sum_{i=1}^{k} a_i g_i$ и $b = \sum_{i=1}^{k'} b_i h_i$, где $b_i, h_i \in \mathbb{C}$, $h_i, g_i \in G$. Выберем n такое, что $h_i, g_j, h_i \cdot g_j \in K_n$, $i = 1, ..., k'$, $j = 1, ..., k$, но тогда $a \odot_m b = a \cdot b$ для всех $m \geqslant n$, а $\Delta_m(a) = \Delta(a)$ при всех m, поскольку линейное пространство $A(K_m)$ есть подпространство $A(G)$ при любом m.

5. Аппроксимируемость компактных групп и их алгебр Хопфа

В настоящем разделе мы рассмотрим связь апроксимируемости компактных групп и их коммутативных алгебр Хопфа.

Пусть G – компактная группа, $A(G)$ – коммутативная алгебра Хопфа группы G, то есть $A(G)$ – алгебра (над $\mathbb{C}$) матричных элементов конечномерных представлений группы G. Умножение $(\cdot)$, коумножение (Δ), антипод S, и коединица ϵ определяются следующим образом: для $f, h \in A(G)$ и $g, g' \in G$ имеем $(f \cdot h)(g) = f(g)h(g)$, $(\Delta f)(g, g') = f(gg')$, $(Sf)(g) = f(g^{-1}$, $\epsilon(f) = f(e)$, где e – единица группы G. Будем считать, что на $A(G)$ введена норма $\|f(\cdot)\| = \sup\limits_{g\in G} |f(g)|$.

Определение 5.1. *Будем говорить, что нормированная биалгебра* $(A, \| \quad \|, \cdot, \Delta)$ *аппроксимируется конечномерными нормированными биалгебрами* $(A_n, \| \quad \|_n, \odot_n, \Delta_n)$, *если существуют отображения* $\psi_n : A \to A_n$, *такие что*

(1) $\psi_n(\cdot)$ – *непрерывный гомоморфизм, т.е.* $\psi_n(ab) = \psi_n(a) \odot_n \psi_n(b)$ *и* $\|\psi_n(a)\|_n < C_n\|a\|$

(2) $\exists 0 < \epsilon < C \forall a \in A \exists m \in \mathbb{N} \forall n > m \ \ \epsilon\|a\| < \|\psi_n(a)\| < C\|a\|$

(3) $\forall a \in A \|\psi_n \otimes \psi_n \Delta a - \Delta_n \psi_n(a)\|_{n\times n} \to 0$ *при* $n \to \infty$, *где предполагается, что на* $A_n \otimes A_n$ *введена следующая норма:*

$$\|r\|_{n\times n} = \sup_{\substack{\alpha,\beta\in A_n^* \\ \|\alpha\|_*=\|\beta\|_*=1}} |<\alpha\otimes\beta, r>|.$$

Следующее определение аппроксимиуемости компактных групп конечными группами эквивалентно соответствующему определению из [4] (см. также [15]).

Определение 5.2. *Будем говорить, что компактная группа* G *аппроксимируется конечными группами* $(G_n, *_n)$, *если* $\exists \phi_n : G_n \to G$, *такие что:*

(1) $\forall$ *открытого* $U \subset G$ $\exists m \in \mathbb{N} \forall n > m \ \ \phi_n(G_n) \cap U \neq \emptyset$

(2) $\forall U_e \exists m \in \mathbb{N} \forall n > m \forall g_1, g_2 \in G_n \quad \phi_n^{-1}(g_1 *_n g_2)\phi_n(g_1)\phi_n(g_2) \in U_e$, *где* U_e – *окрестность единицы в* G.

Из определения 5.2 сразу вытекает

Предложение 5.3. *Пусть компактная группа* G *аппроксимируется конечными группами* G_n, *а* $\phi_n : G_n \to G$ – *отображения определения* 5.2. *Тогда*

3. $\forall U_e \exists m \forall n > m \ \phi_n(e_n) \in U_e$, *где* e_n – *единица* G_n.
4. $\forall U_e \exists m \forall n > m \forall g \in G_n \ \ \phi_n(g)\phi_n(g^{-1}) \in U_e$

Доказательство. Положив $g_2 = e_n$ в пункте 2) определения 5.2, получим $\phi(e_n) \in U_e$, что доказывает 3).

Положив $g_1 = g$ и $g_2 = g^{-1}$, а так же заменив U_e на U'_e в пункте 2) определения 5.2, получим $\phi_n^{-1}(e_n)\phi_n(g)\phi_n(g^{-1}) \in U'_e$. Воспользовавшись доказательством предыдущего пункта, получаем $\phi_n(g)\phi_n(g^{-1}) \in \{xy; \quad x, y \in U'_e\}$. Осталось выбрать номера так, чтобы выполнялось $\{xy; \; x, y \in U'_e\} \subset U_e$. □

Теорема 5.4. *Коммутативная алгебра Хопфа компактной группы G аппроксимируема (как нормированная биалгебра) конечномерными коммутативными полупростыми нормированными алгебрами Хопфа тогда и только тогда, когда группа G аппроксимируема конечными группами.*

Доказательство. $\Leftarrow$. Пусть группа G аппроксимируется конечными группами G_n, ϕ_n – отображения определения 5.2. Тогда прямые вычисления показывают, что алгебра $A(G)$ аппроксимируется алгебрами $A(G_n)$, где на $A(G_n)$ введена норма $\|f\| = \sup_{g\in G_n} |f(g)|$, для $f \in A(G_n)$; ψ_n определения 5.1 задаются следующим соотношением: для $f \in A(G)$, $g \in G_n$ выполняется $\psi_n(f)(g) = f(\phi_n(g))$.

$\Rightarrow$. Как известно, пространство непрерывных характеров $\mathcal{X}$ алгебры $A = A(G)$ с умножением $\chi_1\chi_2(a) = \chi_1 \otimes \chi_2(\Delta a)$ и $*$-слабой топологией образует компактную группу, изоморфную группе G. Аналогично, пространства характеров $\mathcal{X}_n$ (с умножением $\chi_1 *_n \chi_2(a) = \chi_1 \otimes \chi_2(\Delta_n a))$ аппроксимирующих алгебр A_n образуют конечные группы[2]. Так как отображения ψ_n определения 5.1 – гомоморфизмы, $\psi_n^*(\mathcal{X}_n) \subset \mathcal{X}$. Пусть $G_n = \mathcal{X}_n$, $G = \mathcal{X}$, проверим, что $\phi_n = \psi_n^*$ удовлетворяют свойствам 1) и 2) определения 5.2. Для произвольной окрестности $U \subset G$ выберем функцию $f \in C(G)$, такую что $f \not\equiv 0$ и $f(G\backslash U) = \{0\}$. Так как A плотна в $C(G)$, то гомоморфизмы ψ_n продолжаются на $C(G)$ с сохранением свойства 2 определения 5.2, т.е. $\exists m \forall n > m \; \psi_n(f) \neq 0$, а из полупростоты A_n следует $\exists \chi_n \in G_n \; < \psi_n(f), \chi_n > \neq 0$, а значит $\psi_n^*(\chi_n) \in U$ (Здесь $\mathcal{X}$ и G отождествлены). Таким образом утверждение пункта 1) определения 5.2 доказано.

Пусть $\chi_0 \in \mathcal{X}$, $a_1, a_2, ..., a_r \in A$, $\epsilon \in \mathbb{R}^+$, обозначим

$$U_{\chi_0}(a_1, a_2, ..., a_r, \epsilon) = \{\chi \in \mathcal{X} \; : \; |\chi_0(a_i) - \chi(a_i)| < \epsilon, \text{ при } i = 1, ..., r\},$$

[2]На самом деле, каждая конечномерная коммутативная полупростая алгебра Хопфа является групповой алгеброй группы своих характеров.

Так как A плотна в $C(G)$, то $*$-слабая топология на $\mathcal{X}$ задается системой окрестностей

$$\{U_{\chi_0}(a_1, a_2, ..., a_r, \epsilon) \ : \ \chi_0 \in \mathcal{X}, \ r \in \mathbb{N}, \ a_1, a_2, ..., a_r \in A, \ \epsilon \in \mathbb{R}^+\}.$$

Нам потребуется следующая

Лемма 5.5. *Для любых* $\{a_1, a_2, ..., a_r\} \subset A$ *и* $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ *существуют* $\{b_1, b_2, ..., b_k\} \subset A$ *и* $\epsilon' \in \mathbb{R}^+$*, такие что*

$$\forall \chi_1, \chi_2 \in \mathcal{X} \ \ \chi_1 U_{\chi_2}(b_1, ..., b_k, \epsilon') \subseteq U_{\chi_1\chi_2}(a_1, ..., a_r, \epsilon)$$

Доказательство. По определению алгебры Хопфа A

$$\Delta a_i = \sum_{j=1}^{k_i} a_i^j \otimes b_{i,j}.$$

В качестве $\{b_1, ..., b_k\}$ можно взять множество всех $b_{i,j}$ (это множество конечно), а в качестве ϵ' – любое положительное число, удовлетворяющее неравенству

$$\epsilon' \leq \frac{\epsilon}{\sup_i \sum_j \|a_i^j\|}.$$

Действительно, пусть $\chi \in U_{\chi_2}(b_1, ..., b_k, \epsilon')$. Тогда, учитывая, что $\|\chi_1\| = 1$, получим

$$|\chi_1\chi(a_i) - \chi_1\chi_2(a_i)| = |(\chi_1 \otimes \chi - \chi_1 \otimes \chi_2)(\sum a_i^j \otimes b_{i,j})| \leq$$

$$\leq \sum |\chi_1(a_i^j)| \cdot |\chi(b_{i,j}) - \chi_2(b_{i,j})| < \epsilon' \sum \|a_i^j\| \leq \epsilon,$$

но это означает, что $\chi_1\chi \in U_{\chi_1\chi_2}$. $\square$

Положив в лемме $\chi_2 = \chi, \ \chi_1 = \chi^{-1}$, получим

Следствие 5.6. *Для любых* $\{a_1, a_2, ..., a_r\} \subset A$ *и* $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ *существуют* $\{b_1, b_2, ..., b_k\} \subset A$ *и* $\epsilon' \in \mathbb{R}^+$*, такие что*

$$\forall \chi \in \mathcal{X} \ \ U_\chi(b_1, ..., b_k, \epsilon') \subseteq \chi U_e(a_1, ..., a_r, \epsilon)$$

Вернемся к доказательству теоремы. Нам осталось доказать

$$\forall U_e \exists m \in \mathbb{N} \forall n > m \forall \chi_1, \chi_2 \in \mathcal{X}_n \ \ \phi_n^{-1}(\chi_1 *_n \chi_2)\phi_n(\chi_1)\phi_n(\chi_2) \in U_e,$$

где можно считать $U_e = U_e(a_1, a_2, ..., a_r, \epsilon)$. По следствию 5.6 условие

$$\phi_n(\chi_1)\phi_n(\chi_2) \in \phi_n(\chi_1 *_n \chi_2)U_e(a_1, a_2, ..., a_r, \epsilon)$$

можно заменить условием

$$\phi_n(\chi_1)\phi_n(\chi_2) \in U_{\phi_n(\chi_1 *_n \chi_2)}(b_1, ..., b_k, \epsilon').$$

Покажем, что последнее условие выполняется для достаточно больших n:

$$|\phi_n(\chi_1)\phi_n(\chi_2)(b) - \phi_n(\chi_1 *_n \chi_2)(b)| =$$

$$= |\chi_1 \otimes \chi_2(\psi_n \otimes \psi_n \Delta b) - \chi_1 \otimes \chi_2(\Delta_n \psi_n(b))| =$$

$$= |\chi_1 \otimes \chi_2(\psi_n \otimes \psi_n \Delta b - \Delta_n \psi_n(b))| \leq \|\psi_n \otimes \psi_n \Delta b - \Delta_n \psi_n(b)\|_{n \times n}.$$

Теперь в силу условия 3 определения 5.1 получаем, что

$$\|\psi_n \otimes \psi_n \Delta b - \Delta_n \psi_n(b)\|_{n \times n} \to 0 \text{ при } n \to \infty$$

□

Замечания. В следующем разделе будет показано, что многие компактные группы Ли, в частности, группа $SO(3)$, не аппроксимируются конечными группами в смысле определения 5.2. В связи с этим естественно возникает вопрос о такой модификации данного определения, относительно которой класс топологических групп аппроксимируемых конечными существенно расширился бы. Следуя идеям А. М. Вершика [16, 15], можно рассмотреть различные модификации определения 5.1 аппроксимимруемости алгебр Хопфа. Отметим некоторые из них

1. Если, подобно тому, как в предыдущем разделе считать, что аппроксимирующие алгебры не обязательно алгебры Хопфа, а только биалгебры, то мы придем к определению аппроксимации группы конечными полугруппами, аналогичному определению 5.2. При этом совершенно также, как теорема 5.6 может быть доказана

Теорема 5.7. *Коммутативная алгебра Хопфа компактной группы G аппроксимируема (как нормированная биалгебра) конечномерными коммутативными полупростыми нормированными биалгебрами тогда и только тогда, когда группа G аппроксимируема конечными полугруппами.*

2. Можно ослабить определение 5.1, предположив, что линейные операторы ψ_n не являются, вообще говоря, гомоморфизмами, но удовлетворяют условию

$$\forall a, b \in A \lim_{n\to\infty} ||\psi_n(ab) - \psi_n(a)\psi_n(b)||_n = 0.$$

Эта модификация определения 5.1 пока не исследована.

3. В модификации определения 5.1, указанной в предыдущем пункте можно отказаться от коммутативности аппроксимирующих конечномерных алгебр. Отметим, что некоммутативные конечномерные деформации алгебр функций на некоторых симплектических многообразиях рассматирвались в [3] в связи с проблемой квантования. На тот факт, что указанные деформации могут рассматриваться как аппроксимации в рассматриваемом здесь смысле обратил внимание И.А.Шерешевский.

5.1. Аппроксимируемость компактных групп Ли.

Для дальнейшего изложения нам будет удобно переформулировать определение аппроксимируемости компактной группы конечными. Как известно, топология сепарабельной компактной группы может быть определена при помощи инвариантной метрики. В дальнейшем такая метрика считается заданной и обозначается через d.

Определение 5.8. *Будем говорить, что $A \subset G$ образует ϵ-сеть в G, если*

$$\forall g \in G \exists a \in A \ (d(g, a) < \epsilon)$$

Определение 5.9. *Пусть H – группа, а G – компактная топологическая группа с инвариантной метрикой d. Отображение $\rho : H \to G$ назавем ϵ-гомоморфизмом, если*

$$\forall x, y \in H \ \ (d(\rho(xy), \rho(x)\rho(y)) < \epsilon)$$

Непосредственно из этих определений и определения аппроксимируемости компактной группы конечными вытекает

Следствие 5.10. *Компактная группа G аппроксимируема конечными тогда и только тогда, когда для любого $\epsilon > 0$ существует конечная группа H и ϵ-гомоморфизм ρ, такие что $\rho(H)$ образует ϵ-сеть в G.*

Следующая теорема дает необходимое и достаточное условие аппроксимируемости компактных групп Ли.

Теорема 5.11. *Компактная конечно-мерная группа Ли G аппроксимируема конечными группами тогда и только тогда, когда для любого $\epsilon > 0$ существует конечная подгруппа $H \subset G$, образующая ϵ-сеть в G.*

Из этой теоремы и из конечности числа подгрупп группы $SO(3)$, не состоящих целиком из вращений относительно одной оси, вытекает

Следствие 5.12. *Группа $SO(3)$ не аппроксимируема конечными группами.*

Вернемся к теореме 5.11. Аппроксимируемость групп, удовлетворяющих условию теоремы очевидна. Неочевидная импликация вытекает из следующей теоремы.

Теорема 5.13. *Для любой конечно-мерной компактной группы Ли G найдется такое $\epsilon' > 0$, что для любого ϵ-гомоморфизма $\rho : H \to G$, где H – компактная (в частности, конечнная) группа и $0 < \epsilon < \epsilon'$, найдется гомоморфизм $\phi : H \to G$, такой что $\forall h \in H \;\; d(\phi(h), \rho(h)) < 2\epsilon$.*

Фактически, теорема 5.13 является модификацией теоремы Каждана об ϵ-представлениях, доказанной для аменабельных групп в [7]. Для полноты изложения здесь приводится доказательство теоремы 5.13, несколько более элементарное, чем то, которое приведено в [7]. Это доказательство проходит и для случая аменабельных групп.

Мы можем считать, что G – подгруппа Ли конечномерной унитарной группы $U(n)$ (у каждой компактной группы Ли существует точное унитарное представление); в качестве $d(g_1, g_2)$ возьмем $d(g_1, g_2) = ||g_1 - g_2||$, а $||.||$ – стандартная норма в $L(n) \supset U(n)$, где $L(n)$ – множество всех линейных операторов n-мерного унитарного пространства. Через $\int\limits_{x \in H} ...dx$ обозначим интегрирование по инвариантной мере, в случае конечной группы

$$\int\limits_{x \in H} f(x)\delta x = \frac{1}{|H|} \sum_{x \in H} f(x)$$

Основным шагом доказательства теоремы является доказательство следующего

Предложение 5.14. *Пусть* $\epsilon_n > 0$ *достаточно мало. Тогда для любого* ϵ_n*-гомоморфизма* $\rho_n : H \to G$ *можно построить* $6\epsilon_n^2$*-гомоморфизм* $\rho_{n+1} : H \to G$, *такой что* $\|\rho_n(x) - \rho_{n+1}(x)\| \le \epsilon_n + \frac{\epsilon_n^2}{1-\epsilon_n}$.

Далее, возьмем $\epsilon_0 = \epsilon$, $\rho_0 = \rho$ и построим последовательность ρ_k предложения 5.14. Нетрудно проверить, что $\phi = \lim\limits_{k\to\infty} \rho_k$ удовлетворяет утверждению теоремы, при достаточно малом $\epsilon > 0$.

Докажем предложение 5.14.

1. Пусть $\tilde\rho_1 : H \to L(n)$, задается равенством

$$\tilde\rho_1(h) = \int\limits_{x\in H} \rho^{-1}(x)\rho(xh)\mathrm{d}x,$$

тогда

$$\forall h, g \in H \;\; \|\tilde\rho_1(h)\tilde\rho_1(g) - \tilde\rho_1(hg)\| \le 2\epsilon^2 \text{ и } \|\tilde\rho_1(h) - \rho(h)\| \le \epsilon. \tag{18}$$

Докажем это.

$$\tilde\rho_1(h)\tilde\rho_1(g) - \tilde\rho_1(hg) =$$

$$= \int\limits_{x\in H}\int\limits_{y\in H} (\rho^{-1}(x)\rho(xh)\rho^{-1}(y)\rho(yg) - \rho^{-1}(x)\rho(xhg))\mathrm{d}x\mathrm{d}y = I_1 + I_2,$$

где

$$I_1 = \int\int [\rho^{-1}(x)\rho(xh) - \rho(h)][\rho^{-1}(y)\rho(yg) - \rho(g)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

и

$$I_2 = \int\int [\rho^{-1}(x)\rho(xh)\rho(g) + \rho(h)\rho^{-1}(y)\rho(yg) -$$

$$-\rho(h)\rho(g) - \rho^{-1}(x)\rho(xhg)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Тогда

$$\|I_1\| \le \|\int \rho^{-1}(x)[\rho(xh) - \rho(x)\rho(h)]\mathrm{d}x\| \cdot$$

$$\cdot \|\int \rho^{-1}(y)[\rho(yg) - \rho(y)\rho(g)]\mathrm{d}x\| \le \epsilon^2$$

$$I_2 = \int [\rho^{-1}(x)\rho(xh)\rho(g) - \rho^{-1}(x)\rho(xhg)]\mathrm{d}x -$$

$$-\int [\rho(h)\rho^{-1}(x)\rho(x)\rho(g) - \rho(h)\rho^{-1}(x)\rho(xg)]\mathrm{d}x =$$

$$\int \rho^{-1}(x)[\rho(xh)\rho(g) - \rho(xhg)]\mathrm{d}x - \int \rho(h)\rho^{-1}(x)[\rho(x)\rho(g) - \rho(xg)]\mathrm{d}x,$$

заменив $xh \to x$ в последнем интеграле получим:

$$\|I_2\| = \| \int [\rho^{-1}(x) - \rho(h)\rho^{-1}(xh)][\rho(xh)\rho(g) - \rho(xhg)]\mathrm{d}x\| \le \epsilon^2,$$

так как

$$\|\rho^{-1}(x) - \rho(h)\rho^{-1}(xh)\| = \|\rho^{-1}(x)(\rho(xh) - \rho(x)\rho(h))\rho^{-1}(xh)\|.$$

Таким образом первое неравенство (18) доказано, доказательство второго неравенства очевидно.

2. Вообще говоря $\tilde{\rho}_1(H) \not\subset G$. Теперь по $\tilde{\rho}_1$ построим ρ_1, удовлетворяющее условиям предложения. Пусть $U_\epsilon = \{g \in U(n) \mid \|g - e\| < \epsilon\}$. При $\epsilon < 1$ существует $\ln : U_\epsilon \to su(n)$, который можно представить в виде сходящегося ряда

$$\ln(u) = \sum_{i=1}^{\infty} -(-1)^i \frac{(u-e)^i}{i}.$$

Нам потребуются некоторые оценки на ln и exp, вытекающие из их представлеий ввиде ряда.

Лемма 5.15. *При $\|u - e\| < \epsilon < 1$ выполняется*

$$\|\ln(u) - (u - e)\| < \frac{\epsilon^2}{2(1-\epsilon)}.$$

При $x \in L(n)$ и $\|x\| < \epsilon$ верно неравенство

$$\|\exp(x) - (x + e)\| < \frac{\epsilon^2}{2(1-\epsilon)}$$

Доказательсво – оценка рядов сверху геометрическими прогрессиями.

Согласно [12] можно выбрать $\epsilon > 0$ настолько малым, что $\ln(U_\epsilon \cap G)$ содержится в алгебре Ли группы G, а стало быть

$$\forall x \ \ (x \in \mathrm{span}(\ln(U_\epsilon \cap G)) \Longrightarrow \exp(x) \in G) \tag{19}$$

Пусть

$$b(h) = \int \rho^{-1}(x)[\ln(\rho(xh)\rho^{-1}(h)\rho^{-1}(x))]\rho(x)\mathrm{d}x,$$

согласно (19) $\exp[b(h)] \in G$. Положим $\rho_1(h) = \exp[b(h)]\rho(h)$.

Тогда из леммы 5.15 следует

$$\|\rho_1(h) - \tilde{\rho}_1(h)\| \leq \frac{\epsilon^2}{1-\epsilon}$$

Стало быть,

$$\|\rho_1(gh) - \rho_1(g)\rho_1(h)\| =$$

$$\|\rho_1(gh) - \tilde{\rho}_1(gh)\| + \|\tilde{\rho}_1(gh) - \tilde{\rho}_1(g)\tilde{\rho}_1(h)\| +$$

$$+\|\tilde{\rho}_1(g)\tilde{\rho}_1(h) - \rho_1(g)\tilde{\rho}_1(h)\| + +\|\rho_1(g)\tilde{\rho}_1(h) - \rho_1(g)\rho_1(h))\| \leq$$

$$\leq \frac{\epsilon^2}{1-\epsilon} + 2\epsilon^2 + \epsilon^2\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon} + \frac{\epsilon^2}{1-\epsilon} = \epsilon^2(2 + \frac{3+\epsilon}{1-\epsilon});$$

Литература

1. S. Albeverio, J-E. Fenstad, R. Høegh-Krohn, T. Lindstrøm, *Nonstandard Methods in Stochastic Analysis and Mathematical Physics.* Academic Press, New York (1986).
2. S. Albeverio, E. Gordon, A. Khrennikov, *Finite dimensional approximations of operators in the spaces of functions on locally compact abelian groups. Reports from MASDA*, Report 9841, Sept. 1998.
3. V. Bergelson, *Ergodic Ramsey theory. Comtemporary Math.*, **57** (1987), 63–87.
4. E. Gordon, *Nonstandard Methods in Commutative Harmonic Analysis.* AMS, Providence, Rhode Island. (1997).
5. Ф. Гринлиф, *Инвариантные средние на топологических группах и их приложения.* М., Мир. (1973).
6. M. Gromov, *Endomorphosms of symbolic algebraic varieties. To appear (1998).*
7. D. Kazhdan, *On ϵ-representations. Israel J. Math.*, **43**, No. 4 (1982), 315–323.
8. C. C. Chang, H. J. Keisler, *Model Theory.* North–Holland, Amsterdam, American Elsevier, NY (1973).
9. P. Loeb, *Conversion from nonstandard to standard measure spaces and applications in probability theory. Trans. Amer. Math. Soc.*, **211** (1975), 113–122.
10. А. И. Мальцев, *Алгебраические Системы.* М., "Наука" (1967).
11. A. M. Stepin, *Approximations of groups and group actions. Cayley topology. Ergodic Theory of $\mathbf{Z}^d$-Actions. London Math. Society Lecture Notes Series. V. 228. Cambridge University Press* (1996), 475–484.
12. Л. С. Понтрягин, *Непрерывные группы. 2-е изд.* М., Гостехиздат (1954).
13. А. Б. Сосинский, *Умер ли Никола Бурбаки?. Математическое просвещение (третья серия).* Вып. 2 (1998), 4–12.

14. J. W. Cannon, W. J. Floid, W. R. Parry, *Introductory notes on Richard Thompson's groups. L"Enseigneman Mathematique*, **42** (1996), 215–256.
15. А. М. Вершик, Е. И. Гордон, *Группы, локально вложимые в класс конечных групп. Алгебра и Анализ.*, No. 1 (1997), 72–86.
16. А. М. Вершик, *Счетные группы, близкие к конечным.* В кн.[5] (1973), 112–135.
17. Ф. А. Березин, *Квантование.* Изв. АН СССР, сер мат., **38**, No. 5 (1974), 1116–1175.

Alekseev M. A., Glebskii L. Yu., and Gordon E. I. On approximations of the groups, group actions and Hopf algebras.

Continuing ideas of [15] we give new examples and criterias in the approximation theory.

Нижненовгородский государственный Университет

Поступило 1 июля 1999г.