Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 257, 1999 г.

В. М. Бабич, В. В. Камоцкий

О РАСЧЕТЕ ДИАГРАММЫ НАПРАВЛЕННОСТИ ВОЛНЫ, РАССЕЯННОЙ ВЕРШИНОЙ ПРОИЗВОЛЬНОГО КОНУСА

1. Введение

Эта работа посвящена обоснованию метода вычисления сферической волны, возникающей в результате рассеяния падающей плоской волны конусом.

Рассмотрим задачу дифракции плоской волны $u_{inc}(x,\omega_0) = e^{-ik(x,\omega_0)}$, где $x = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$, $-\omega_0$ – единичный вектор, в направлении которого распространяется волна, на конусе $\Xi = \widetilde{N}\times\mathbb{R}^+$ ($\widetilde{N} \subset S^2$):

$$\begin{cases} (\Delta + k^2)u = o \\ u\big|_{\partial\Xi} = 0 \quad \text{или} \quad \dfrac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\partial\Xi} = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Предположим, $u = u_{inc} + u_{sc}$, где u_{sc} – волна, рассеянная конусом. В результате процесса дифракции появляется сферическая волна, рассеянная вершиной конуса

$$G_{\text{diff}} = 2\pi\frac{e^{ikr}}{kr}\left(f(\omega,\omega_0) + O\left(\frac{1}{kr}\right)\right), \tag{2}$$

где $r = |x|$, $\omega = \frac{x}{|x|}$. В работе [3] В. П. Смышляевым была получена формула для амплитуды рассеяния:

$$f(\omega,\omega_0) = \frac{i}{\pi}\int\limits_\gamma e^{-i\pi\nu} g(\omega,\omega_0,\nu)\nu d\nu. \tag{3}$$

Здесь g – функция Грина оператора $Q_\nu = \widetilde{\Delta} + \nu^2 - \frac{1}{4}$ (где $\widetilde{\Delta}$ – обозначает оператор Бельтрами–Лапласа на S^2), т.е.

$$Q_\nu g(\omega,\omega_0,\nu) = \delta(\omega,\omega_0), \tag{4}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке программы INTAS-RFBR 95-0012.

$$g\Big|_{\partial N} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial g}{\partial n}\Big|_{\partial N} = 0, \tag{5}$$

где $N = S^2 \setminus \widetilde{N}$, а контур интегрирования имеет вид, изображенный на Рис. 1.

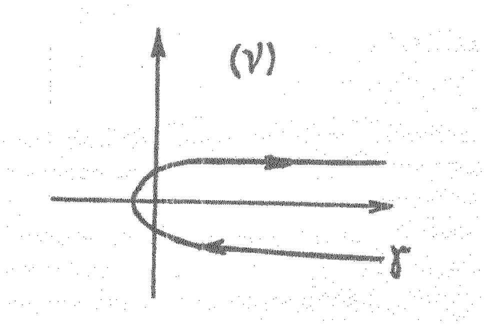

Рис. 1.

Интеграл в (3) не сходится в обычном смысле, но сходится в пространстве распределений $\mathcal{D}'_Q(N)$ (см. [4]), почти всюду f регулярна. Действительно, рассмотрим функцию $\Phi(\omega, \omega_0, s) = \frac{i}{\pi}\int\limits_\gamma e^{-i\nu s} g(\omega, \omega_0, \nu)\nu d\nu$ (тогда $f(\omega, \omega_0) = \Phi(\omega, \omega_0, \pi)$), она является решением гиперболического уравнения:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} - \widetilde{\Delta} + \frac{1}{4}\right)\Phi = 0 \tag{6}$$

с начальными данными

$$\Phi\Big|_{s=0} = \delta(\omega, \omega_0),$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial s}\Big|_{s=0} = A\delta(\omega, \omega_0),$$

где $A = \sqrt{-\widetilde{\Delta} + \frac{1}{4}}$, и краевым условием (5). Согласно теории распространения особенностей [1], $WF(\Phi)$ есть объединение траекторий всех обобщенных бихарактеристик уравнения (6) с началом вида $(\omega_0, 0, \xi, |\xi|)$ в случае, если они (бихарактеристики) имеют конечный порядок касания с границей $T^*(N \times R^+)$. Это условие заведомо выполняется, например, если ∂N аналитична или обладает положительной геодезической кривизной. Предположим справедливость этого условия для данных ω_0 и N. Тогда $\operatorname{sing\,supp} f = \operatorname{sing\,supp} \Phi\big|_{s=\pi}$ описывается следующим образом: пусть $\gamma_\xi(\tau)$ – геодезическая на сфере, такая что $\gamma_\xi(0) = \omega_0$, $\gamma'_\xi(0) = \xi$, продолжим ее за точку достижения границы согласно законам геометрической оптики, и так далее. Тогда $\operatorname{sing\,supp} f = \bigcup_\xi \gamma_\xi(\pi)$.

Таким образом, f почти всюду регулярна, однако формула (3) непригодна для вычислений даже если $\omega \notin \operatorname{sing\,supp} f$. Положим

$$f(\omega, \omega_0, t) = \frac{i}{\pi} \int\limits_\gamma e^{-i\pi\nu - t\nu^2} g(\omega, \omega_0, \nu) \nu d\nu. \tag{7}$$

При $t > 0$ $f(\,\cdot\,, \omega_0, t) \in C^\infty(\overline{N})$ и нетрудно показать (см. [4]), что $f(\,\cdot\,, \omega_0, t) \to f(\,\cdot\,, \omega_0)$ при $t \to 0$ в пространстве распределений, но, что замечательно, в области регулярности f это стремление оказывается стремлением в C^∞. Доказательству этого факта, дающего достаточные основания для вычисления f по формуле (7) при t, близких к 0, посвящена эта работа. Оно получается следствием свойств решений параболического уравнения, которому удовлетворяет $f(\omega, \omega_0, t)$.[1] Действительно, несложные вычисления показывают:

$$Pf = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \widetilde{\Delta}_\omega + \frac{1}{4}\right) f(\omega, \omega_0, t) = 0, \quad \forall t > 0, \tag{8}$$

а ниже мы покажем, что любое гладкое решение $f(\omega, t)$ уравнения (8), стремящееся при $t \to 0$ к некоторому распределению h, стремится к h в C^∞ на $N \setminus \operatorname{sing\,supp} h$. Более того, ниже будет получено асимптотическое разложение для $f(\omega, \omega_0, t)$ при $t \to 0$.

2. Функция Грина оператора теплопроводности

Пусть $Q = -\widetilde{\Delta} + \frac{1}{4}$, B – граничный оператор из (5). Введем в рассмотрение пространство $\mathcal{D}_Q = \{h \in C^\infty(\overline{N}) : \forall n \in \mathbb{Z}\ BQ^n h = 0\}$ – пространство основных функций. Наделим $\mathcal{D}_Q$ топологией, индуцированной полунормами $\|\cdot\,; C^k(\overline{N})\|$. Двойственное к $\mathcal{D}_Q$ пространство распределений обозначим $\mathcal{D}'_Q$.

[1]Авторы выражают глубокую благодарность д-ру ф.-м. наук В. Д. Лукьянову, который посоветовал рассмотреть уравнение вида (8).

Пусть ν_k^2, φ_k – собственные значения и собственные функции Q, тогда

$$G(\omega,\omega_0,t)=\sum_{k=0}^{\infty}e^{-\nu_k^2 t}\varphi_k(\omega)\varphi_k(\omega_0) \tag{9}$$

функция Грина уравнения теплопроводности, т.е. решение следующей задачи:

$$\begin{cases} PG(\omega,\omega_0,t)=\left(\dfrac{\partial}{\partial t}+Q\right)G=0 \quad \forall t>0,\\ G\in C^\infty(N\times N\times(0,\infty)),\\ B_\omega G=0 \quad \forall\omega_0\,\forall t>0,\\ G(\,\cdot\,,\omega_0,t)\to\delta(\omega,\omega_0) \ \text{ в } \ \mathcal{D}'_Q \ \text{ при } \ t\to 0. \end{cases}$$

Предъявим теперь конструктивное построение G, описывающее ее особенность при $t\to 0$. Докажем

Утверждение 1. *Для любых $n>3$ и $\omega_0\in N$ функция $G(\omega,\omega_0,t)$ представима в виде*

$$\begin{aligned} G(\omega,\omega_0,t)&=G_0^{(n)}(\omega,\omega_0,t)\chi^{(n)}(\omega,\omega_0)+G_1^{(n)}(\omega,\omega_0,t)=\\ &=\frac{\exp\left(\frac{-\tau^2(\omega,\omega_0)}{4t}\right)}{4\pi t}\sum_{k=0}^{2n}v_k(\omega,\omega_0)\,t^k\,\chi^{(n)}(\omega,\omega_0)+G_1^{(n)}(\omega,\omega_0,t), \end{aligned} \tag{9'}$$

где $\tau=\operatorname{dist}$, $\chi^{(n)}(\,\cdot\,,\omega_0)\in C_0^\infty(B_{2\delta(\omega_0)}(\omega_0))$ и $\chi^{(n)}(\,\cdot\,,\omega_0)=1$ в $B_\delta(\omega_0)$, а $v_k\in C^\infty(\overline{B}_{2\delta}(\omega_0))$ и $G_1^{(n)}\in C^{2n,n}(\overline{N}\times\overline{N}\times[0,T))$, $G_1^{(n)}(\omega,\omega_0,0)=0$.

Доказательство. На протяжении этого доказательства ω_0 фиксирована. Все v_k определяются с точностью до множителя однозначно из формального выполнения соотношения[2]

$$PG_0^{(\infty)}=\left(\frac{\partial}{\partial t}-\widetilde{\Delta}+\frac14\right)\left(\frac{\exp\left(\frac{-\tau^2}{4t}\right)}{4\pi t}\sum_{k=0}^{\infty}v_k\,t^k\right)=0. \tag{10}$$

Действительно, раскрывая скобки в (10), и приравнивая коэффициенты при степенях t нулю, получим следующие уравнения

[2]Анзац вида (9′) был рассмотрен А. А. Арсеньевым в работе [5].

переноса, которым должны удовлетворять v_k:

$$(\nabla\tau, \nabla v_0)\tau + \frac{\tau\widetilde{\Delta}\tau - 1}{2}v_0 = 0,$$
$$(\nabla\tau, \nabla v_k)\tau + \frac{\tau\widetilde{\Delta}\tau + 2k - 1}{2}v_k = \left(\widetilde{\Delta} - \frac{1}{4}\right)v_{k-1}, \quad \forall\, k \geqslant 1.$$

Записав эти соотношения в сферических координатах (θ, φ), несложно видеть, что существует единственный (с точностью до множителя) набор функций $\{v_k\}_{k=0}^{\infty}$, гладких в окрестности ω_0, удовлетворяющий этим уравнениям:

$$v_0 = C\sqrt{\frac{\tau}{\sin\tau}}\,, \tag{11}$$

$$v_k = \left(\tau^{2k-1}\sin\tau\right)^{-1/2}\int\limits_0^{\tau}\left(s^{2k-3}\sin\right)^{-1/2}\left(\frac{d^2}{ds^2} + \mathrm{ctg} s\frac{d}{ds}\right)v_{k-1}(s)ds,$$
$$\forall\, k \geqslant 1.$$

Из этих формул непосредственно видно, что $v_k(\tau)$ – бесконечно дифференцируемые в некоторой окрестности нуля четные функции, т.е. функции, гладко зависящие от τ^2, и следовательноб $v_k(\tau(\omega, \omega_0))$ – гладкие в некоторой окрестности ω_0 функции.

Определим теперь $\chi^{(n)}(\omega, \omega_0)$ так, чтобы $\{v_k\}_1^{2n}$ были бесконечно гладкими в supp $\chi^{(n)}(\,\cdot\,, \omega_0) \subset B_{2\delta(\omega_0)}(\omega_0)$, а $\chi^{(n)}$ и δ гладко зависели от ω_0 в некоторой ее окрестности.

Константу C в (11) определим из условия $G_0^{(n)}\chi(n) \to \delta(\omega, \omega_0)$ в $\mathcal{D}'_Q$: пусть $\varphi \in \mathcal{D}$, тогда

$$\langle G_0^{(n)}\chi^{(n)}, \varphi\rangle = \int\limits_N G_0^{(n)}(\omega, \omega_0, t)\chi^{(n)}(\omega)\varphi(\omega)d\omega.$$

Переходя к нормальным римановым координатам с началом в ω_0, и учитывая то, что $\tau = |r|$, а $(g_{ij}(\omega_0)) = \mathbb{E}$, находим:

$$\langle G_0^{(n)}\chi^{(n)}, \varphi\rangle = \int\limits_N \frac{\exp\left(\frac{-r^2}{4t}\right)}{4\pi t}\sum_{k=0}^{2n} v_k(r)t^k\chi^{(n)}\varphi\sqrt{g}\,dsdy \to v_0(\omega_0)\varphi(\omega_0),$$

при $t \to 0$; таким образом $C = 1$, и главная часть G построена. $G_1^{(n)}(\omega, \omega_0, t)$ теперь однозначно определится как решение задачи

$$\begin{cases} PG_1^{(n)} = -P\left(G_0^{(n)}\chi^{(n)}\right), \\ BG_1^{(n)} = 0, \\ G_1^{(n)}\big|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

Упомянутая гладкость $G_1^{(n)}$ является следствием общей теоремы о корректной разрешимости начально-краевой задачи для параболических уравнений в пространствах Гельдера (см. [2]). То, что построенная функция будет совпадать с функцией, определяемой рядом (9), следует из теоремы единственности, которую мы докажем ниже. ■

3. Обоснование сходимости $f(\omega, \omega_0, t) \to f(\omega, \omega_0)$

Докажем сначала некоторые вспомогательные утверждения:

Утверждение 2. *Пусть* $F(\omega, t) \in C^{2,1}_{\omega,t}(N \times (0, T))$ *удовлетворяет условиям:*

$$\begin{cases} PF = 0 \ \ \forall t > 0, \\ BF = 0 \ \ \forall t > 0, \\ F(\,\cdot\,, t) \to 0 \ \ \text{в} \ \ \mathcal{D}'_Q \ \ \text{при} \ \ t \to 0, \end{cases}$$

тогда $F = 0$.

Доказательство. Для произвольного k рассмотрим $a_k(t) = \int\limits_N F(\omega, t)\varphi_k(\omega)d\omega$, тогда при $t > 0$

$$\frac{da_k}{dt} = \int\limits_N \frac{\partial F}{\partial t}(\omega, t)\varphi_k(\omega)\,d\omega = \int\limits_N (-QF)\varphi_k\,d\omega =$$

$$= -\int\limits_N (Q\varphi_k)F\,d\omega = -\int\limits_N F\nu^2\,\varphi_k\,F\,d\omega = -\nu_k^2\,a_k,$$

а так как $\varphi_k \in \mathcal{D}_Q$, то получаем, что a_k удовлетворяет

$$\begin{cases} \dfrac{ds_k}{dt} + \nu_k^2\,a_k = 0, \\ a_k(0) = 0, \end{cases}$$

и следовательно $a_k = 0$. Откуда, в силу произвольности k, имеем $F = 0$. ■

Лемма 3. *Для любой* $\psi \in \mathcal{D}_Q$ $\Psi(\omega,t) := \langle\, G(\omega,\omega',t), \psi(\omega')\rangle \to \psi(\omega)$ *в* $\mathcal{D}_Q$ *при* $t \to 0$.

Доказательство. Нетрудно видеть, $\Psi(\omega,t)$ есть решение задачи

$$\begin{cases} P\Psi = 0, \\ B\Psi = 0, \\ \Psi\big|_{t=0} = \psi. \end{cases} \tag{12}$$

А так как $\psi \in C^\infty(\overline{N})$ и краевые условия в (12) влекут выполнение условий согласования бесконечного порядка (в силу $BQ^n\psi = 0$ $\forall n$), то уже упомившаяся теорема о корректной разрешимости гарантирует $\Psi \in C^\infty(\overline{N}\times[0,\infty))$. ■

Теперь мы готовы доказать центральную теорему.

Теорема 4. *Пусть* $f \in \mathcal{D}'_Q$, *тогда существует единственное решение* $\Phi(\omega,t) \in C^\infty(\overline{N}\times(0,\infty))$ *задачи*

$$\begin{cases} P\Phi = \left(\dfrac{\partial}{\partial t} - \widetilde{\Delta} + \dfrac{1}{4}\right)\Phi = 0 \quad \forall\, t > 0, \\ B\Phi = 0 \quad \forall\, t > 0, \\ \Phi(\,\cdot\,,t) \to f \quad \text{в} \quad \mathcal{D}'_Q, \end{cases}$$

причем $\forall\, N' \subset\subset N \setminus \operatorname{sing\,supp} f$

$$\Phi(\,\cdot\,,t)\big|_N \to f\big|_N \quad \text{в} \quad C^\infty \quad \text{при} \quad t \to 0.$$

Доказательство. Докажем существование (единственность мы получим из утверждения 2). Пусть

$$\Phi(\omega,t) = \langle\, f(\omega'), G(\omega,\omega',t)\rangle$$

при $t > 0$. Это определение корректно, поскольку при $t > 0$ $G(\omega,\,\cdot\,,t) \in C^\infty(\overline{N})$ и $B_{\omega'}\,Q^n_{\omega'}\,G = B_{\omega'}\left(-\frac{\partial}{\partial t}\right)^n G = \left(-\frac{\partial}{\partial t}\right)^n B_{\omega'}G = 0$ для любого n, т.е. $G(\omega,\,\cdot\,,t) \in \mathcal{D}_Q$. То, что $\Phi \in C^\infty(\overline{N})$ и $P\Phi = 0$, $B\Phi = 0$ является известным следствием непрерывности распределений (см. [1]).

Покажем $\Phi(\,\cdot\,,t) \to f$ в $\mathcal{D}'_Q$; пусть $\varphi \in \mathcal{D}_Q$, тогда

$$\langle\, \Phi, \varphi\rangle = \langle\, \langle\, f(\omega'), G(\omega,\omega',t)\rangle, \varphi(\omega)\rangle =$$
$$\langle\, f(\omega') \otimes \varphi(\omega), G(\omega,\omega',t)\rangle = \langle\, f(\omega'), \langle\, \varphi(\omega), G(\omega,\omega',t)\rangle\rangle,$$

а из леммы 3 следует $\langle \varphi, G\rangle \to \varphi$ в $\mathcal{D}_Q$, и следовательно $\langle f, \langle \varphi, G\rangle\rangle \to \langle f, \varphi\rangle$, т.е. $\Phi(\,\cdot\,, t) \to f$ в $\mathcal{D}'_Q$.

Докажем второе утверждение теоремы. Пусть $B_{3\varepsilon}(\omega_0) \subset N \setminus \operatorname{sing\,supp} f$, а $\varphi \in C_0^\infty(B_{2\varepsilon}(\omega_0))$ и $\varphi = 1$ на $B_\varepsilon(\omega_0)$. Тогда при $\omega \in B_\varepsilon(\omega_0)$

$$\begin{aligned} \Phi(\omega, t) &= \langle \varphi f, G\rangle + \langle (1-\varphi) f, G\rangle = \\ &= \langle \varphi(\omega') f(\omega'), G(\omega, \omega', t)\rangle + \langle f(\omega'), (1-\varphi(\omega'))G(\omega, \omega', t)\rangle. \end{aligned} \tag{13}$$

Поскольку $\varphi f \in \mathcal{D}_Q$, то, согласно лемме 3, первое слагаемое в (13) стремится к φf в $\mathcal{D}_Q$, и в частности, на $B_\varepsilon(\omega_0)$ стремится к f в C^∞. Покажем теперь, что и второе слагаемое в (13) ничем не хуже. Из вида G ($9'$) легко видеть, что $(1-\varphi(\omega'))G(\omega, \omega', t) \to 0$, при $t \to 0$ со всеми производными по ω, ω' равномерно на $\{(\omega', \omega) : \omega' \in \overline{N}, \omega \in \overline{B}_\varepsilon(\omega_0)\}$, т.е.

$$\forall\, m \, \big\|(1-\varphi(\,\cdot\,))G(\,\cdot\,,\,\cdot\,, t); C^m(\overline{N} \times \overline{B}_\varepsilon(\omega_0))\big\| \to 0 \quad \text{при} \quad t \to 0. \tag{14}$$

Заметим, что имеет место более сильный факт: все (в том числе и по t) производные $(1-\varphi(\omega'))G(\omega, \omega', t)$ стремятся к нулю при $t \to 0$ на том же множестве. Из (14) сразу следует

$$\begin{aligned} &\forall m \, \big\|\langle f(\omega'), (1-\varphi(\omega')G(\omega',\,\cdot\,, t)\rangle; C^m(\overline{B}_\varepsilon(\omega_0))\big\| \leqslant \\ &\leqslant C_f \sum_{|\alpha| \leqslant m} \sup_{\omega \in B_\varepsilon(\omega_0)} \big\|(1-\varphi(\omega'))D^\alpha G(\,\cdot\,, \omega, t); C^m(\overline{N})\big\| \to 0. \end{aligned}$$

Таким образом, $\Phi(\,\cdot\,, t)\big|_{N'} \to f\big|_{N'}$ в C^∞ при $t \to 0$. ■

4. Асимптотическое разложение $f(\omega, \omega_0, t)$

Найдем асимптотическое разложение для $f(\omega, \omega_0, t)$ при $t \to 0$ в области регулярности $f(\omega, \omega_0)$. Пусть $B_\varepsilon(\omega_1) \subset N \setminus \operatorname{sing\,supp} f(\,\cdot\,, \omega_0)$. Согласно сделанному в предыдущем пункте замечанию о соотношении (14), асимптотика f при $t \to 0$ вблизи ω_1 совпадает с асимптотикой интеграла

$$\int\limits_N \varphi(\omega) f(\omega', \omega_0) G(\omega', \omega, t) d\omega',$$

где φ – гладкая срезка в окрестности ω_1, с носителем $N \setminus \operatorname{sing\,supp} f(\,\cdot\,, \omega_0)$. То есть, искомая асимптотика совпадает с асимптотикой решения начально-краевой задачи с гладкими начальными данными, которая, как известно, получается из подстановки в уравнение формального ряда по степеням t.

Таким образом, можно утверждать, что в области регулярности $f(\omega,\omega_0)$

$$f(\omega,\omega_0,t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!}\left(\widetilde{\Delta}_\omega - \frac{1}{4}\right)^k f(\omega,\omega_0)\, t^k.$$

Литература

1. Л. Хермандер, *Анализ линейных дифференциальных уравнений.* т. 1, 3, М. (1987).
2. О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.* М. (1967).
3. V. P. Smyshlyaev, *On the diffraction of waves by cones at high frequencies.* LOMI, Preprint E-9-89, Leningrad.
4. V. M. Babich, D. B. Dement'ev, B. A. Samokish, V. P. Smyshlyaev, *On evaluation of the diffraction coefficients for arbitrary "non-singular" direction of a smooth convex cone.* (в печати).
5. А. А. Арсеньев, *Асимптотика спектральной функции уравнения Шредингера.* — Ж. Выч. Мат. и Мат. Физ. **7** (1967), 1298–1319.

Babich V. M., Kamotski V. V. On computation of the diagram of the wave, scattered by the vertex of a cone of arbitrary shape.

A method of computation (a version of Abel–Poisson method of summation of divergent series) of the diagram of the wave scattered by the vertex of a cone of arbitrary shape is justified. Applying the techniques of parabolic operators it is shown that the approximation, as well as all its derivatives, converges uniformly in the domain of regularity of scattering amplitude.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 26 августа 1998 г.