Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 257, 1999 г.

А. П. Киселев, А. А. Климова

ПЛОСКАЯ ПОПЕРЕЧНАЯ ВОЛНА, ВОЗБУЖДАЕМАЯ В УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ ОСЦИЛЛИРУЮЩИМ НЕРАВНОМЕРНЫМ НОРМАЛЬНЫМ ДАВЛЕНИЕМ

1. Введение

Мы рассматриваем трехмерную задачу о возбуждении упругого полупространства неравномерно распределенным по его поверхности синфазно осциллирующим нормальным давлением. Упругая среда линейна, изотропна и однородна, временна́я зависимость гармоническая, а внешняя нормальная сила распределена гладким образом, причем масштаб ее изменения велик по сравнению с длинами волн. Мы получаем простое выражение для бегущей от границы поперечной волны с плоским фронтом, которая отсутствует, когда давление постоянно.

Большая литература (см. [1, 2] и др.) посвящена рассмотрению дальней зоны, т.е. случаю, когда источники сосредоточены в области размера порядка L, а поле исследуется в области

$$\varkappa L^2/R \ll 1, \quad R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

где $\varkappa$ – волновое число поперечной волны. В этом случае фронты волн, бегущих от излучателя, сферические.

Нас интересует другой, не менее важный для приложений и вызывающий интерес (например, [3–8]), случай ближнего поля,

$$\varkappa \frac{L^2}{R} \gg 1, \tag{1}$$

причем излучатель считается большим сравнительно с длиною волны,

$$\varkappa L \gg 1. \tag{2}$$

Работа поддержана грантом ИНТАС-РФФИ 95-0012 и грантом 589 Федеральной Целевой Программы Интеграция.

При этом фронты, в случае гладкой нагрузки (или, по крайней мере, на некотором горизонтальном удалении от точек негладкости, наличие которых приводит к значительному усложнению картины фронтов (см., например, [8])), можно считать плоскими. Если нагрузка постоянна, то решение задачи совершенно элементарно, и представляет собою плоскую продольную волну, распространяющуюся от границы. При плавно меняющейся нагрузке, как впервые отмечено в [7], для аналогичной плоской задачи, возникает и плоская поперечная волна. Ее описание в трехмерном случае является целью настояшей заметки. Методика [7] основывалась на свертке функции источника с решением классической задачи Лэмба и вела к довольно длинным выкладкам, использовавшим разные модификации метода стационарной фазы. Возникавшее при этом условие на глубину z наблюдателя

$$\varkappa z \gg 1 \tag{3}$$

у нас не появляется. Мы решаем задачу непосредственно методом Фурье, что оказывается короче и проще. Возникающие у нас по ходу дела разложения имеют необычный характер: в них фигурирует преобразование Фурье тейлоровского ряда, т.е. асимптотическое разложение вида

$$p_0\delta(x) + \varepsilon p_1\delta'(x) + \dots, \varepsilon \ll 1, \tag{4}$$

где δ – дельта функция.

2. Краевая задача

Рассматривается поле смещений $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, z)$, удовлетворяющих в полупространстве $z > 0$ уравнению

$$(\lambda + 2\mu)\,\mathrm{grad\ div}\,\mathbf{u} - \mu\,\mathrm{rot\ rot}\,\mathbf{u} + \rho\omega^2\mathbf{u} = 0; \quad z > 0, \tag{5}$$

где λ и μ – параметры Ламе, $\mu > 0$, $3\lambda + 2\mu > 0$, ρ – плотность, ω – круговая частота; λ, μ и ρ постоянны. На границе $z = 0$ отсутствуют касательные напряжения,

$$u_y + v_x = v_z + w_y = 0; \quad z = 0; \tag{6}$$

и задано нормальное,

$$\lambda(u_x + v_y) + (\lambda + 2\mu)w_z = p(x, y); \quad z = 0. \tag{7}$$

Здесь $p(x, y)$ – заданная гладкая функция, о плавности изменения которой будет сказано дальше, а $u = u(x, y, z)$, $v = v(x, y, z)$ и $w = w(x, y, z)$ – компоненты вектора $\mathbf{u}$,

$$\mathbf{u} = \mathbf{e}_x u + \mathbf{e}_y v + \mathbf{e}_z w, \tag{8}$$

$\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ и $\mathbf{e}_z$ – орты осей x, y и z. Гармоническая зависимость поля от времени принимается в виде $\exp(-i\omega t)$, и подразумевается соответствующее ей условие излучения. Мы предполагаем, что

$$\operatorname{grad}_\perp p(x, y) \neq 0, \tag{9}$$

где

$$\operatorname{grad}_\perp = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y}.$$

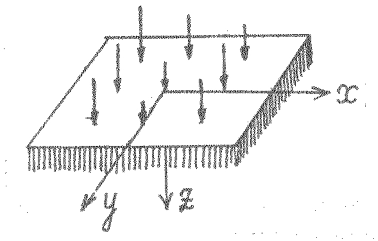

Рис. 1. Геометрия задачи.

3. Малый параметр и асимптотическое упрощение задачи

Если

$$p(x, y) = \text{const}, \tag{10}$$

то решение задачи мгновенно находится в виде

$$\mathbf{u} = \frac{p}{(ik)^2(\lambda + 2\mu)} \operatorname{grad} e^{ikz} = \frac{-ip}{k(\lambda + 2\mu)} e^{ikz} \mathbf{e}_z, \tag{11}$$

где

$$k = \frac{\omega}{a}, \quad a = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \tag{12}$$

k – волновое число продольной волны, а a – ее скорость. В случае (10) поперечной волны нет: ее появление есть эффект отличия функции $p(x, y)$ от константы. Соответствующий малый параметр мы вводим, полагая

$$p(x, y) = P\left(\frac{x}{L}, \frac{y}{L}\right), \tag{13}$$

где L – параметр, характеризующий плавность изменения давления, или характерный масштаб неоднородности. Мы смотрим на L как на большой параметр.

Разложим давление в ряд Тейлора, для определенности, в точке $x = 0$, $y = 0$:

$$p(x, y) = p_0 + \operatorname{grad}_\perp p\big|_{x=0,y=0} \cdot (\mathbf{e}_x x + \mathbf{e}_y y) + \dots . \tag{14}$$

Выберем оси координат так, чтобы ось x была направлена вдоль вектора $\operatorname{grad}_\perp p\big|_{x=0,y=0}$. Для описания интересующего нас эффекта нужно учитывать только два члена тейлоровского ряда для $p(x, y)$:

$$p(x, y) \approx p_0 + p_1 x, \tag{15}$$

где

$$p_1 \mathbf{e}_x = \operatorname{grad}_\perp p\big|_{x=0,y=0}. \tag{16}$$

Мы приходим к приближенной задаче, в которой

$$p(x, y) = P\left(\frac{x}{L}\right). \tag{17}$$

Эта задача, вследствие симметрии относительно оси x, оказывается плоской, т.е. для нее

$$u = u(x, z), \quad v \equiv 0, \quad w = w(x, z). \tag{18}$$

4. Интегралы Фурье

Решение уравнения (5) в случае (18) представляется в виде [9]

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^P + \mathbf{u}^S, \tag{19}$$

$$\mathbf{u}^P = \operatorname{grad} \varphi, \quad \mathbf{u}^S = \operatorname{rot}(\mathbf{e}_y \psi), \tag{20}$$

причем продольный φ и поперечный ψ потенциалы имеют, для выполнения условия излучения, вид

$$\varphi(x, z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} A(\xi) \cdot e^{i(\xi x + \alpha(\xi) z)}\, d\xi, \tag{21}$$

и

$$\psi(x, z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} B(\xi) \cdot e^{i(\xi x + \beta(\xi) z)}\, d\xi, \tag{22}$$

где

$$\alpha(\xi) = \sqrt{k^2 - \xi^2}, \quad \beta(\xi) = \sqrt{\varkappa^2 - \xi^2}. \tag{23}$$

Здесь k, определенное в (12), и $\varkappa$:

$$\varkappa = \frac{\omega}{b}, \quad b = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \tag{24}$$

– волновые числа продольной и поперечной волн (b – поперечная скорость), а $A(\xi)$ и $B(\xi)$ определяются из граничных условий (6) и (7), дополненных (18). Для нахождения A и B разложим функцию $p(x, y)$ в интеграл Фурье

$$p(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{p}(\xi)\, e^{i\xi x}\, d\xi, \quad \widehat{p}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\, e^{-i\xi x}\, dx. \tag{25}$$

Вследствие известной, [10], формулы

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x}\, dx = \delta(\xi), \tag{26}$$

$\widehat{p}$ разлагается по степеням $1/L$ следующим образом

$$\widehat{p}(\xi) = p_0 \delta(\xi) + p_1 \frac{i}{L}\, \delta'(\xi) + \dots . \tag{27}$$

Из (6) и (7) вытекает, что

$$A(\xi) = \frac{\beta^2 - \xi^2}{\Delta(\xi)}\, \widehat{p}(\xi), \tag{28}$$

$$B(\xi) = \frac{2\alpha\xi}{\Delta(\xi)}\, \widehat{p}(\xi), \tag{29}$$

где $\Delta(\xi)$ – обычный рэлеевский знаменатель,

$$\Delta(\xi) = \left(-\lambda\xi^2 - (\lambda + 2\mu)\alpha^2\right)(\beta^2 - \xi^2) - 4\alpha\beta\mu\xi^2. \tag{30}$$

Отметим, что при малых ξ

$$\Delta(\xi) = -(\lambda + 2\mu)k^2\varkappa^2 + O(\xi^2). \tag{31}$$

5. Асимптотики интегралов

В отличие от дальней зоны, где поле определяется стационарными точками фазовых функций интегралов (21), (22), см. [1, 2], ближняя зона описывается поведением подынтегральных функций в окрестности начала координат. Перейдем в интеграле для φ к переменной

$$\eta = \xi L,$$

$$\varphi(x,z) = \frac{1}{L}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\eta\frac{x}{L}} \cdot e^{iz\sqrt{k^2-\eta^2/L^2}} \cdot \frac{\varkappa^2 - 2\frac{\eta^2}{L^2}}{\Delta(\frac{\eta}{L})} \cdot \widehat{p}\left(\frac{\eta}{L}\right)\, d\eta.$$

При условии, что

$$\frac{kL^2}{z} \gg 1,$$

получим:

$$\varphi(x,z) =$$

$$= \frac{-e^{ikz}}{(\lambda+2\mu)k^2}\cdot\frac{1}{L}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\eta\frac{x}{L}} \cdot \widehat{p}\left(\frac{\eta}{L}\right)\cdot\left(1 + O(\eta^2/(k^2L^2)) + O(\eta^2/L^2)\right)\, d\eta.$$

Отбрасывание остаточных членов соответствует условиям (1) и (2). Заменив $\widehat{p}$ на его асимптотику (27), придем к следующему:

$$\varphi(x,z) \approx \frac{-p_0}{(\lambda+2\mu)k^2}\, e^{ikz}. \tag{32}$$

Отсюда

$$\mathbf{u}^P \approx \frac{-ip_0}{(\lambda+2\mu)k}\, e^{ikz}\, \mathbf{e}_z. \tag{33}$$

Асимптотика продольной волны (33) совпадает с (11) при $p = p_0$.

Старший член асимптотики поперечной волны аннулируется, поскольку предэкспоненциальный множитель (29) в (22) имеет при $\xi = 0$ простой нуль, а, как известно, [10],

$$\xi\delta(\xi) = 0. \tag{34}$$

Главный вклад в интеграл дает второй член разложения (27). Воспользуемся формулой

$$\xi\delta'(\xi) = (\xi\delta(\xi))' - \delta(\xi) = -\delta(\xi). \tag{35}$$

Учитывая (31), легко видеть, что линейная по ξ часть подынтегрального выражения в (22) возникает при разложении экспоненты. Поэтому

$$\psi \approx \frac{2ip_1}{(\lambda+2\mu)k\varkappa^2}\, e^{i\varkappa z}, \tag{36}$$

откуда

$$\mathbf{u}^S \approx \frac{p_1}{\lambda+2\mu}\cdot\frac{2i}{\varkappa^2 k}\cdot \operatorname{rot}\,\left(\mathbf{e}_y\, e^{i\varkappa z}\right) = \frac{p_1}{\lambda+2\mu}\cdot\frac{2}{k\varkappa}\cdot e^{i\varkappa z}\,\mathbf{e}_x. \tag{37}$$

6. Обобщение

При отказе от специального выбора координатных осей (x, y), в формулах (33), (36), (37) произойдут очевидные изменения: p_0 на $p(x, y)$ и $p_1\mathbf{e}_x$ на $(\,\mathrm{grad}_\perp\, p)\times\mathbf{e}_z$.

Далее, разложение (14) и все дальнейшие выкладки можно, с тем же успехом, производить не в точке $(0,0)$, а в любой точке (x, y). При этом вместо $p_0 = p(0,0)$ и $\mathrm{grad}_\perp\, p\big|_{(0,0)}$ будем иметь $p(x, y)$ и $\mathrm{grad}_\perp\, p(x, y)$. В результате, для продольной и поперечной волн получим соответственно

$$\mathbf{u}^P(x, y, z) \approx \frac{-ip(x,y)}{(\lambda+2\mu)k}\, e^{ikz}\,\mathbf{e}_z, \tag{38}$$

и

$$\mathbf{u}^S(x, y, z) \approx \frac{1}{\lambda+2\mu}\,\frac{2}{k\varkappa}\left[\,\mathrm{grad}_\perp\, p(x,y)\times\mathbf{e}_z\right]\, e^{i\varkappa z}. \tag{39}$$

7. Обсуждение

Отметим, что частотная зависимость для $\mathbf{u}^S$ отличается от таковой для $\mathbf{u}^P$ множителем $1/(-i\omega)$. Поэтому для соответствующей нестационарной задачи форма импульса в поперечной волне оказывается интегралом от формы импульса в продольной.

8. Благодарность

Первый автор сохраняет теплые воспоминания о своем визите, поддержанном Королевским обществом, в Лондонский университет Саут Банк, где он столкнулся к тематикой, затронутой в этой статье.

Литература

1. G. F. Miller, H. Pursey, *The field and radiation impedance of mechanical radiators on the free surface of a semi-infinite isotropic solid.* — Proc. Roy. Soc. London, Ser. A **227** (1954), 521–541.

2. В. Т. Гринченко, В. В. Мелешко, *Гармонические колебания в упругих телах.* Наукова думка, Киев (1981).
3. C. F. Ying, *Photoelastic visualisation and theoretical analysis of scattering in solids.* Ultrasonic measurments methods, Academic Press, Boston (1990), pp. 291–343.
4. H. Djelouah, J. C. Baboux, *Transient ultrasonic field radiated by a circular transducer in a solid medium.* — J. Acoust. Soc. Am. **92, No. 5** (1990), 2932–2941.
5. X. M. Tang, M. N. Toksöz, C. H. Cheng, *Elastic wave radiation and diffraction by piston source.* — J. Acoust. Soc. Am. **87, No. 5** (1990), 1894–1902.
6. А. С. Зильберглейт, *О динамических осесимметричных задачах для упругого слоя.* — ЖТФ **62, No. 3** (1992), 95–99.
7. А. П. Киселев, Е. Крылова, Л. Ю. Фрадкин, *Возбуждение квазиплоской поперечной волны поверхностным акустическим источником, создающим нормальные напряжения.* — Письма в ЖТФ **23, No. 23** (1997), 91–94.
8. L. Ju. Fradkin, A. P. Kiselev, E. Krylova, *The radiating near-field asymptotics of a normal time-harmonic circular ultrasonic transducer in an elastic half-space.* — J. Acoust. Soc. Am. **104, No. 3** (1998), 1178–1187.
9. В. Новацкий, *Теория упругости.* Мир, М. (1975).
10. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, *Обобщенные функции и действия над ними.* Физматгиз, М. (1959).

Kiselev A. P., Klimova A. A. Plane shear wave emitted into elastic half space by an oscillating nonuniform normal pressure.

Excitation of an elastic half space by an oscillating normal load nonuniformly distributed over its surface is considered. The medium is assumed to be linear, isotropic and homogeneous. Exterior load distribution is smooth and the scale of its variation is small compared to wave lengths. A simple expression is found describing the shear wave with a plane front running away from the surface. This wave vanishes when the load is taken uniform.

Институт проблем
машиноведения РАН
Санкт-Петербургский государственный
университет телекоммуникаций
им. М. А. Бонч-Бруевича

Поступило 15 ноября 1998 г.