Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 257, 1999 г.

Ю. В. Киселев, В. Н. Троян

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОССТАНОВЛЕНИЯ СКОРОСТНЫХ ПАРАМЕТРОВ УПРУГИХ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ МЕТОДОМ ДИФРАКЦИОННОЙ ТОМОГРАФИИ

В настоящей работе, являющейся продолжением работы [1], выполнено численное моделирование восстановления упругих параметров (λ, μ) и массовой плотности (ρ) локальной неоднородности простой и сложной геометрии, расположенной в идеальном упругом пространстве. Проводится сравнение с результатами, полученными в случае кусочно-однородной опорной среды. Прямая $P - SV$-задача решается конечно-разностным методом. Обратная задача решается методом дифракционной томографии с использованием приближения Борна [2, 3].

В отличие от работы [1], где восстановление параметров осуществлялось в предположении известной связи между искомыми параметрами (λ, μ, ρ), в данной работе такие параметры восстанавливаются в предположении линейной связи между ними с неизвестными, подлежащими определению коэффициентами, что позволяет восстанавливать возмущение скорости и находить величину отношения скоростей распространения поперечных волн к продольным. При этом используются x- и z-компоненты волнового поля, полученные для 9-и пар источник-точка наблюдения (3 источника и 3 точки наблюдения). Восстановление параметров среды осуществляется применением прямого и оптимизационного подходов.

Одним из основных вопросов при решении обратных задач на восстановление параметров среды является вопрос о точности и разрешающей способности. Для этих целей широко применяется метод численного моделирования.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 96-05-65904) и Министерства высшего и специального образования (проект “Трехмерная дифракционная томография и решение интерпретационных сейсмических задач”)..

В работах [4–6] при численном моделировании прямая задача рассеяния на неоднородностях среды решается в приближении Борна. Точное решение задачи рассеяния электромагнитных волн на цилиндре используется в работе [7] для оценивания точности приближений Борна и Рытова при восстановлении параметров среды. Синтетические данные в работах [8, 9] получены конечно-разностным методом для двумерной акустической задачи. “Раздельное” восстановление упругих параметров рассмотрено в работе [10] с использованием обобщенного преобразования Радона, при этом численное моделирование выполнено для акустической задачи с использованием 80-и источников и 80-и точек наблюдения.

1. Основные уравнения и алгоритм восстановления параметров среды

Численное моделирование для определения параметров локальных неоднородностей с плавным изменением упругих параметров λ, μ и массовой плотности ρ проводится для двумерной модели упругого пространства.

Источник сейсмических колебаний $\vec{\hat{f}} \equiv \vec{\hat{f}}(\vec{x},t)$, расположенный в точке $(x = x_s,\ z = z_s)$ декартовой системы координат $(x,y,z;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ возбуждает волновое поле $\vec{\varphi} \equiv \vec{\varphi}(x,z,t) \equiv \vec{\varphi}(\vec{x},t)$, удовлетворяющее уравнению

$$\begin{aligned}&\rho\frac{\partial^2\vec{\varphi}}{\partial t^2} = \vec{\hat{f}} + \\ &+ (\lambda+\mu)\vec{\nabla}\vec{\nabla}\cdot\vec{\varphi} + \mu\Delta\vec{\varphi} + \vec{\nabla}\lambda\vec{\nabla}\cdot\vec{\varphi} + \vec{\nabla}\mu\times\vec{\varphi} + 2(\vec{\nabla}\mu\cdot\vec{\nabla})\vec{\varphi}.\end{aligned} \tag{1}$$

Волновое поле $\vec{\varphi}$ возбуждается плотностями сил $\vec{\hat{f}}$, $\vec{\hat{f}}_1$, $\vec{\hat{f}}_3$ вида

$$\begin{aligned}\vec{\hat{f}} &\equiv \vec{\hat{f}}(x_s,z_s,t) = -f(t)\vec{\nabla}\delta(\vec{x}-\vec{x}_s),\\ \vec{\hat{f}}_1 &\equiv \vec{\hat{f}}_1(x_r,z_r,t) = \delta(\vec{x}-\vec{x}_r)\delta(t)\vec{e}_1,\\ \vec{\hat{f}}_3 &\equiv \vec{\hat{f}}_3(x_r,z_r,t) = \delta(\vec{x}-\vec{x}_r)\delta(t)\vec{e}_3,\end{aligned} \tag{2}$$

с временными зависимостями $f(t)$ и $\delta(t)$, расположенными в точке возбуждения $\vec{x}_s = (x_s, z_s)$ и приема $\vec{x}_r = (x_r, z_r)$. Скорости распространения продольной (v_p) и поперечной (v_s) волн выражаются через величины λ, μ, ρ, следующим образом

$$v_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad v_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \tag{3}$$

Кратко, следуя [2, 3, 1], опишем алгоритм решения обратной задачи. Волновое поле $\vec{\varphi}(\vec{x}, t)$ в искомой упругой среде $(\lambda(\vec{x}), \mu(\vec{x}), \rho(\vec{x}))$ дается решением уравнения

$$\begin{gathered} L\vec{\varphi} = -\vec{\hat{f}}, \quad L\vec{\varphi} = (\lambda + \mu)\vec{\nabla}\vec{\nabla} \cdot \vec{\varphi} + \\ + \mu\Delta\vec{\varphi} + \vec{\nabla}\lambda\vec{\nabla} + \vec{\nabla}\mu \times \vec{\varphi} + 2(\vec{\nabla}\mu \cdot \vec{\nabla})\vec{\varphi} - \rho\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}, \end{gathered} \tag{4}$$

при этом полагается известной опорная среда $(\lambda_0(\vec{x}),\ \mu_0(\vec{x}),\ \rho_0(\vec{x}))$, волновое поле $\varphi_0(\vec{x}, t)$ в которой удовлетворяет уравнению

$$\begin{gathered} L_0\vec{\varphi}_0 = -\vec{\hat{f}}, \quad L_0\vec{\varphi}_0 = (\lambda_0 + \mu_0)\vec{\nabla}\vec{\nabla} \cdot \vec{\varphi}_0 + \\ + \mu_0\Delta\vec{\varphi}_0 + \vec{\nabla}\lambda_0\vec{\nabla} \cdot \vec{\varphi}_0 + \vec{\nabla}\mu_0 \times \vec{\varphi}_0 + 2(\vec{\nabla}\mu_0 \cdot \vec{\nabla})\vec{\varphi}_0 - \rho_0\frac{\partial^2\vec{\varphi}_0}{\partial t^2}. \end{gathered} \tag{5}$$

Величины $\delta\lambda = \lambda - \lambda_0$, $\delta\mu = \mu - \mu_0$ и $\delta\rho = \rho - \rho_0$ отличны от нуля в ограниченных пространственных областях. Полагая величины $\delta\lambda$, $\delta\mu$ и $\delta\rho$ малыми можно записать приближенное равенство (приближение Борна)

$$L_0\delta\vec{\varphi} \approx -\delta L\vec{\varphi}_0, \tag{6}$$

где $\delta\vec{\varphi} = \vec{\varphi} - \vec{\varphi}_0$ – разностное поле, а величина $\delta L\vec{\varphi}$

$$\begin{gathered} \delta L\vec{\varphi}_0 = \vec{\nabla} \times (\delta\mu\vec{\nabla} \times \vec{\varphi}_0) + 2\sum_{j=1,3} \vec{\nabla} \cdot (\delta\mu\vec{\nabla}\varphi_{0j})\vec{e}_j + \\ + \vec{\nabla}(\delta\lambda\vec{\nabla} \cdot \vec{\varphi}_{0j} + \vec{\nabla}(\delta\lambda\vec{\nabla} \cdot \vec{\varphi}_0) - \delta\rho\frac{\partial^2\vec{\varphi}_0}{\partial t^2} \end{gathered} \tag{7}$$

может рассматриваться как источник такого поля.

Представим компоненты разностного поля $\delta\varphi_i$ из (6) в точке наблюдения $\vec{x} = \vec{x}_r$ в виде

$$\delta\varphi_i(\vec{x}_s, \vec{x}_r, t) = \int_S \int_0^\infty \vec{\tilde{\varphi}}(\vec{x}, \vec{x}_r, t - \tau) \cdot \delta L\vec{\varphi}(\vec{x}, \vec{x}_s, \tau)d\tau\, d\vec{x}, \tag{8}$$

где внешнее интегрирование осуществляется по некоторой области S, содержащей источник разностного поля (7), а $\vec{\varphi} \equiv \vec{\varphi}(\vec{x}, \vec{x}_s, t)$ и $\vec{\tilde{\varphi}} \equiv \vec{\tilde{\varphi}}_i(\vec{x}, \vec{x}_r, t)$ удовлетворяют соответственно уравнениям (с источниками из (2))

$$L_0 \vec{\varphi} = -\vec{\hat{f}} \tag{9}$$

и

$$L_0 \vec{\tilde{\varphi}}_i = -\vec{\hat{f}}_i \quad (i = 1, 3). \tag{10}$$

Вводя томографические функционалы

$$p_i^{\rho}(\vec{x}, \vec{x}_r, \vec{x}_s, t) = -\int\limits_0^{\infty} \vec{\tilde{\varphi}}_i(\vec{x}, \vec{x}_r, t - \tau) \cdot \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \vec{\varphi}(\vec{x}, \vec{x}_s, \tau) d\tau,$$

$$p_i^{\lambda}(\vec{x}, \vec{x}_s, \vec{x}_r, t) = -\int\limits_0^{\infty} \vec{\nabla} \cdot \vec{\tilde{\varphi}}_i(\vec{x}, \vec{x}_r, t - \tau) \vec{\nabla} \cdot \vec{\varphi}(\vec{x}, \vec{x}_s, \tau) d\tau,$$

$$p_i^{\mu}(\vec{x}, \vec{x}_s, \vec{x}_r, t) = +\int\limits_0^{\infty} [\vec{\nabla} \times \vec{\tilde{\varphi}}_i(\vec{x}, \vec{x}_r, t - \tau) \cdot \vec{\nabla} \times \vec{\varphi}(\vec{x}, \vec{x}_s, \tau) -$$

$$-2 \sum_{j=1,3} \vec{\nabla} \tilde{\varphi}_{ij}(\vec{x}, \vec{x}_r, t - \tau) \cdot \vec{\nabla} \varphi_j(\vec{x}, \vec{x}_s, \tau)] d\tau, \tag{11}$$

компоненты разностного поля $\delta\varphi_i$ (8) можно записать в виде

$$\delta\varphi_i(\vec{x}_s, \vec{x}_r, t) = \int\limits_S [\delta\lambda(\vec{x}) p_i^{\lambda}(\vec{x}, \vec{x}_s, \vec{x}_r, t) + \delta\mu(\vec{x}) p_i^{\mu}(\vec{x}, \vec{x}_s, \vec{x}_r, t) +$$

$$+\delta\rho(\vec{x}) p_i^{\rho}(\vec{x}, \vec{x}_s, \vec{x}_r, t)] d\vec{x}. \tag{12}$$

Отметим, что величины p_i^{λ}, p_i^{ρ} и p_i^{μ} получены в [2, 3] в предположении локального характера отличий $(\delta\lambda, \delta\mu, \delta\rho)$ параметров искомой среды λ, μ, ρ от параметров опорной среды λ_0, μ_0, ρ_0.

Величины $\delta\lambda$, $\delta\mu$, $\delta\rho$ будем находить, решая интегральное уравнение (12) в предположении линейной связи между искомыми параметрами

$$\delta\lambda(\vec{x}) = c_{\lambda} \delta\mu(\vec{x}), \quad \delta\rho(\vec{x}) = c_{\rho} \delta\mu(\vec{x}). \tag{13}$$

Теперь (12) можно записать в виде

$$\delta\varphi_i(\vec{x}_s, \vec{x}_r, t) = \int\limits_S [c_\lambda(\vec{x}) p_i^\lambda(\vec{x}, \vec{x}_s, \vec{x}_r, t) + p_i^\mu(\vec{x}, \vec{x}_s, \vec{x}_r, t) +$$

$$+ c_\rho(\vec{x}) p_i^\rho(\vec{x}, \vec{x}_s, \vec{x}_r, t)] \delta\mu(\vec{x}) d\vec{x}. \tag{14}$$

В случае известных значений c_λ и c_ρ, например, когда параметры среды удовлетворяют эмпирической зависимости [11, 1], после дискретизации интегрального уравнения (14), получаем систему линейных уравнений относительно вектора $\vec{\delta}_\mu$ искомых значений $\delta\mu(\vec{x})$

$$P\vec{\delta}_\mu = \vec{\delta}_\varphi, \tag{15}$$

где $\vec{\delta}_\varphi$ – временные отсчеты компонент волнового поля рассеянного неоднородностью. Решение системы линейных уравнений (15) находим, минимизируя сумму квадратов расхождения левой и правой частей (15), что с учетом принятой регуляризации приводит к следующей системе линейных уравнений

$$[P'P + \alpha_1(B_x' B_x + B_z' B_z) + \alpha_2 C'C + \alpha_3 D'D]\vec{\delta}_\mu = P'\vec{\delta}_\varphi. \tag{16}$$

В (16) α_1, α_2, α_3 – регуляризующие коэффициенты, B_x и B_z – конечно-разностные аналоги вторых частных производных соответственно по переменным x и z, C и D – "штрафные" матрицы на ненулевые значения искомых величин ($\vec{\delta}_\mu$) в граничных точках и в окрестности граничных точек исследуемой области S соответственно.

Минимизация квадратов разностей левой и правой частей (15), как будет показано ниже, позволяет находить также c_λ и c_ρ. При этом мы многократно решаем систему уравнений (16), а минимум такого расхождения (и отвечающие ему значения c_λ, c_ρ) находим градиентным методом.

Возможность нахождения упругих параметров λ, μ и массовой плотности ρ и, как следствие, восстановление возмущений скоростных параметров, обусловлено ярко выраженными различиями пространственного характера рассеяния возмущениями таких параметров. В работе [1] были выписаны формулы для томографических функционалов p_i^ρ, p_i^λ, p_i^μ (11) в виде лучевого ряда

$$p_i^\rho = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{q=p,s} \sum_{q'=p,s} p_{iqq'j}^\rho \phi_j(t - \tilde{\tau}_q - \tau_{q'}),$$

$$p_i^\lambda = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{q=p,s} \sum_{q'=p,s} p_{iqq'j}^\lambda \phi_j(t - \tilde{\tau}_q - \tau_{q'}),$$

$$p_i^\mu = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{q=p,s} \sum_{q'=p,s} p_{iqq'j}^\mu \phi_j(t - \tilde{\tau}_q - \tau_{q'}),$$

$$\phi_j(t) = \phi'_{j+1}(t), \quad \phi_0(t) = \frac{d^2}{dt^2} \int_0^\infty \tilde{f}_0(t-\tau) f_0(\tau) d\tau, \tag{17}$$

при этом амплитудные множители $p_{iqq'j}^\lambda$, $p_{iqq'j}^\mu$, $p_{iqq'j}^\rho$ для нулевых членов $(j = 0)$ записываются следующим образом

$$\begin{aligned} p_{iqq'0}^\rho &= -(\vec{\tilde{A}}_{iq0} \cdot \vec{A}_{q'0}), \\ p_{iqq'0}^\lambda &= -(\vec{\tilde{A}}_{iq0} \cdot \vec{\nabla}\tilde{\tau}_q)(\vec{A}_{q'0}) \cdot \vec{\nabla}\tau_{q'}), \\ p_{iqq'0}^\mu &= [\vec{\nabla}\tilde{\tau}_q \times \vec{\tilde{A}}_{iq0}] \cdot [\vec{\nabla}\tau_{q'} \times \vec{A}_{q'0}] - 2(\vec{\tilde{A}}_{iq0} \cdot \vec{A}_{q'0})(\vec{\nabla}\tilde{\tau}_q \cdot \vec{\nabla}\tau_{q'}). \end{aligned} \tag{18}$$

В (17), (18) величины $\vec{A}_{q'0}$, $\vec{\tilde{A}}_{iq0}$ и временные функции $\tilde{f}_j(t)$, $f_j(t)$ определяются лучевыми разложениями для полей $\vec{\tilde{\varphi}}_i(\vec{x}, \vec{x}_r, t)$, $\vec{\varphi}(\vec{x}, \vec{x}_s, t)$ (из (9), (10))

$$\vec{\tilde{\varphi}}_i(\vec{x}, \vec{x}_r, t) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{q=p,s} \vec{\tilde{A}}_{iqj}(\vec{x}, \vec{x}_r, t) \tilde{f}_j(t - \tilde{\tau}_q),$$

$$\vec{\varphi}(\vec{x}, \vec{x}_s, t) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{q=p,s} \vec{A}_{qj}(\vec{x}, \vec{x}_s, t) f_j(t - \tau_q),$$

$$f_j(t) = f'_{j+1}(t), \quad \tilde{f}_j(t) = \tilde{f}'_{j+1}(t), \tag{19}$$

где $\tilde{\tau}_q \equiv \tilde{\tau}_q(\vec{x}, \vec{x}_r)$ $(\tau_q \equiv \tau_q(\vec{x}, \vec{x}_s))$ – время распространения волны от точки $\vec{x}_r$, $(\vec{x}_s)$ до точки $\vec{x}$.

На рис. 1 представлены нормированные абсолютные значения смещений волн, рассеянных элементарными возмущениями среды

$\delta\rho$ и $\delta\mu$,[1] полученные с использованием формул (17), и, описывающие процесс рассеяния в дальней зоне. Диаграмма рассеяния от элементарного возмущения упругого модуля $\delta\lambda$ является изотропной и формируется только pp-волной.

2. Численное моделирование восстановления скоростных параметров упругих неоднородностей

Для решения прямой задачи (1) используются явная разностная схема на прямоугольной сетке с одинаковым шагом по пространственным переменным [12]. Пространственные производные, входящие в уравнение (1), аппроксимируются с погрешностью порядка $O(h^4)$, где h – размер ячейки по пространственным координатам x и z. Временная производная из (1) аппроксимируется с погрешностью порядка $O(l^2)$, где l – величина шага по времени.

Зависимость воздействия точечного источника (2), (9) от времени t имеет вид функции Риккера [11] со спектральной функцией

$$F(\omega) = \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \exp\left\{-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right\} \exp\left\{-\frac{i2\pi\omega}{\omega_0}\right\}, \qquad (20)$$

при этом кажущаяся частота f_0 полагается равной $f_0 = \omega_0/2\pi =$ 50Гц.

Точность применяемой конечно-разностной схемы в однородном пространстве оценивалась сравнением с методом контурных интегралов [14]. В случае величины шага по времени $l = 0.0005$ (40 отсчетов на кажущийся период $T_0 = 1/f_0$), используемом при численном моделировании, величина относительного расхождения между результатами вычислений волнового поля не превышала 2-3%. Точность вычисления волнового поля, рассеянного локальной неоднородностью, оценивалась по внутренней сходимости. При этом отличие от величин волновых полей, вычисленных с шагом $l = 0.00025$ (80 отсчетов на кажущийся период $T_0 = 1/f_0$) не превышало 5%.

---

[1] Аналогичные диаграммы рассеяния, в том числе и для рассеяния s-волны, с многочисленными иллюстрациями процесса рассеяния упругих волн в приближении Борна можно найти в работе [13].

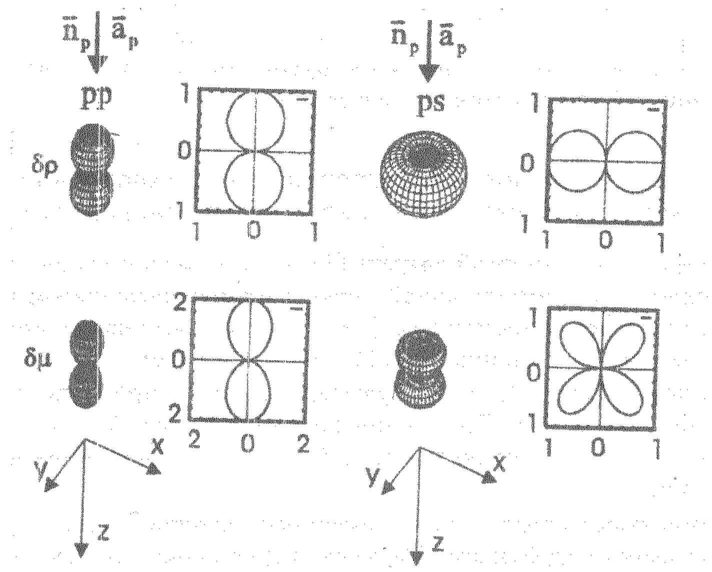

Рис. 1. Диаграммы рассеяния p-волны элементарными возмущениями параметров $(\delta\rho, \delta\mu)$ среды. $\vec{n}_p$ и $\vec{a}_p$ – соответственно нормаль к фронту и амплитудный множитель падающей плоской продольной волны. Даны трехмерное представление нормированных абсолютных величин смещений и их сечение в плоскости (x, z).

Возмущение упругих параметров среды задается формулой

$$\delta\mu(\vec{x}) = \begin{cases} 0.25\mu_m \left[1 + \cos\left(\pi \frac{x-\hat{x}}{\Delta_x}\right)\right] \left[1 + \cos\left(\pi \frac{z-\hat{z}}{\Delta_z}\right)\right] & |x-\hat{x}| < \Delta_x \text{ и } |z-\hat{z}| < \Delta_z, \\ 0 & |x-\hat{x}| > \Delta_x, \text{ или } |z-\hat{z}| > \Delta_z \end{cases} \qquad (21)$$

где $(\hat{x}, \hat{z})$ – положение максимального μ_m значения отклонения величины $\mu(\vec{x})$ от значения $\mu_0(\vec{x})$ в опорной модели, а Δ_x и Δ_z – характеризуют размер такой неоднородности в горизонтальном $(\vec{e}_1)$ и вертикальном $(\vec{e}_3)$ направлениях соответственно. При этом величины $\delta\lambda$ и $\delta\rho$ задаются в соответствие с эмпирической зависимостью [11, 1].

Прежде, чем перейти к рассмотрению результатов численного моделирования, сделаем несколько замечаний. Для решения обратной задачи на определение параметров локальных неоднородностей используются данные наблюдений на линейном профиле, см., рис. 2, 3. Квадраты S на рис. 2, 3 – области восстановления параметров среды. Более темным цветом отмечено расположение неоднородностей.

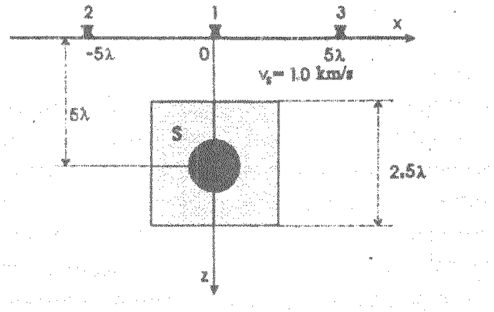

Рис. 2. Схема наблюдений и 1-я модель неоднородности. 1, 2, 3 – точки наблюдения и возбуждения волнового поля; S – область восстановления параметров среды; $\lambda \equiv \lambda_s = 0.02$км.

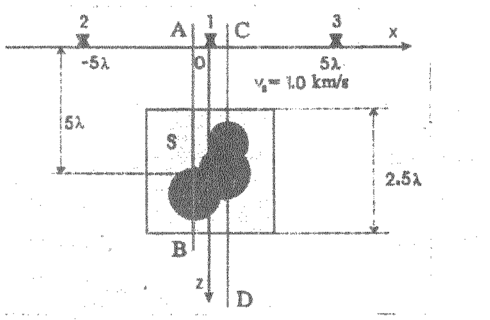

Рис. 3. Схема наблюдений и 2-я модель неоднородности. Обозначения те же, что на рис. 2.

Система линейных уравнений (16) всегда решается при ненулевых значениях регуляризующего коэффициента α_1. Как показали численные эксперименты, условие гладкости восстанавливаемых параметров среды, задаваемое по вторым производным обеспечивает существенно лучший результат, чем аналогичное применение первых производных, а дополнительная регуляризация с использованием “штрафных функций” на ненулевые значения в граничных точках области восстановления параметров среды S и вблизи граничных точек, может использоваться для введения априорной информации о размерах и местонахождении восстанавливаемой неоднородности. Как показали численные эксперименты, при недостаточном объеме входных данных, введение такого рода априорной информации способно привести к существенному повышению качества восстановления. Выбор параметра регуляризации α_1 не вызывает затруднений, поскольку в большом диапазоне его изменения (2–3 порядка) после перехода от плохой обусловленности системы (16), восстанавливаемая функция оказывается очень стабильной, лишь, при увеличении α_1, с небольшой тенденцией к большей гладкости.

Схема наблюдения и расположение 1-й модели неоднородности даны на рис. 2. Неоднородность, задаваемая формулой (21) расположена в упругом пространстве со скоростью распространения продольных волн $v_p = 1.73$км/с ($v_s = 1.0$км/с, $\gamma = v_s/v_p = 1/\sqrt{3}$, $\rho_0 = 2$, $\mu_0 = 2$), на удалении от линии наблюдения и возбуждения волнового поля $z = 5\lambda_s$ ($\hat{x} = 0$, $\hat{z} = 5\lambda_s = 0.1$км), размеры неоднородности Δ_x и Δ_z из (21) равны $\Delta_x = \Delta_z = \lambda_s/2 = 0.01$км. Схема наблюдения и расположение 2-й модели неоднородности представлены на рис. 3. Неоднородность из рис. 3 – результат суперпозиции трех моделей (21) со следующими координатами экстремальных точек $\hat{x}_i$, $\hat{z}_i$ ($i = 1, 2, 3$)

$$\begin{aligned}
&\hat{x}_1 = \hat{x}_0 - 0.25\lambda_s, \quad \hat{z}_1 = \hat{z}_0 + 0.6\lambda_s \quad (\Delta_x = \Delta_z = 0.5\lambda_s),\\
&\hat{x}_2 = \hat{x}_0 + 0.25\lambda_s, \quad \hat{z}_2 = \hat{z}_0 + 0.1\lambda_s \quad (\Delta_x = \Delta_z = 0.5\lambda_s),\\
&\hat{x}_3 = \hat{x}_0 + 0.25\lambda_s, \quad \hat{z}_3 = \hat{z}_0 - 0.5\lambda_s \quad (\Delta_x = \Delta_z = 0.45\lambda_s),
\end{aligned}$$

$$\hat{x}_0 = 0, \quad \hat{z}_0 = 5.0\lambda_s. \tag{22}$$

Численное моделирование проводилось для максимального возмущения скорости продольных волн $\delta v_{p\,\max} = 0.34$км/с ($\delta v_{s\,\max} = 0.2$), при этом $\mu_m = \delta\mu_{\max}$ из (21) равно 1.0 ($\delta\lambda_{\max} = \delta\mu_{\max}$, $\delta\rho_{\max} = 0.093$). Число узлов в исследуемой области S (квадрат со сторонами, равными $2.5\lambda_s$, см., рис. 2, 3) равно 25×25. Приведенные ниже примеры восстановления параметров неоднородностей получены по двум (x- и z-) компонентам волнового поля “измеренного” в точках 1, 2, 3 (рис. 2, 3), возбужденного источниками, расположенными в этих же точках (9 пар источник-приемник, $\delta v_{p\,\max} = 0.34$км/с). Модельное и восстановленное значения δv_p (отвечающие модели неоднородности (21)) на вертикальном профиле ($x = 0$, см. рис. 2) даны на рис. 4 – кривые 1 и 2, 3 соответственно. Кривая 2 получена при нулевых значениях регуляризующих коэффициентов α_2, α_3 из (16). Восстановление с подавлением отличий от нуля восстанавливаемых величин на расстояниях, превышающих $0.75\lambda_s$ от центра области восстановления, дается кривой 3.

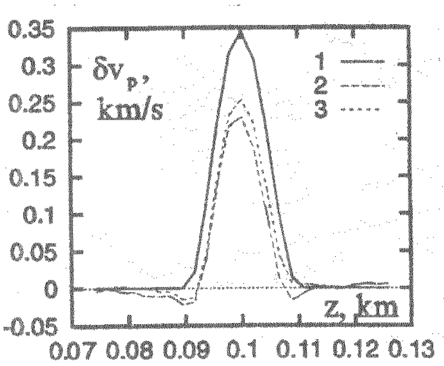

Рис. 4. Результаты восстановления 1-й модели неоднородности. 1 – модель; 2 – результат восстановления ($\alpha_2 = \alpha_3 = 0$); 3 – результат восстановления $\alpha_2 \neq 0, \alpha_3 \neq 0$).

Модель неоднородности со сложной геометрией (22) и результат восстановления представлены соответственно на рис. 5 (рис. 7, кривая 1) и на рис. 6 (рис. 7, кривые 2, 3) соответственно. Восстановление, представленное на рис. 6 (рис. 7, кривая 2), выполнено при подавлении отличий от нуля искомых величин на расстояниях, превышающих $1.2\lambda_s$ от центра области восстановления S. Кривая 3 на рис. 7 – результат восстановления при нулевых значениях α_2 и α_3 из (16).

Аналогичное численное моделирование проводилось в случае возбуждения волнового поля источником типа нормальной силы как для однородной опорной среды, так и для кусочно-однородного полупространства с плоско-параллельными границами, ограниченного свободной поверхностью. В последнем случае восстанавливаемая неоднородность находилась в слое с про-

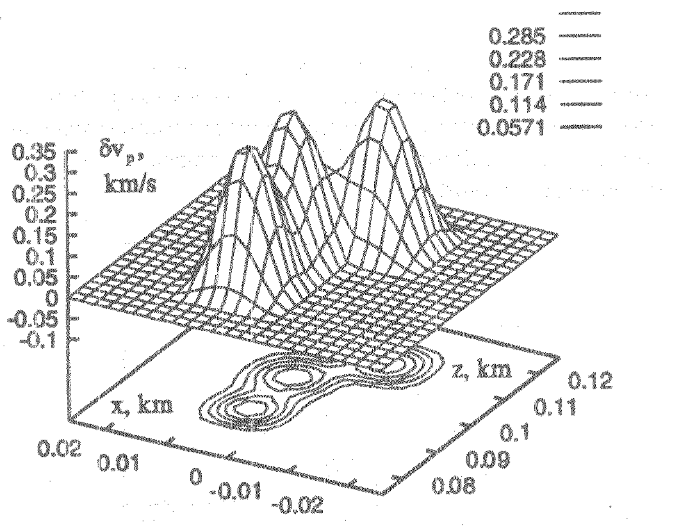

Рис. 5. Модель неоднородности со сложной геометрией (модель 2).

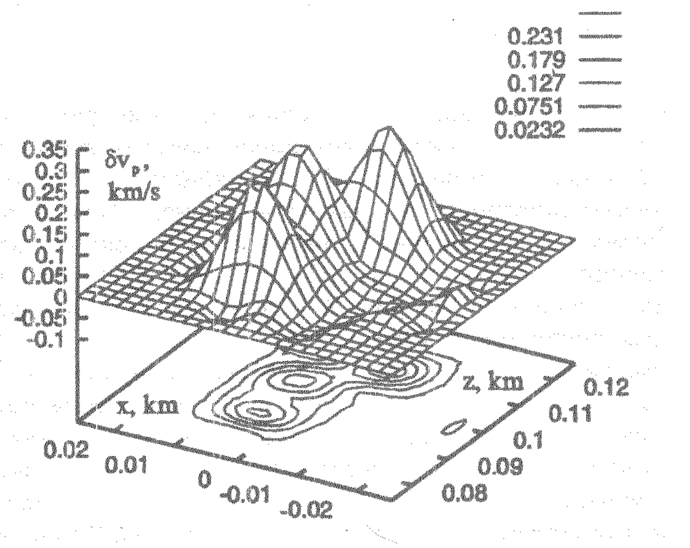

Рис. 6. Результаты восстановления 2-й модели неоднородности (22) (рис. 5) при ненулевых значениях α_2 и α_3 .

межуточным, по отношению с контактирующими с ним средами, значением скорости. Для определения параметров искомых объектов всегда использовалось полное волновое поле. Во всех случаях оценка коэффициентов c_ρ и c_λ была получена за 5–9 шагов итерационного процесса. При этом сходимость применяемого нами градиентного метода имела место при выборе начальных значений $c_{\rho 0}$ и $c_{\lambda 0}$, отличающихся от истинных по крайней мере на 100%.

Как правило, точность определения c_λ была не хуже 10–15%, а ошибка определения c_ρ находилась в промежутке 10–80%. Наибольшие ошибки в определении $c_\lambda(\sim 70\%)$ получены при возбуждении волнового поля источником типа нормальной силы, когда искомая неоднородность располагается в однородном пространстве. В этом случае рассеянные *ss*- и *sp*-волны (отсутствующие в случае возбуждения волнового поля источником типа центра давления) не несут информации относительно величины $\delta\lambda$. В случае кусочно-однородной опорной среды, волновое поле, падающее на неоднородность, является многоволновым, содержащим обменные волны, образовавшиеся на границах раздела.

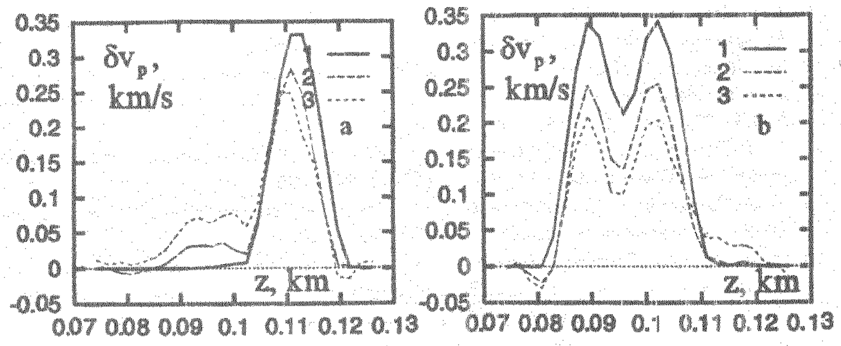

Рис. 7. Результат восстановления 2-й модели неоднородности (22) (рис. 5). (a) – профиль AB, см., рис. 3; (b) – профиль CD; 1 – модель; 2 – $\alpha_2 \neq 0$, $\alpha_3 \neq 0$; 3 – $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

Значительную величину ошибки в определении c_ρ можно объяснить тем, что в рассматриваемых здесь моделях неоднородностей вклад поля, порождаемого $\delta\rho$, в суммарное волновое поле, как правило был малым.

В рассматриваемых примерах отношение $\gamma = v_s/v_p$ в опорной среде было равно γ искомой неоднородности. Во всех случаях, за исключением возбуждения волнового поля источником типа нормальной силы в однородном опорном пространстве, ошибка определения γ не превышала 3%.

Литература

1. Ю. В. Киселев, В. Н. Троян, *Оценка точности определения упругих параметров методом дифракционной томографии с использованием конечно-разностного метода (SV-задача).* — Зап. научн. семин. ПОМИ **250** (1997), 136–152.
2. Г. А. Рыжиков, В. Н. Троян, *Томография и обратные задачи дистанционного зондирования.* СПб: Изд-во СПбГУ, 1994.
3. В. Н. Троян, Г. А. Рыжиков, *Дифракционная томография: построение и интерпретация томографических функционалов.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **218** (1994), 176–196.
4. В. Н. Троян, А. П. Крауклис, *Исследование разрешающей способности алгоритма дифракционной томографии.* — Вестн. СПбГУ, серия 4, **2** (1996), 23–30.
5. А. В. Малик, В. Н. Троян, *Численное моделирование восстановления трехмерных упругих неоднородностей методом дифракционной томографии.* — Вестн. СПбГУ, серия 4, **2** (1996), 83–87.
6. J. M. Harris, G. Y. Wang, *Diffraction tomography for inhomogeneities in layered background medium.* — Geophysics **61**, No. **2** (1996), 570–583.
7. M. Slaney, A.C. Kak, L. E. Larsen, *Limitations of imaging with first-order diffraction tomography.* — IEEE Transactions on microwave theory and techniques **MTT-32**, No. **8** (19984), 860–874.
8. A. J. Devaney, D. Zhang, *Geophysical diffraction tomography in a layered background.* — Wave motion **14**, No. **3** (1991), 243–265.
9. T. A. Dickens, *Diffraction tomography for crosswell imaging of nearly layered media.* — Geophysics **59**, No. **5** (1994), 694–706.
10. G. Beylkin, R. Burridge, *Linearized inverse scattering problems in acoustics and elasticity.* — Wave motion **12**, No. **1** (1990), 15–52.
11. Р. Шерифф, Л. Гелдарт, *Сейсморазведка.* Т. 1, 2, М.: Мир, 1987.
12. K. R. Kekky, R. W. Ward, S. Treitel, R. M. Alford, *Synthetic seismograms: a finite difference approach.* — Geophysics **41**, No. **1** (1976), 2–27.
13. R. Wu, K. Aki, *Scattering characteristics of elastic waves by an elastic heterogeneity.* — Geophysics **50**, No. **4** (1985), 582–595.
14. Г. И. Петрашень, Б. М. Каштан, Ю. В. Киселев, *Количественное изучение нестационарных интерференционных волновых полей в слоисто-однородных упругих средах с плоско-параллельными границами раздела. I. Постановки задач и рациональные методы их решения.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **214** (1994), 7–186.

Kiselev Yu. V., Troyan V. N. Numerical simulation of recovery of the velocity parameters of elastic inhomogeneities by diffraction tomography method.

For the solution of direct problem the finite difference method is used, that allows to take into account the diffraction phenomenon on not weak-contrast local inhomogeneities with a simple and complex geometry. The inverse problem is solved by diffraction tomography method with the use of the Born approximation. The examples of recovery of inhomogeneities with the use of wave field (2-D P-SV problem) produced in uniform space by a source of a type of center of pressure at three locations of a source and three observation points with their location on a linear profile are demonstrated. An opportunity to recover of elastic parameters (λ, μ) and mass density ρ separately allows to find the velocity perturbations as well as ratio of shear wave velocity to compressional wave velocity.

С.-Петербургский государственный университет

Поступило 7 октября 1998 г.