Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 257, 1999 г.

Д. П. Коузов

АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПЕРЕХОДНОГО АДМИТАНСА БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЫ В СРЕДЕ И РЕГУЛЯРИЗУЕМОСТЬ ГРАНИЧНО-КОНТАКТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ В АКУСТИКЕ

1. Введение. В работе [1] было сформулировано условие, достаточное для того, чтобы гранично-контактные интегралы, возникающие в задаче дифракции цилиндрической волны на стыке двух полубесконечных пластин, допускали регуляризацию. В некоторых последующих публикациях (например в [2] и [3]) отмечалось, что то же самое условие является достаточным и в гранично-контактных задачах акустики с другой геометрией и тем самым, повидимому, имеет универсальный характер. Одна из целей данной публикации состоит в том, чтобы показать, что это условие, вообще говоря, носит также и необходимый характер.

Заметим, что конкретный вид гранично-контактных интегралов не зависит от задания источника поля (от выбора конкретного изучаемого процесса), а определяется самой физической моделью, то есть выбором геометрии задачи и уравнений, описывающих процессы. Ниже рассмотрен простейший геометрический класс гранично-контактных задач акустики: двумерная дифракция акустических (в том числе и структурных) волн на бесконечной пластине, упругие свойства которой нарушены на некоторой прямой. В процессе рассмотрения конкретные выражения для граничного и гранично-контактных операторов не фиксируются, а делаются лишь некоторые общие предположения об их структуре. Поэтому получаемые результаты имеют универсальный характер и сохраняют силу как для различных используемых моделей теории пластин (Кирхгоффа, Тимошенко–Миндлина, с учетом или без учета симметричных движений), так и для других тонких упругих объектов (мембран, многослойных пластин и т.п.) Также не играет роли и механический режим стыковки полупластин (трещина, жесткий задел, наличие ребра жесткости и т.п.), поскольку относительно гранично-контактных операторов делаются лишь общие предположения.

Свойства переходного адмитанса бесконечной пластины, помещенной в среду и равномерно возбуждаемой вдоль некоторой прямой, изучалась многими авторами. Если асимптотика его в дальней зоне может быть найдена традиционными методами и ее получение не встречает затруднений, то с выяснением поведения адмитанса в ближней зоне дело обстоит сложнее. Несколько первых членов степенного разложения здесь находятся элементарно (дифференцированием под знаком интеграла), но при дальнейшем дифференцировании интеграл становится расходящимся. Повидимому наиболее продвинутый аналитический результат содержится в работе Крайтона [4], который предложил способ получения асимптотики адмитанса в ближней зоне, основанный на методе факторизации. В частности, он обнаружил, что соответствующий асимптотический ряд, помимо степеней расстояния до источника, содержит также логарифмические члены. Путь, избранный Крайтоном, является, однако, излишне сложным, и в результате он вычислил лишь те члены асимптотического ряда, которые могут быть найдены элементарно (см. дискуссию [5–7]).

Ниже доказывается, что ряды, начальные члены которых нашел Крайтон, являются не только асимптотическими, но и сходящимися, причем для всех значений аргумента. Доказывается общее утверждение для сходящихся интегралов такого типа, что они представляют собой сумму двух целых функций, одна из которых умножена на логарифм.

Решение проблемы регуляризации гранично-контактных интегралов тесно связано с изучением аналитических свойств переходных адмитансов. Гранично-контактные интегралы представляют собой предельные значения некоторых интегралов, зависящих от расстояния между точкой наблюдения и точкой, в которой ставится гранично-контактные условия. Эти последние интегралы имеют ту же структуру, что и интегралы, задающие переходные адмитансы пластин, и, по крайней мере в своей сингулярной части, возникают при их дифференцировании. Они также содержат логарифм, а иногда и отрицательные степени расстояния. В тех случаях, когда эти отрицательные степени присутствуют или когда слагаемое, содержащее логарифм, неограниченно в окрестности нуля (логарифм не подавляется степенным множителем), предел у интеграла, зависящего от расстояния, в нуле не существует, и регуляризация соответствующего гранично-контактного интеграла оказывается невозможной.

Основные идеи настоящей работы были кратко изложены автором в докладе на международной конференции "Day on diffraction" в 1997 году [8].

Поскольку рассмотрения настоящей работы проводятся в общих терминах, результаты ее могут быть использованы для аналогичных задач другой физической природы, например в гранично-контактных задачах электродинамики.

2. Простейшая гранично-контактная задача акустики. Примеры. Общее решение. Введем в рассмотрение бесконечную пластину, упругие свойства которой нарушены вдоль некоторой прямой. Пластина расположена на поверхности идеальной сжимаемой жидкости. Ось Oy направим вглубь жидкости и будем отсчитывать ординату y от поверхности жидкости. Ось Ox направим вдоль поверхности жидкости ортогонально прямой, на которой нарушены упругие свойства пластины. Абсциссу x будем отсчитывать от этой прямой. Ограничимся двумерной ситуацией: будем предполагать, что процессы не зависят от аппликаты z.

Задача нахождения волнового поля в такой модели в общем случае состоит в нахождении решения уравнения Гельмгольца (вообще говоря неоднородного)

$$(\Delta + k^2)P(x,y) = f(x,y) \qquad (y > 0), \tag{2.1}$$

удовлетворяющего граничному условию

$$LP \equiv L\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) P(x,0) = \sum_{n=0}^{N-1} (-i)^n a_n \delta^{(n)}(x) + F(x) \tag{2.2}$$

и набору гранично-контактных условий

$$\begin{gathered} R_j^+ P + R_j^- P = 0 \qquad (j = 1, 2, \dots, N) \\ R_j^{\pm} P = \lim_{x \to \pm 0} R_j^{\pm}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) P(x,0). \end{gathered} \tag{2.3}$$

Здесь

$$L\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) = -m_1\left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\frac{\partial}{\partial y} + m_2\left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right),$$

$$R_j^{\pm}\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)=-s_{j1}^{\pm}\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial y}+s_{j2}^{\pm}\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right),$$

$$m_l, s_{jl}^{\pm}\quad (l=1,2;\ j=1,2,\ldots,N)\quad \text{– полиномы.}$$

Число гранично-контактных условий N и порядок N_0 дифференциального оператора L связаны соотношением $N_0 = N+1$. Для простоты мы предположим, что источник поля не приложен непосредственно к месту нарушения упругих свойств пластины (прямой $x=0$, $y=0$) и будем рассматривать однородные гранично-контактные условия (2.3).

Искомое давление $P(x,y)$ предполагается непрерывным в начале координат (условие Майкснера) и (за возможным исключением некоторых волн, приходящих из бесконечности, которые должны быть заранее оговорены при постановке задачи) удовлетворяющим принципу предельного поглощения. Множитель $\exp(-i\omega t)$, задающий зависимость процессов от времени t (ω – круговая частота) всюду опускается.

Поясним заданную абстрактную постановку некоторыми примерами. Пусть в пластине учитываются лишь изгибные движения, для которых предполагаются выполненным уравнение Кирхгоффа

$$D\left(\frac{\partial^4 u(x)}{\partial x^4}-\kappa^4 u(x)\right)=-P(x,0)+F(x)\quad (x\neq 0). \tag{2.4}$$

Здесь $u(x)$ – изгибное смещение пластины, D – цилиндрическая жесткость, $\kappa=\sqrt[4]{\frac{\mu\omega^2}{D}}$ – волновое число изгибных волн в пластине, μ – поверхностная плотность пластины, $F(x)$ – поверхностная плотность сторонней силы.

В предположении неотрывности движений пластины и жидкости изгибные смещения пластины совпадают с нормальными смещениями жидкости

$$u(x)=\frac{1}{\rho\omega^2}\,\frac{\partial P(x,0)}{\partial y} \tag{2.5}$$

(ρ – плотность жидкости).

Равенства (2.4) и (2.5) после исключения переменной $u(x)$ приводят к граничному условию для давления $P(x,y)$

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4}-\kappa^4\right)\frac{\partial P(x,0)}{\partial y}+\nu P(x,0)=\nu F(x)\quad (x\neq 0).$$

Таким образом граничный оператор L в нашем случае имеет вид

$$L\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)=\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4}-\kappa^4\right)\frac{\partial}{\partial y}+\nu,$$

где $\nu=\rho\omega^2/D$.

Обобщенная функция, носитель которой состоит из одной точки $x=0$, представляет собой, как известно, линейную комбинацию функции Дирака $\delta(x)$ и ее производных. При этом наивысший допустимый порядок производной $\delta(x)$ (см. равенство (2.2)) должен быть в силу условия Майкснера по крайней мере на две единицы меньше порядка дифференциального оператора L. Таким образом окончательно мы имеем следующее граничное условие

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4}-\kappa^4\right)\frac{\partial P(x,0)}{\partial y}+\nu P(x,0)=\sum_{n=0}^{3}(-i)^n a_n\delta^{(n)}(x)+\nu F(x).$$

Четыре неизвестные константы a_n должны быть определены из гранично-контактных условий. Таким образом в задаче должны участвовать четыре независимых гранично-контаткных условия. Назовем некоторые типовые ситуации.

1. Пластина разделена бесконечно тонкой трещиной

$$\lim_{x\to\pm 0}\frac{\partial^3 P(x,0)}{\partial x^2\partial y}=0,\qquad \lim_{x\to\pm 0}\frac{\partial^4 P(x,0)}{\partial x^3\partial y}=0.$$

Равенства определяют отсутствие на кромках пластины внешнего изгибающего момента и внешней перерезывающей силы.

2. Пластина жестко закреплена

$$\lim_{x\to\pm 0}\frac{\partial P(x,0)}{\partial y}=0,\qquad \lim_{x\to\pm 0}\frac{\partial^2 P(x,0)}{\partial y\partial x}=0.$$

Здесь соответственно имеем отсутствие на линии закрепления пластины смещений и поворотов.

3. Пластина подкреплена ребром жесткости, характеризующимся силовым Z_F и моментным Z_M импедансами

$$\lim_{x\to+0}\frac{\partial P(x,0)}{\partial y}=\lim_{x\to-0}\frac{\partial P(x,0)}{\partial y},$$

$$\lim_{x\to+0}\frac{\partial^2 P(x,0)}{\partial x\partial y}=\lim_{x\to-0}\frac{\partial^2 P(x,0)}{\partial x\partial y},$$

$$D \lim_{x\to+0} \frac{\partial^4 P(x,0)}{\partial x^3 \partial y} - D \lim_{x\to-0} \frac{\partial^4 P(x,0)}{\partial x^3 \partial y} - i\omega Z_F \lim_{x\to\pm 0} \frac{\partial P(x,0)}{\partial y} = 0,$$

$$D \lim_{x\to+0} \frac{\partial^3 P(x,0)}{\partial x^2 \partial y} - D \lim_{x\to-0} \frac{\partial^3 P(x,0)}{\partial x^2 \partial y} + i\omega Z_M \lim_{x\to\pm 0} \frac{\partial^2 P(x,0)}{\partial x \partial y} = 0.$$

Первые два равенства задают здесь соответственно непрерывность смещения и поворота пластины в месте прикрепления ребра. Два последующих определяют скачки перерезывающей силы и изгибающего момента, обусловленные действием ребра жесткости.

Вернемся к нашей основной задаче. Выделим из полного поля P его “классическую часть” P_0

$$P = P_0 + Q. \tag{2.6}$$

P_0 есть решение уравнения Гельмгольца (2.1), удовлетворяющее граничному условию

$$LP = F(x)$$

и требуемому режиму на бесконечности. Иными словами P_0 представляет собой решение “классической” (т.е. не гранично-контактной) задачи, которая имела бы место при таком же возбуждении для пластины, не имеющей нарушения упругих свойств. Если предположить, что сторонние воздействия $f(x,y)$ и $F(x)$ обращаются в нуль в некоторой окрестности начала координат, то поле P_0 имеет в начале координат непрерывные производные всех порядков.

Для нахождения “гранично-контактного поля” Q имеем однородное уравнение Гельгольца

$$(\Delta + k^2)Q(x,y) \qquad (y > 0),$$

граничное условие вида

$$LQ = \sum_{n=0}^{N-1} (-i)^n a_n \delta^{(n)}(x) \tag{2.7}$$

и неоднородные гранично-контактные условия

$$R_j^+ Q + R_j^- Q = -R_j^+ P_0 - R_j^- P_0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, N). \tag{2.8}$$

В начале координат Q должно удовлетворять условию Майкснера, а на бесконечности – принципу предельного поглощения.

На основании приведенной постановки (см. граничное условие (2.7)) видно, что поле Q представляет собой волновой процесс, расходящийся от начала координат. С точки зрения физики Q является полем пассивного (т.е. излучающего только при наличии падающего поля P_0 – см. гранично-контактные условия (2.8)) источника, в роли которого выступает дефект пластины.

Аналитическое выражение для Q может быть несложно получено путем разложения по плоским волнам

$$Q = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{N-1} a_n \lambda^n e^{i\lambda x - \gamma y} \frac{d\lambda}{l(\lambda)}. \tag{2.9}$$

Здесь $\gamma = \sqrt{\lambda^2 - k^2}$,

$$l(\lambda) = m_1(\lambda^2)\gamma + m_2(\lambda^2). \tag{2.10}$$

Заметим, что интегрирование по действительной оси осуществляется в интеграле в (2.9) лишь при наличии в среде поглощения. Согласно принципу предельного поглощения идеальная среда рассматривается как предел среды с потерями при стремлении последних к нулю ($\operatorname{Im} k = +0$). В результате такого перехода точки ветвления $\lambda = \pm k$ и, может быть, некоторые полюса подынтегрального выражения оказываются на действительной оси. Поскольку взаимное расположение контура и особых точек подынтегрального выражения должно быть неизменным, при $\operatorname{Im} k = +0$ контур интегрирования оказывается несколько смещенным с действительной оси. Тем не менее мы и в этом случае (с соответствующей долей условности) будем пользоваться записями типа (2.9) и говорить об интегрировании по действительной оси. Часть комплексной плоскости $\mathbf{C}$ (нерасширенной), расположенную выше (ниже) контура интегрирования в (2.9) обозначим $\mathbf{C}^+(\mathbf{C}^-)$. При $\operatorname{Im} k > 0$ $\mathbf{C}^+(\mathbf{C}^-)$ представляет собой открытую верхнюю (нижнюю) полуплоскость. В нашем основном случае идеальной жидкости ($\operatorname{Im} k = +0$) $\mathbf{C}^+(\mathbf{C}^-)$ представляет собой обобщенную верхнюю (нижнюю) полуплоскость комплексной переменной λ, расширенную за счет включения в нее тех особых точек действительной оси, которые контур интегрирования должен обходить снизу (сверху). Радикал γ считается арифметическим при $\lambda > k$ и $\lambda < -k$. На участке $]-k; k[$ $\gamma = -i\sqrt{k^2 - \lambda^2}$, при чем здесь берется арифметическое значение $\sqrt{k^2-\lambda^2}$. Применительно к рассмотренному примеру, в котором

$$l(\lambda) = -(\lambda^4 - \kappa^4)\gamma + \nu,$$

контур интегрирования схематически изображен на рис. 1 жирной линией.

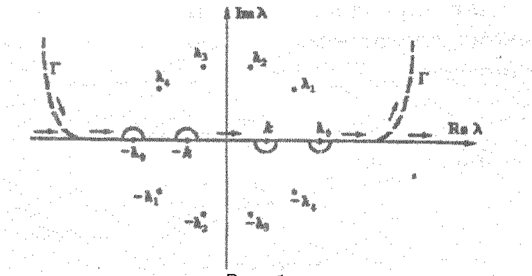

Рис. 1.

Здесь λ_0 – вещественный положительный корень $l(\lambda)$. Прочие корни схематически изображены схематично с учетом их асимптотики при малых значениях k

$$\lambda_n = \lambda_0 e^{i\frac{\pi n}{5}} \qquad (n = 0, 1, 2, 3, 4).$$

Решение P исходной задачи, определяемое формулой (2.6), где Q задается представлением (2.9), назовем "общим". Общее решение удовлетворяет всем условиям задачи, кроме гранично-контактных. Оно содержит N произвольных постоянных и за счет их подбора может быть адаптировано к любому осмысленному с точки зрения физики режиму на линии нарушения упругих свойств пластины. В силу гладкости классической части поля P_0 в начале координат применение к ней гранично-контактных операторов не вызывает трудностей. Поэтому расчету правых частей равенств (2.8) мы не будем уделять внимания. Непосредственное применение гранично-контактных операторов $R_j^{\pm}$ к полю Q встречает то затруднение, что приводит, вообще говоря, к расходящимся интегралам. Процесс их регуляризации мы опишем в следующем разделе.

3. Регуляризация гранично-контактных интегралов. Достаточное условие регуляризуемости. Поскольку гранично-контактное поле Q представляет собой линейную комбинацию слагаемых вида

$$Q_n(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\lambda^n}{l(\lambda)}\,e^{i\lambda x-\gamma y}\,d\lambda \quad (n=0,1,2,\dots,N-1),$$

достаточно рассмотреть применение гранично-контактных операторов $R_j^{\pm}$ (для определенности мы будем рассматривать R_j^{+}) к одному такому слагаемому. Индексы j и $+$ для краткости записи будем опускать.

Имеем

$$RQ_n=\lim_{x\to+0}\lim_{y\to+0}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\lambda^n r(\lambda)}{l(\lambda)}\,e^{i\lambda x-\gamma y}\,d\lambda, \tag{3.1}$$

где

$$r(\lambda)=s_1(\lambda)\gamma+s_2(\lambda). \tag{3.2}$$

Интеграл в равенстве (3.1) является сходящимся за счет экспоненциального убывания множителя $\exp(-\gamma y)$. Приподнимаем теперь концы контура интегрирования так, чтобы при этом не были пересечены особые точки подынтегрального выражения. Полученный контур обозначим Γ. Он изображен на рис. 1 пунктиром. В силу того, что теперь в подынтегральном выражении возникло экспоненциальное убывание за счет фактора $\exp(i\lambda x)$, мы можем осуществить в (3.1) предельный переход $y\to+0$

$$RQ_n=\lim_{x\to+0}\int\limits_{\Gamma}\frac{\lambda^n r(\lambda)}{l(\lambda)}\,e^{i\lambda x}\,d\lambda.$$

Избавимся теперь в подынтегральном выражении от иррациональности в знаменателе и разобьем полученный интеграл на два, один из которых не будет содержать радикала, а другой будет содержать его в виде множителя

$$RQ_n=\lim_{x\to+0}\left[\frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma}\frac{\lambda^n}{l(\lambda)l^0(\lambda)}\,[r(\lambda)l^0(\lambda)+r^0(\lambda)l(\lambda)]e^{i\lambda x}d\lambda+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma}\frac{\lambda^n}{l(\lambda)l^0(\lambda)}[r(\lambda)l^0(\lambda)-r^0(\lambda)l(\lambda)]e^{i\lambda x}d\lambda\right]. \tag{3.3}$$

Здесь

$$l^0(\lambda) = -m_1(\lambda^2)\gamma + m_2(\lambda^2), \quad r^0(\lambda) = -s_1(\lambda)\gamma + s_2(\lambda)$$

представляют собой значения двузначных функций $l(\lambda)$, $r(\lambda)$ на втором листе римановой поверхности.

Первый интеграл, с учетом того, что подынтегральное выражение не содержит радикала, может быть вычислен с помощью теоремы о вычетах. В полученной сумме вычетов можно осуществить предельный переход $x \to +0$:

$$\lim_{x\to+0} \frac{1}{2} \int\limits_{\Gamma} \frac{\lambda^n}{l(\lambda)l^0(\lambda)}[r(\lambda)l^0(\lambda) + r^0(\lambda)l(\lambda)]e^{i\lambda x}\, d\lambda =$$

$$= \pi i \sum_{\lambda\in\mathbf{C}^+} \operatorname{Res} \frac{\lambda^n}{ll^0}\,(rl^0 + r^0 l).$$

Заметим, что при использовании гранично-контактного оператора R_j^- и соответственно при выполнении предельного перехода $x \to -0$ мы бы направили концы контура интегрирования вниз. В результате аналогичный интеграл выразился бы через вычеты в полюсах, лежащих в $\mathbf{C}^-$.

При условии

$$r(\lambda)l^0(\lambda) - r^0(\lambda)l(\lambda) = O(l(\lambda)), \quad (\lambda \to \infty), \tag{3.4}$$

второй интеграл в (3.3) является сходящимся для $x = 0$ при всех допустимых значениях n $(n = 0, 1, 2, \dots, N)$, и таким образом все расходящиеся интегралы, входящие в $R_j^{\pm}Q$, допускают регуляризацию. Соотношение (3.4) и было отмечено в [1–3], как достаточное условие регуляризуемости гранично-контактных интегралов. Ниже мы докажем, что нарушение условия (3.4) приводит к тому, что можно указать такое допустимое n, что

$$\lim_{x\to+0} \int\limits_{\Gamma} \frac{\lambda^n}{l(\lambda)l^0(\lambda)}[r(\lambda)l^0(\lambda) - r^0(\lambda)l(\lambda)]e^{i\lambda x} d\lambda = \infty$$

и таким образом соответствующий гранично-контактный интеграл не может быть регуляризован. Для этого нам потребуется предварительно рассмотреть аналитические свойства некоторых специальных функций.

4. Аналитические свойства обобщенных адмитансов. Вновь обратимся к нашему примеру тонкой пластины, изгибные движения которой подчиняются уравнению Кирхгоффа, и которая находится в одностороннем контакте с акустической средой. Рассмотрим колебания однородной (т.е. не имеющей нарушений упругих свойств) пластины под действием сосредоточенной гармонической силы $F(x) = F_0\delta(x)$. Поле давлений, вызываемое такой силой удовлетворяет граничному условию

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} - \kappa^4\right)\frac{\partial P(x,0)}{\partial y} + \nu P(x,0) = \nu F_0\delta(x)$$

и в разложении по плоским волнам имеет вид

$$P(x,y) = \frac{\nu F_0}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x - \gamma y}\,\frac{d\lambda}{l(\lambda)},$$

где

$$l(\lambda) = -(\lambda^4 - \kappa^4)\gamma + \nu. \tag{4.1}$$

Для изгибного смещения $u(x)$ пластины имеем, соответственно, выражение

$$u(x) = -\frac{F_0}{2\pi D}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\gamma}{l(\gamma)}\,e^{i\lambda x}\,d\lambda.$$

Отношение скорости изгибных смещений $v(x) = -i\omega u(x)$ к силе F принято называть (силовым) адмитансом $Y_F(x)$

$$Y_F(x) = \frac{i\omega}{2\pi D}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\gamma}{l(\lambda)}\,e^{i\lambda x}d\lambda.$$

При этом значение функции $Y_F(x)$ в нуле носит название "входного адмитанса", а ее прочие значения ($x \neq 0$) определяют так называемый "переходный адмитанс".

Аналогичным образом можно ввести моментный адмитанс $Y_M(x)$ (пластина возбуждается сосредоточенным моментом $F(x) == -M\delta'(x)$, а замеряется скорость вращения $-i\omega\frac{\partial u}{\partial x}$)

$$Y_M(x) = \frac{i\omega}{2\pi D}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\gamma\lambda^2}{l(\lambda)}\,e^{i\lambda x}d\lambda$$

и смешанные, при одном из которых источником поля является сосредоточенная сила, а замеряемой величиной – скорость вращения, а при другом – источником поля является сосредоточенный момент, а меряется скорость смещений.

В приведенных в разделе 2 примерах типовых гранично-контактных условий для изгибно колеблющейся пластины участвовали пределы при $x \to \pm 0$ производных давления P вида $\frac{\partial^{n+1} P(x,0)}{\partial x^n \partial y}$ $(n = 0, 1, 2, 3)$. Поле Q для этого случая записывается так

$$Q(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + a_3\lambda^3}{l(\lambda)} e^{i\lambda x - \gamma y} d\lambda$$

($l(\lambda)$ определяется формулой (4.1)).

Применение гранично-контактных операторов к этому представлению приводит к необходимости счета пределов в нуле для специальных интегралов вида

$$Y_n(x) = \int\limits_{\Gamma} \frac{\lambda^n \gamma}{l(\lambda)} e^{i\lambda x} d\lambda \quad (n = 0, 1, 2, \ldots, 6).$$

Эти интегралы при $n = 0, 1, 2$ с точностью до размерного множителя совпадают с упомянутыми адмитансами пластины. Условимся все эти интегралы $(n = 0, 1, 2, \ldots, 6)$ называть обобщенными адмитансами.

Вернемся к общей задаче. Введем в рассмотрение некоторый класс функций вида

$$Y(x) = \int\limits_{\Gamma} \frac{r(\lambda)}{l(\lambda)} e^{i\lambda x} d\lambda. \tag{4.2}$$

Эти функции мы также условимся называть обобщенными адмитансами. Функции $l(\lambda)$ и $r(\lambda)$ мы будем определять формулами (2.10) и (3.2), не задавая себе вопроса, являются ли они символами некоторых реальных граничных и гранично-контактных операторов, или написаны формально. Более того, мы в принципе могли бы отказаться от четности $l(\lambda)$, положив

$$l(\lambda) = m_1(\lambda)\gamma + m_2(\lambda),$$

и рассмотрения при этом не претерпели бы существенных изменений. По причине ограниченности места мы не уделим внимания тривиальным ситуациям, возникающим при вырождении функции $l(\lambda)$ и всегда будем предполагать полиномы $m_1(\lambda^2)$ и $m_2(\lambda^2)$ отличными от тождественного нуля. Кроме того, мы будем предполагать, что значения $\lambda = \pm k$ не являются корнями $m_2(\lambda^2)$.

Множитель λ^n, участвующий в $R_j^{\pm}Q_n$, мы не будем отдельно выписывать, включая его в функцию $r(\lambda)$.

Относительно контура Γ в формуле (4.2) мы предполагаем, что он не имеет самопересечений, концы его (в целях обеспечения сходимости интеграла) направлены вверх, точка $\lambda = k$ лежит выше контура Γ и по его ходу слева от него, а точка $\lambda = -k$, соответственно, справа и снизу. Расположение Γ относительно полюсов подынтегрального выражения не играет роли, предполагается только, что он через эти полюса не проходит. Также не играет роли выбор ветви радикала γ, но для определенности мы будем исходить из прежнего определения основной ветви (см. примечание к формуле (2.9)).

Представление (4.2) определяет функцию $Y(x)$ для произвольных положительных значений аргумента x. Поставим задачу изучить аналитические свойства обобщенного адмитанса Y как функции комплексного аргумента z. При этом функцию $Y(z)$ мы будем понимать как продукт аналитического продолжения функции $Y(x)$ с положительной части действительной оси.

Как и прежде при регуляризации гранично-контактного интеграла $R_j^{+}Q_n$, освободимся в (4.2) от иррациональности в знаменателе и разобьем функцию $Y(x)$ на два слагаемых

$$Y(x) = Y_1(x) + Y_2(x), \tag{4.3}$$

$$Y_1(x) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma} \frac{r(\lambda)l^0(\lambda) + r^0(\lambda)l(\lambda)}{l(\lambda)l^0(\lambda)}\, e^{i\lambda x} d\lambda, \tag{4.4}$$

$$Y_2(x) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma} \frac{r(\lambda)l^0(\lambda) - r^0(\lambda)l(\lambda)}{l(\lambda)l^0(\lambda)}\, e^{i\lambda x} d\lambda. \tag{4.5}$$

Подынтегральная функция в (4.4) не содержит радикала, функция $\frac{rl^0+r^0l}{ll^0}$ представляет собой рациональную дробь:

$$\frac{1}{2}(rl^0 + lr^0) = s_2 m_2 - s_1 m_1 \gamma^2, \quad ll^0 = m_2^2 - m_1^2\gamma^2.$$

Поэтому интеграл (4.4) может быть выражен через сумму вычетов

$$Y_1(x) = \pi i \sum_{\lambda \in \mathbf{C}^+} \operatorname{Res} \frac{rl^0 + r^0 l}{ll^0}\, e^{i\lambda x}.$$

Здесь символ $\mathbf{C}^+$ обозначает часть комплексной плоскости, находящуюся выше контура Γ. Аналитическое продолжение функции $Y_1(x)$ с положительной части действительной оси осуществляется тривиально

$$Y_1(z) = \pi i \sum_{\lambda \in \mathbf{C}^+} \operatorname{Res} \frac{rl^0 + r^0 l}{ll^0}\, e^{i\lambda z}, \tag{4.6}$$

при этом $Y_1(z)$ представляет собой целую функцию переменной z.

Агрегат $\frac{rl^0 - r^0 l}{ll^0}$ в подынтегральном выражении в формуле (4.5) представляет собой произведение рациональной дроби и радикала γ:

$$\frac{1}{2}(rl^0 - r^0 l) = (s_1 m_2 - s_2 m_1)\gamma.$$

Проведем разрез из точки ветвления $\lambda = k$ вертикально вверх по лучу $[k, k + i\infty[$. Если на этом луче случайно окажется полюс подынтегрального выражения, условимся, что полюс обходится разрезом по малой полуокружности (безразлично с какой стороны). Для такого модифицированного разреза сохраним прежнее обозначение $[k, k + i\infty[$. Используя теорему о вычетах, сведем интеграл по контуру Γ в (4.5) к интегралу по петле Λ, охватывающей разрез с сохранением направления контура Γ.

$$Y_2(x) = \pi i \sum_{\lambda \in \mathbf{C}^+} \operatorname{Res} \frac{rl^0 - r^0 l}{ll^0}\, e^{i\lambda x} + \frac{1}{2} \int\limits_{\Lambda} \frac{rl^0 - r^0 l}{ll^0}\, e^{i\lambda x} d\lambda.$$

Формула написана в предположении, что контур Γ не пересекает разрез (в противном случае знаки при вычетах в отдельных полюсах сменятся).

Интеграл по Λ можно свести к интегралу лишь по правому берегу разреза, что даст следующее представление для $Y_2(x)$

$$Y_2(x) = \pi i \sum_{\lambda \in \mathbf{C}^+} \operatorname{Res} \frac{rl^0 - r^0 l}{ll^0}\, e^{i\lambda x} + \int\limits_{k}^{k+i\infty} \frac{rl^0 - r^0 l}{ll^0}\, e^{i\lambda x} a\lambda. \tag{4.7}$$

Первое слагаемое, подобно $Y_1(x)$, допускает тривиальное аналитическое продолжение с положительной части действительной оси, результатом которого является целая функция. Аналитическое продолжение второго слагаемого тривиальным образом осуществляется лишь в угол $|\arg z| < \pi/2 - \varepsilon$ $(z \neq 0)$, где ε – любое положительное число. Объединяя формулы (4.3), (4.6) и (4.7), придем к представлению обобщенного адмитанса в виде суммы

$$Y(z) = f(z) + g(z),$$

где функция $f(z)$ – целая, а для функции $g(z)$ известно представление

$$g(z) = \int\limits_{k}^{k+i\infty} \frac{rl^0 - r^0 l}{ll^0}\, e^{i\lambda z}\, d\lambda, \tag{4.8}$$

пригодное лишь в угле $|\arg z| < \pi/2 - \varepsilon$ $(z \neq 0)$. В указанном угле функция $g(z)$ аналитична. Нашей ближайшей целью является ее дальнейшее аналитическое продолжение (выяснение ее области существования). При этом окажется, что $g(z)$ аналитична на бесконечнолистной римановой поверхности с точками ветвления $z = 0$ и $z = \infty$.

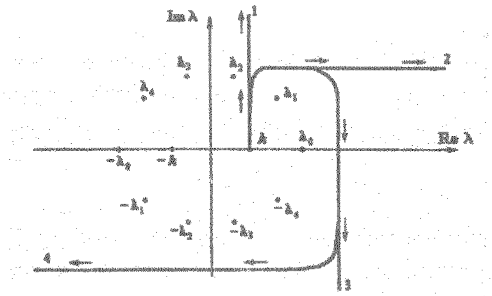

Рис. 2.

Контур интегрирования в (4.8) для вещественного положительного z ориентирован в направлении "скорейшего спуска" (наибыстрейшего убывания экспоненты $e^{i\lambda z}$). При непрерывном росте $\arg z$ направление скорейшего спуска на комплексной плоскости λ будет непрерывно поворачиваться вправо на величину $\arg z$. Будем при непрерывном изменении $\arg z$ непрерывно менять контур интегрирования, каждый раз направляя его в сторону наибыстрейшего спуска. Для того, чтобы при таких деформациях контура интегрирования интеграл по-прежнему давал функцию $g(z)$, условимся, чтобы деформации контура не сопровождались пересечением особых точек подынтегрального выражения. На рис. 2 при тех же условных расположениях полюсов ($\lambda = \pm\lambda_n$; $n = 0, 1, 2, 3, 4$) и точек ветвления ($\lambda = \pm k$), что и на рис. 1, показаны последовательные значения контура интегрирования для $\arg z = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ (кривые 1, 2, 3, 4 соответственно).

Придавая $\arg z$ приращение 2π и сравнивая исходное и заключительное положение контура скорейшего спуска, придем к следующему соотношению обхода для функции $g(z)$

$$g(ze^{2\pi i}) = g(z) + 2\pi i h(z) \qquad (z \neq 0), \tag{4.9}$$

где

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_C \frac{rl^0 - r^0 l}{ll^0}\, r^{i\lambda z}\, d\lambda.$$

Контур C обходит по часовой стрелке все особые точки подынтегральной функции. Поскольку бесконечность не является точкой ветвления подынегральной функции, контур C замкнут. В силу его ограниченности функция $h(z)$ представляет собой целую функцию комплексной переменной z.

Соотношение обхода (4.9) известно, в частности, в аналитической теории дифференциальных уравнений. Оно встречается при описании поведения решений линейного дифференциального уравнения в окрестности изолированной особой точки его коэффициентов. Традиционным рассуждением (см. [9]) можно показать, что из этого соотношения следует такое представление для функции $g(z)$:

$$g(z) = \psi(z) + h(z) \ln z. \tag{4.11}$$

При этом функция $\psi(z)$ не имеет в нуле ветвления.

В силу своего определения функция $\psi(z)$ не имеет на комплексной плоскости (нерасширенной) никаких особых точек, кроме, может быть, нуля. Уточним поведение в нуле функций $\psi(z)$ и $h(z)$.

В упомянутых выше предположениях, что многочлены $m_1(\lambda^2)$ и $m_2(\lambda^2)$ нетривиальны и $m_2(k^2) \neq 0$, интеграл

$$\int\limits_k^{k+i\infty} e^{i\lambda x} \frac{d\lambda}{\gamma l(\lambda) l^0(\lambda)}$$

является сходящимся, и, стало быть, для интеграла

$$g_0(x) = \int_k^{k+i\infty} e^{i\lambda x} \frac{d\lambda}{\gamma l(\lambda) l^0(\lambda)}$$

при $x \to +0$ существует конечный предел $g_0(+0)$. Меняя $\arg z$ и каждый раз направляя контур интегрирования в сторону скорейшего спуска, можно убедиться, что то же самое значение предела имеет место и при других направлениях стремления комплексной переменной z к нулю. Таким образом для функции $g_0(z)$

$$g_0(z) = \int_k^{k+i\infty} e^{i\lambda z} \frac{d\lambda}{\gamma l(\lambda) l^0(\lambda)} \tag{4.12}$$

существует в нуле единый предел

$$\lim_{z\to 0} g_0(z) = g_0(0).$$

Это в свою очередь означает, что в представлении

$$g_0(z) = \psi_0(z) + h_0(z) \ln z$$

функция $\psi_0(z)$ в нуле не имеет особенности (и, соответственно, является целой), а целая функция $h_0(z)$ имеет в нуле корень. Выясним кратность этого корня.

Имеем

$$h_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{i\lambda z} \frac{d\lambda}{\gamma l(\lambda) l^0(\lambda)}. \tag{4.13}$$

Интеграл в формуле (4.13) (равным образом, как и интеграл в формуле (4.10)) может быть вычислен с помощью вычета в бесконечно удаленной точке

$$h_0(z) = \operatorname*{Res}_{\lambda=\infty} e^{i\lambda z} \frac{1}{\gamma l(\lambda) l^0(\lambda)}.$$

Разлагая экспоненту в ряд Маклорена, получим степенной ряд для функции $h_0(z)$

$$h_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \operatorname*{Res}_{\lambda=\infty} \frac{(i\lambda)^n}{\gamma l(\lambda) l^0(\lambda)}.$$

Поскольку при $\lambda \to \infty$ $\gamma l(\lambda) l^0(\lambda) = O(\lambda^{2N_0+1})$ ($2N_0$ – степень полинома ll_0), видно, что степенной ряд для функции $h_0(z)$ начинается с z^{2N_0}

$$h_0(z) = z^{2N_0}\chi_0(z), \quad \chi_0(0) \neq 0.$$

Таким образом, мы получим следующее представление для $g_0(z)$:

$$g_0(z) = \psi_0(z) + z^{2N_0}\chi_0(z)\ln z. \tag{4.14}$$

В этом равенстве $\psi_0(z)$ и $\chi_0(z)$ – целые функции, причем $\chi_0(0) \neq 0$.

Интегральное представление (4.8) функции $g(z)$ отличается от такового для $g_0(z)$ (формула (4.12)) наличием в числителе подынтегрального выражения полинома $2(s_1m_2 - s_2m_1)\gamma^2$ и таким образом $g(z)$ представляет собой некоторую линейную комбинацию производных функции $g_0(z)$. Наивысший порядок участвующей производной равен степени p этого полинома

$$g(z) = \sum_{n=0}^{p} c_n \frac{d^n}{dz^n} g_0(z). \tag{4.15}$$

Сличая равенства (4.11), (4.14) и (4.15) приходим к альтернативе

1. $p < 2N_0$. В представлении (4.11) функция $\psi(z)$ целая, а $h(z)$ имеет в нуле корень кратности $2N_0 - p$
2. $p = 2N_0$. В этом случае $\psi(z)$ целая функция, но $h(0) \neq 0$.
3. $p > 2N_0$. В этом случае $\psi(z)$ имеет в нуле полюс порядка $p - 2N_0$. Что касается наличия или отсутствия корня у $h(z)$ в нуле, то ситуация не является определенной.

Обобщенный адмитанс $Y(z)$ отличается от функции $g(z)$ на целую функцию $f(z)$, поэтому для него также имеет место представление типа (4.11), при чем все случаи, перечисленные в альтернативе сохраняют силу.

5. Критерий регуляризуемости гранично-контактных интегралов. Рассмотрим предел обобщенного адмитанса $Y(x)$ при $x \to +0$. В первом случае альтернативы у него имеется конечный предел $Y(+0)$, поскольку рост $|\ln x|$ гасится степенным множителем. В двух остальных случаях конечного предела у обобщенного адмитанса нет, поскольку его модуль имеет либо логарифмический ($p = 2N_0$), либо степенной ($p > 2N_0$) рост. Таким образом неравенство

$$p \leqslant 2N_0 - 1$$

является критерием наличия конечного предела $Y(+0)$ обобщенного адмитанса в нуле.

Обратимся к гранично-контактным условиям. Для того, чтобы на основании этих условий мы могли бы определить значения неизвестных постоянных $a_1, a_2, \dots, a_n$, необходимо, чтобы для всех допустимых $n (n = 0, 1, \dots, N_0 - 1)$ пределы $R_j^{\pm} Q_n$ имели бы конечные численные значения. Ограничимся рассмотрением пределов в нуле справа

$$R_j^+ Q_n = \lim_{x \to +0} \int\limits_\Gamma \frac{\lambda^n r_j^+(\lambda)}{l(\lambda)} e^{i\lambda x} \, d\lambda. \tag{5.1}$$

Выражение, стоящее здесь под знаком предела представляет собой обобщенный адмитанс. Для существования у него конечного предела при $x \to +0$ необходимо и достаточно, чтобы полином

$$\lambda^n \gamma^2 [s_{j1}^+(\lambda) m_2(\lambda^2) - s_{j2}^+(\lambda) m_1(\lambda^2)]$$

имел бы степень, не превосходящую $2N_0 - 1$. С учетом наибольшего допустимого значения n (равного $N_0 - 2$), видно, что степень полинома

$$s_{j1}^+(\lambda) m_2(\lambda^2) - s_{j2}^+(\lambda) m_1(\lambda^2)$$

не должна превосходить $N_0 - 1$. Это требование можно записать в виде оценки

$$r_j^+(\lambda) l^0(\lambda) - r_j^{+0}(\lambda) l(\lambda) = O(l(\lambda)) \quad (\lambda \to \infty).$$

Наличие конечного предела в (5.1) справа в свою очередь означает возможность естественной регуляризации гранично-контактного интеграла

$$R_j^+ Q_n = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda^n r_j^+(\lambda)}{l(\lambda)} e^{+i0\lambda} d\lambda,$$

если он при такой формальной записи оказался расходящимся. Случай $R_j^- Q_n$ может быть рассмотрен аналогично или сведен заменой знака в переменной интегрирования к уже рассмотренному.

Таким образом мы приходим к следующему критерию регуляризуемости гранично-контактных интегралов

$$r_j^{\pm}(\lambda) l^0(\lambda) - r_j^{\pm 0}(\lambda) l(\lambda) = O(l(l)) \quad (\lambda \to \infty). \tag{5.2}$$

При нарушении этого условия для некоторого гранично-контактного оператора $R_j^{\pm}$ всегда можно указать такое допустимое n, что предел $R_j^{\pm}Q_n$ не будет иметь конечного значения.

Следует ожидать, что соотношение (5.2) является критерием регуляризуемости гранично-контактных интегралов (или рядов) и в гранично-контактных задачах акустики с другой геометрией.

Литература

1. Д. П. Коузов, *Дифракция цилиндрической гидроакустической волны на стыке двух полубесконечных пластин.* — ПММ **33, No. 2** (1969), 240–250.
2. Д. П. Коузов, В. А. Пачин, *О дифракции акустических волн в плоском полубесконечном волноводе с упругими стенками.* — ПММ **40, No. 1** (1976), 104–111.
3. Л. А. Левицкий, *Дифракция плоской гидроакустической волны на открытом конце плоского, полубесконечного волновода с тонкими упругими стенками.* — ПММ **44, No. 2** (1980), 301–309.
4. D. G. Crighton, *Force and moment admitance of plates under arbitrary fluid loading.* — J. sound and vibration **20,** No. **2** (1972), 209–218.
5. G. W. Bentien, M. A. Gonzalez, J. W. Young, *Alternative analytic method for calculating fluid-loaded plate admitance.* — J. sound and vibration **47,** No. **1** (1976), 136–137.
6. D. G. Crighton, *Author's reply.* — J. sound and vibration **47,** No. **1** (1976), 137–138.
7. P. W. Smith, *Line input admitance of fluid-loaded wave-bearing layers.* — J. sound and vibration **48,** No. **1** (1976), 45–56.
8. D. P. Kouzov, *On the possibility of regularization of boundary-contact integrals.* Day on difraction. International seminar. Saint Petersburg. 1997. Abstracts. pp. 24–26.
9. В. И. Смирнов, *Курс высшей математики.* Т. 3, часть 2. ГИТТЛ, Москва 1949.

Kouzov D. P. Analytical properties of the transitional admittances of an infinite plate for the boundary contact integrals regularization in two-dimensional problems of acoustic.

The condition of the possibility for the boundary contact integrals regularization in two-dimensional problems of acoustic is considered. On an example of the simplest boundary contact problem of acoustics is shown, that the known sufficient condition of this possibility is necessary as well. The study of analytical properties of the transitional admittances of an infinite plate contacting with a medium are carried out for obtaining this statement. The reviewings are carried out in the common terms, so the results are suitable for arbitrary used models of plates theory and can

be adapted to boundary contact problems of other physical nature.

С.-Петербургский государственный
университет

Поступило 7 ноября 1998 г.