Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 257, 1999 г.

М. А. Лялинов

О РАССЕЯНИИ ВОЛН МЕДЛЕННО РАСШИРЯЮЩИМСЯ КОНТУРОМ

1. Постановка задачи

Мы рассматриваем следующую задачу. Невозмущенное волновое поле – плоская волна зависит от двух пространственных переменных и времени, $U^i = e^{-ik(\tau-y)}$, $k = \omega/c$ волновое число, $c = 1$. В момент времени $\tau = 0$ возникает плоская область, границей которой является равномерно расширяющийся контур. В результате взаимодействия расширяющейся плоской области (с условием Дирихле на границе) и невозмущенного волнового поля U^i возникает рассеянное контуром поле $v(\tau, x, y)$. Фронт волны возмущения распространяется со скоростью волн $c = 1$. Формальная постановка задачи предполагает, что полное поле $U = v + U^i$ удовлетворяет волновому уравнению

$$\Box U = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\right) U = 0 \qquad (1)$$

внутри светового конуса $\Gamma = \{(x, y, \tau) : x^2 + y^2 - \tau^2 = 0, \tau > 0\}$ и вне поверхности S конуса, $S = \{(x, y, \tau) : \Phi(x/\tau, y/\tau) = 0, \tau > 0\}$, Φ – гладкая функция. Поверхность S описывает положение рассеивающего контура во все моменты времени $\tau \geqslant 0$. На конической поверхности S выполнено условие Дирихле

$$(v + U^i)\big|_S = 0. \qquad (2)$$

Возмущенное волновое поле v обращается в ноль на световом конусе Γ

$$v\big|_\Gamma = 0 \qquad (3)$$

и удовлетворяет условию типа Мейкснера [1] в окрестности сингулярной точки границы конусов O (Рис. 1). Как следует из результатов работы [1], упомянутому условию можно придать вид

$$v = O\left(\left[1 - \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\tau}\right]^{1/2}\right), \quad \tau \to 0. \qquad (4)$$

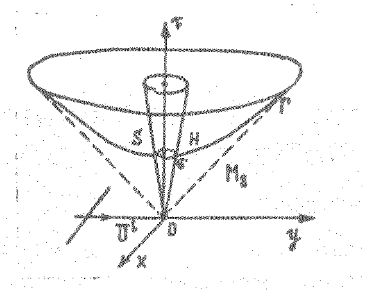

Рис. 1.

Если скорость расширения контура мала, то есть конус K с границей S узкий, мы построим формальное асимптотическое решение задачи. Асимптотическое решение имеет различный вид в D_0 – окрестности вершины O ($\tau \lesssim \beta^{1-\delta}$, $\delta > 0$ мало), и подобластях D_1 и $D_2 \subset G \setminus K$, β малый параметр задачи, пропорциональный относительной скорости расширения. $D_1 \subset G \setminus K$ – некоторая окрестность границы S вне D_0, D_2 оставшаяся часть области $G \setminus K$, причем мы считаем что G это ограниченный конус, т.е. $\tau \in (0, \tau_0)$, $\tau_0 < \text{const}$). Более точное описание областей D_1 и D_2, а также параметра β, мы приведем ниже.

2. Асимптотика решения вне малой окрестности точки O

Обратимся к формальному асимптотическому решению задачи (1)–(4) вне области D_0. Введем в $G \setminus K$ псевдосферические координаты

$$x = r \operatorname{sh}\theta \sin\varphi,$$
$$y = r \operatorname{sh}\theta \cos\varphi,$$
$$\tau = r \operatorname{ch}\theta,$$

где $0 < r < \infty$, $0 < \theta < \infty$ и $0 \leqslant \varphi < 2\pi$. Уравнение (1) принимает вид

$$r^{-2}\Box_0 v - r^{-2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} v\right) = 0, \tag{5}$$

где в (5) введено обозначение

$$\Box_0 = \frac{1}{\operatorname{sh}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sh}\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\operatorname{sh}^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

оператор Лапласа–Бельтрами на псевдосфере H, $r = 1$ (Рис. 1). Для невозмущенной плоской волны мы легко получаем разложение

$$U^i = \exp(-ikr[\operatorname{ch}\theta - \operatorname{sh}\theta\cos\varphi]) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-ikr)^m}{m!}(\operatorname{ch}\theta - \operatorname{sh}\theta\cos\varphi)^m.$$

Естественно искать решение задачи (1)–(4) в виде

$$v(r,\theta,\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} r^m\, v_m\,(\theta,\varphi). \tag{6}$$

Подставляя выражение (6) в уравнение (5) и в граничное условие, мы приходим к задаче

$$\Box_0 v_m - \lambda_m v_m = 0, \quad \lambda_m = m(m+1), \tag{7}$$

$$v_m\big|_\sigma = -\frac{(-ik)^m}{m!}(\operatorname{ch}\theta - \operatorname{sh}\theta\cos\varphi)^m\big|_\sigma, \tag{8}$$

где $\sigma = S \cup H$. С задачей (7), (8) на единичной псевдосфере с отверстием можно связать оператор, который в существенном самосопряжен. При этом оказывается, что задача (7), (8) однозначно разрешима в соответствующем классе функций, так как точки λ_m не принадлежат спектру этого оператора. Заметим, что, пользуясь преобразованием Меллина вместо (6), можно доказать и однозначную* разрешимость исходной задачи (1)–(4).

Мы называем конус K узким, если диаметр области Σ_β, отсекаемой в H конической поверхностью S, является малым. Пусть полюс P псевдосферы H принадлежит области Σ_β. Проведем касательную плоскость $\mathbb{R}^2$ к H в точке P и спроектируем область Σ_β на $\mathbb{R}^2$. Мы получим малую область $\varkappa_\beta$. Пусть (x_1, x_2, x_3) координатная система в пространстве Минковского M_3 с началом в точке $P : (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $x_3 = \tau - 1$. Уравнение псевдосферы в этих координатах имеет вид $x_3 = \sqrt{1 + x_1^2 + x_2^2} - 1$, а координаты x_1 и x_2 могут рассматриваться как координаты на псевдосфере.

Мы предполагаем, что область $\varkappa_\beta$ мала или, более точно, точки ее границы $\partial\varkappa_\beta$ получаются преобразованием подобия из точек (X_1, X_2) фиксированной замкнутой кривой $\partial\varkappa$

$$\partial\varkappa_\beta = \{\,(x_1,x_2) : x_i = \beta X_i,\ i = 1,2; (X_1,X_2) \in \partial\varkappa\,\},$$

*В работе [1] доказательство единственности решения задачи для уравнений Максвелла содержит ошибку.

т.е. $\partial\varkappa_\beta$ это образ кривой $\partial\varkappa$ при преобразовании подобия с коэффициентом β, $\beta \ll 1$.

Мы следуем работе [2] и найдем асимптотику v_m в окрестности $\partial\varkappa_\beta$ (а значит и в области $D_1 \subset G\backslash K$), которую мы называем внутренней областью, и вне ее, в так называемой внешней области (следовательно и в области $D_2 \subset G\backslash K$). Соответствующие асимптотические разложения мы назовем внутренним и внешним. По определению внешняя область это подобласть H, которая проектируется на внешность круга

$$\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leqslant c_2\beta^{\alpha_2}, \quad c_2 > 0, \quad 0 < \alpha_2 < 1.$$

Внутренняя область это подобласть $H \setminus \Sigma_\beta$, которая проектируется в круг

$$\rho \leqslant c_1\beta^{\alpha_1}, \quad c_1 > 0, \quad 0 < \alpha_1 < \alpha_2.$$

Естественно искать асимптотическое решение задачи (7), (8) во внутренней области [2] в растянутых координатах (X_1, X_2). Для этого, мы прежде всего перепишем (7), (8) в координатах (x_1, x_2) на псевдосфере H. Имеем

$$d\ell^2 = (dx_3^2 - dx_1^2 - dx_2^2)\big|_H = g_{ij}\,dx_i dx_j,$$

где

$$g_{ij} = -\delta_{ij} + \frac{x_i x_j}{1 + x_1^2 + x_2^2}, \quad g = \det\{g_{ij}\},$$

и

$$\Box_0 = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(g^{ij}\sqrt{g}\frac{\partial}{\partial x_i}\right).$$

Тензор g^{ij} является обратным к метрическому g_{ij}. В растянутых координатах уравнение (7) принимает вид

$$\frac{\beta^{-2}}{\sqrt{G_0}}\frac{\partial}{\partial X_i}\left(G_{ij}\sqrt{G_0}\,\frac{\partial v_m}{\partial X_j}\right) - m(m+1)v_m = 0, \tag{9}$$

$$G_0 = \det\{I + O(\beta^2)\} = 1 + O(\beta^2),$$

$$G^{ij}\sqrt{G_0} = -\delta_{ij} + O(\beta^2).$$

Во внутренней области решение задачи (7), (8) ищется в виде разложения

$$V_m = \sum_{p=0}^{\infty} V_p(X_1, X_2, \log\beta, m)\beta^p, \tag{10}$$

где V_p искомые функции могут рационально зависеть от $\log\beta$. Введем фундаментальное решение соответствующее оператору $\Box_0 - m(m+1)$

$$q(P,R) = -\frac{1}{2\pi} Q_m(\operatorname{ch}\theta_0), \quad R \in H,$$

где $\theta_0 = \operatorname{dist}(P,R)$ расстояние между точками P и R вдоль псевдосферы H, $Q_m(x)$ функция Лежандра второго рода [3]

$$Q_m(x) = \int\limits_0^{\zeta(x)} \left(x - \sqrt{x^2-1}\operatorname{ch}\psi\right)\, d\psi,$$

$$\zeta(x) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{x+1}{x-1}\right).$$

Внешнее разложение ищем в виде мультипольного анзаца

$$v_m = A_0 q + \beta\left(A_1 q + A_1^j \frac{\partial q}{\partial x_j^0}\right) + \ldots, \tag{11}$$

где $\partial/\partial x_j^0$ означает дифференцирование по координатам точки P. Необходимо сшить разложения (10) и (11) в кольце

$$c_2\beta^{\alpha_2} < \rho < c_1\beta^{\alpha_1},$$

где внешнее и внутрннее разложения применимы одновременно. Мы найдем лишь старшие члены разложений (10) и (11), нахождение последующих членов не вызывает затруднений. Подставляя разложение (10) в уравнение (9), мы получим в старшем порядке

$$\Delta_{X_1,X_2} V_0 = 0, \quad \Delta_{X_1,X_2} = \frac{\partial^2}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial X_2^2}. \tag{12}$$

Из граничного условия следует

$$V_0\big|_{\partial\varkappa} = (-1)\frac{(-ik)^m}{m!}. \tag{13}$$

Уравнения (12), (13) должны быть дополнены условием на бесконечности, которое следует из условия сшивания разложений (10) и (11) в указанном кольце. Принимая во внимание разложения

$$\operatorname{ch}\theta_0 = \sqrt{1 + x_1^2 + x_2^2} = 1 + \rho^2/2 + 0(\rho^4),$$

$$Q_m(x) = -\frac{1}{2}\log\left(\frac{x-1}{2}\right) - \psi(m+1) + \psi(1) + O\left((x-1)\log(x-1)\right),$$

где $\psi(x)$ логарифмеческая производная гамма функции и $-\psi(1) = c$ постоянная Эйлера, получим

$$V_0 \sim \left(-\frac{A_0}{2\pi}\right)\left(-\log(\beta R_0) + \log 2 - \psi(m+1) - c\right), \qquad (14)$$

$$R_0 = \sqrt{X_1^2 + X_2^2} \to \infty, \quad \beta \to 0.$$

Для изучения задачи (12)–(14) введем вспомогательную функцию $E(X_1, X_2)$ по формуле

$$V_0 = D + B \cdot E,$$

где D и B постоянные, а E является решением задачи

$$\Delta E = 0, \quad E\big|_{\partial\varkappa} = 0, \quad E = \log R_0 + O(1). \qquad (15)$$

Легко показать, что решение задачи (15) имеет асимптотику [2]

$$E = \log R_0 + W + O(1/R_0). \qquad (16)$$

По определению постоянная W в (16) винеровская емкость области $\mathbb{R}^2 \setminus \varkappa$. Она связана с внешним конформным радиусом a области соотношением $a = \exp(-W)$. Последний может быть вычислен для многих областей с помощью конформных отображений. Принимая во внимание задачи (12)–(14) и (15), легко находим

$$D = -(-ik)^m/m!,$$

$$A_0 = (-2\pi D)/(W - \log(\beta/2) - \psi(m+1) - c),$$

$$B = A_0/(2\pi).$$

В старшем порядке для внешнего и внутреннего разложений мы получим

$$v_m = (-1)\frac{(-ik)^m Q_m(\operatorname{ch}\theta_0)}{m!(W_{\beta/2} - \psi(m+1) - c)}\left((1 + O(\beta/\log\beta)\right),$$

$$v_m = (-1)\frac{(-ik)^m}{m!}\left(1 - \frac{E(X_1, X_2)}{W_{\beta/2} - \psi(m+1) - c}\right)\left((1 + O(\beta/\log\beta)\right),$$

где $W_{\beta/2} = W - \log(\beta/2)$. Таким образом, в области D_2 в старшем порядке асимптотика имеет вид

$$v = -\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-ikr)^m}{m!} \frac{Q_m(\operatorname{ch}\theta_0)}{W_{\beta/2} - \psi(m+1) - c} \left((1 + O(\beta/\log\beta)\right). \qquad (17)$$

Формула (17) может быть дополнительно упрощена для достаточно малых значений $(\log\beta)^{-1}$. Так как $W_{\beta/2} \sim \log\beta$, мы можем формально пренебречь $\psi(m+1) + c$ по сравнению с $W_{\beta/2}$, воспользоваться интегральным представлением для $Q_m(x)$ и переставить порядок суммирования и интегрирования. Воспользовавшись разложением Тейлора для экспоненты, мы приходим к формуле

$$v = -\frac{1}{W_{\beta/2}} \int_0^{\xi(x,y,\tau)} \exp\left(-ik\left[\tau\sqrt{x^2+y^2}\,\operatorname{ch}\psi\right]\right) d\psi \left(1 + O\left(\frac{1}{\log\beta}\right)\right),$$

$$\xi(x,y,\tau) = \frac{1}{2}\log\frac{\tau + \sqrt{\tau^2 - x^2 - y^2}}{\tau - \sqrt{\tau^2 - x^2 - y^2}}. \qquad (18)$$

В отличие от (17) относительная погрешность старшего приближения в (18) равна $O(\frac{1}{\log\beta})$. Вычисления, приводящие к (18), могут быть легко обоснованы.

Заметим, что для значений малого параметра $\beta = \beta(m)$, удовлетворяющих уравнению $W_{\beta(m)/2} = \psi(m+1) + c$, знаменатель в формуле (18) обращается в ноль. Однако, для таких m соответствующими слагаемыми в ряде уже можно пренебречь, так как $m!$ в знаменателе очень велико, $|\log\beta(m)| \sim \log m$. При обосновании асимптотик соответствующие значения $\beta(m)$ должны быть исключены из интервала $(0, \beta_0)$, $\beta \to 0$. Асимптотика решения в области D_0 может быть найдена методами работы [1].

Литература

1. В. М. Бабич, М. А. Лялинов, *О рассеянии волн расширяющейся поверхностью.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **250** (1998), 35–48.
2. В. М. Бабич, *О дифракции высокочастотной акустической волны на узком абсолютно жестком конусе произвольной формы.* — Прикладная математика и механика **60(1)** (1996), 72–78.
3. Ф. Олвер, *Асимптотика и специальные функции.* Наука, М. (1990).

Lyalinov M. A. On scattering of waves by a slowly expanding contour.

Scattering of a plane wave by an expanding contour which arises at the initial moment of time is discussed. Formal asymptotic solutions in characteristic subdomains are computed for the small relative speed of expansion.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 10 сентября 1998 г.