Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 257, 1999 г.

Л. А. Молотков

О КОЭФФИЦИЕНТАХ ИЗВИЛИСТОСТИ ПОР В ЭФФЕКТИВНОЙ МОДЕЛИ БИО

В настоящее время для исследования распространения волн в твердых пористых средах, насыщенных жидкостью, используются уравнения эффективной модели Био. Эта двухфазная модель, объединяющая движения твердых и жидких частиц, была предложена Био [1] более 40 лет тому назад, однако до сих пор не установлен точный физический смысл смещений и напряжений, а также не получены выражения для всех параметров, входящих в уравнение Био. В частности, необоснованными оказались уравнения модели Био как сплошной среды. Для обоснования этих уравнений в работе Био [2] предлагается линейная связь между составляющими скорости жидких микрочастиц в порах и относительной скоростью в жидкой фазе. Однако вследствие неопределенности коэффициентов в этой связи обоснование нельзя считать удовлетворительным, хотя сами уравнения Био не вызывают сомнения.

В связи с этим в предлагаемой работе исследуется точное выражение для плотности кинетической энергии в пористой флюидонасыщенной среде и вводится дисперсия нормированных скоростей жидких частиц. Этот новый параметр оказался связанным простым соотношением с известной ранее извилистостью пор. В результате устанавливаются физический смысл и точные выражения для извилистости в случаях, когда фазы пористой среды являются или изотропными, или трансверсально-изотропными, при этом уравнения сплошной пористой среды получают обоснование.

Пусть задана твердая пористая среда, насыщенная жидкостью. Упругий скелет и жидкость занимают связанные и проникающие друг в друга области. Частицы жидкости и скелета размещены так, что в малой сфере вокруг любой точки среды на-

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ) грант 99-05-64127.

ходятся как жидкие, так и твердые частицы и их относительные объемы равны соответственно пористости ε и параметру $1-\varepsilon$. Для простоты предположим, что волновое поле в пористой среде не зависит от координаты y и не содержит составляющих смещений вдоль этой координаты. Поле характеризуется смещениями u_x, u_z, U_x, U_z соответственно в упругих и жидких областях, напряжениями в скелете $\sigma_{xx}, \sigma_{zz}, \sigma_{xz}$ и давлением в жидкости $-\sigma$. Эти величины будут заменены осредненными смещениями и напряжениями, которые входят в уравнения эффективной модели Био [1, 2]. Будем предполагать, что строение пор и свойства жидкости таковы, что эффективная модель будет однородной и трансверсально-изотропной с осью анизотропии вдоль оси z.

При выводе эффективной модели Био смещения и напряжения в пористой среде заменяются осредненными по малой сфере смещениями и напряжениями. Чтобы выразить осредненные величины разделим малую сферу на две области: область жидкой среды Ω_0 и область скелета Ω_1 и обозначим их объемы соответственно через V_0 и V_1. Осредненные смещения представятся равенствами

$$\begin{aligned} \bar{u}_x &= \frac{1}{V_1}\iint_{\Omega_1} u_x\,dx\,dz, \quad \bar{u}_z = \frac{1}{V_1}\iint_{\Omega_1} u_z\,dx\,dz, \\ \bar{U}_x &= \frac{1}{V_0}\iint_{\Omega_0} U_x\,dx\,dz, \quad \bar{U}_z = \frac{1}{V_0}\iint_{\Omega_0} U_z\,dx\,dz. \end{aligned} \tag{1}$$

Напряжения σ_{xx}, σ_{zz}, σ_{xz} и σ осредняются по всему объему малой сферы, включая и области, где они обращаются в нуль [3, 4]. Результаты этих осреднений обозначаются через $\tau_{xx}, \tau_{zz}, \tau_{xz}$ и τ и выражаются равенствами

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= \frac{1}{V_0+V_1}\iint_{\Omega_1} \sigma_{xx}\,dx\,dz \quad \tau_{zz} = \frac{1}{V_0+V_1}\iint_{\Omega_1} \sigma_{zz}\,dx\,dz, \\ \tau_{xz} &= \frac{1}{V_0+V_1}\iint_{\Omega_1} \sigma_{xz}\,dx\,dz, \quad \tau = \frac{1}{V_0+V_1}\iint_{\Omega_0} \sigma\,dx\,dz. \end{aligned} \tag{2}$$

Чтобы осредненные величины имели бы смысл, следует предположить, что среда и волновое поле обладают таким свойством, что результаты осреднений не зависят существенно от радиуса малой сферы. Для выполнения этого предположения необходимо, чтобы упомянутый радиус был много меньше доминирующей длины волны и чтобы в малой окрестности находилось несколько пор. Все осредненные величины определены во всех точках области и в каждой точке волновое поле характеризуется двумя векторами смещений и двумя тензорами напряжений. Поэтому осредненная модель является двухфазной.

Для вывода уравнений движения модели как сплошной среды составим выражение для плотности кинетической энергии. Плотность кинетической энергии трансверсально-изотропной упругой среды выражается равенством

$$W_k = \frac{\rho_s}{2}\left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial t}\right)^2\right], \tag{3}$$

где ρ_s – плотность среды. В качестве трансверсально-изотропной жидкой среды рассмотрим эффективную модель, которая получается после осреднения жидких слоев [5]. В этой модели эффективная плотность вдоль слоев равна ρ_{fx}, а эффективная плотность в перпендикулярном направлении совпадает с реальной плотностью ρ_{fz} [5] и $\rho_{fz} > \rho_{fx}$. Поэтому плотность кинетической энергии в трансверсально-изотропной жидкой среде определяется соотношением

$$W_k = \frac{\rho_{fx}}{2}\left(\frac{\partial U_x}{\partial t}\right)^2 + \frac{\rho_{fz}}{2}\left(\frac{\partial U_z}{\partial t}\right)^2, \tag{4}$$

а плотность кинетической энергии в пористой среде выражается равенством

$$\begin{gathered} W_k = \frac{\rho_s(1-\varepsilon)}{2V_1}\iint_{\Omega_1}\left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial t}\right)^2\right]dx\,dz + \\ + \frac{\rho_{fx}\varepsilon}{2V_0}\iint_{\Omega_0}\left(\frac{\partial U_x}{\partial t}\right)^2 dx\,dz + \frac{\rho_{fz}\varepsilon}{2V_0}\iint_{\Omega_0}\left(\frac{\partial U_z}{\partial t}\right)^2 dx\,dz. \end{gathered} \tag{5}$$

Преобразуем выражение (5) с помощью равенства

$$\frac{1}{V_i}\iint\limits_{\Omega_i} u^2\,dx\,dz = \bar{u}^2 + \frac{1}{V_i}\iint\limits_{\Omega_i}(u-\bar{u})^2\,dx\,dz \quad (i=0,1), \tag{6}$$

в котором $u(x,z)$ – произвольная функция, а

$$\bar{u} = \frac{1}{V_i}\iint\limits_{\Omega_i} u\,dx\,dz \quad (i=0,1). \tag{7}$$

Соотношения (6) и (7) являются следствием формулы для дисперсии случайной величины. С учетом (1), (6) и (7) равенство (5) переходит в соотношение

$$
\begin{gathered}
W_k = \frac{\rho_s(1-\varepsilon)}{2}\left[\left(\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{u}_z}{\partial t}\right)^2\right] + \\
+\frac{\rho_{fx}\varepsilon}{2}\left(\frac{\partial \bar{U}_x}{\partial t}\right)^2 + \frac{\rho_{fz}\varepsilon}{2}\left(\frac{\partial \bar{U}_z}{\partial t}\right)^2 + \\
+\frac{\rho_s(1-\varepsilon)}{2V_1}\iint\limits_{\Omega_1}\left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial t} - \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} - \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial t}\right)^2\right] dx\, dz + \qquad (8) \\
+\frac{\rho_{fx}\varepsilon}{2V_0}\iint\limits_{\Omega_0}\left(\frac{\partial U_x}{\partial t} - \frac{\partial \bar{U}_x}{\partial t}\right)^2 dx\, dz + \frac{\rho_{fz}\varepsilon}{2V_0}\iint\limits_{\Omega_0}\left(\frac{\partial U_z}{\partial t} - \frac{\partial \bar{U}_z}{\partial t}\right)^2 dx\, dz.
\end{gathered}
$$

Входящие в равенства (8) величины $\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial t}$, $\frac{\partial \bar{u}_z}{\partial t}$, $\frac{\partial \bar{U}_x}{\partial t}$ и $\frac{\partial \bar{U}_z}{\partial t}$ являются осредненными в малой сфере скоростями смещений в твердых и жидких средах и, согласно формулам (1), представляются соотношениями

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial t} &= \frac{1}{V_1}\iint_{\Omega_1}\frac{\partial u_x}{\partial t}\, dx\, dz, & \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial t} &= \frac{1}{V_1}\iint_{\Omega_1}\frac{\partial u_z}{\partial t}\, dx\, dz, \\
\frac{\partial \bar{U}_x}{\partial t} &= \frac{1}{V_0}\iint_{\Omega_0}\frac{\partial U_x}{\partial t}\, dx\, dz, & \frac{\partial \bar{U}_z}{\partial t} &= \frac{1}{V_0}\iint_{\Omega_0}\frac{\partial U_z}{\partial t}\, dx\, dz.
\end{aligned} \qquad (9)
$$

Интегралы

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{V_1}\iint_{\Omega_1}\left(\frac{\partial u_x}{\partial t} - \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial t}\right)^2 dx\, dz, \quad \frac{1}{V_1}\iint_{\Omega_1}\left(\frac{\partial u_z}{\partial t} - \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial t}\right)^2 dx\, dz, \\
&\frac{1}{V_0}\iint_{\Omega_0}\left(\frac{\partial U_x}{\partial t} - \frac{\partial \bar{U}_x}{\partial t}\right)^2 dx\, dz, \quad \frac{1}{V_0}\iint_{\Omega_0}\left(\frac{\partial U_z}{\partial t} - \frac{\partial \bar{U}_z}{\partial t}\right)^2 dx\, dz,
\end{aligned} \qquad (10)
$$

выражают дисперсии скоростей смещений в твердой и жидкой средах. Так как скелет мало изменяет свою форму, то дисперсией скоростей в твердой среде можно пренебречь и отбросить четвертое слагаемое в правой части равенства (8). Пятое и шестое слагаемые в выражении (8), связанные с дисперсией скоростей в жидкой среде, как правило, нельзя отбрасывать, так как жидкость движется в порах, которые могут быть искривленными. Поскольку даже в малой окрестности могут находиться жидкие частицы, движущиеся в противоположных направлениях, то дисперсия скоростей в жидкой среде оказывается значительной. Эта дисперсия сильно зависит от интенсивности источника.

Чтобы исключить эту зависимость полезно рассмотреть дисперсию нормированных скоростей смещений в жидкости

$$\beta_x = \frac{\iint\limits_{\Omega_0} \left(\frac{\partial U_x}{\partial t} - \frac{\partial \bar{U}_x}{\partial t}\right)^2 dx\,dz}{V_0 \left(\frac{\partial \bar{U}_x}{\partial t} - \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial t}\right)^2}, \quad \beta_z = \frac{\iint\limits_{\Omega_0} \left(\frac{\partial U_z}{\partial t} - \frac{\partial \bar{U}_z}{\partial t}\right)^2 dx\,dz}{V_0 \left(\frac{\partial \bar{U}_z}{\partial t} - \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial t}\right)^2}, \tag{11}$$

Будем предполагать, что дисперсии β_x и β_z не зависят от источника, возбуждающего волновое поле, и определяются только строением пор среды. Это предположение является необходимым для обоснования модели Био. В случае отсутствия пор или когда твердая среда не препятствует движению жидких частиц, дисперсия скоростей смещений в жидкости мала. Если же средние вдоль одной из осей скорости в жидкой и твердой средах совпадают, то соответствующая величина (11) обращается в бесконечность. Оба крайних случая реализуются в среде, состоящей из чередующихся тонких упругих и жидких слоев. Вдоль слоев (оси x) упругие слои не препятствуют движению жидких частиц и поэтому скорости всех жидких частиц приблизительно одинаковые и $\beta_x = 0$ [4]. В направлении перпендикулярном слоям (ось z) средние скорости смещений упругих и жидких частиц совпадают и $\beta_z = \infty$ [4]. В промежуточных случаях величины β_x и β_z являются конечными. Для согласования с теорией Био введем коэффициенты извилистости пор по формулам

$$\alpha_x = 1 + 2\beta_x, \quad \alpha_z = 1 + 2\beta_z. \tag{12}$$

Параметры α_x и α_z изменяются в промежутке $[1, \infty)$ и также характеризуют строение пористой среды.

После отбрасывания четвертого слагаемого в формуле (8) и введения параметров (11) и (12) соотношение (8) заменяется равенством

$$W_k = \frac{\rho_s(1-\varepsilon)}{2}\left[\left(\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{u}_z}{\partial t}\right)^2\right] + \\ + \frac{\rho_{fx}\varepsilon}{2}\left(\frac{\partial \bar{U}_x}{\partial t}\right)^2 + \frac{\rho_{fz}\varepsilon}{2}\left(\frac{\partial \bar{U}_z}{\partial t}\right)^2 + \\ + \frac{\rho_{fx}\varepsilon(\alpha_x - 1)}{2}\left(\frac{\partial \bar{U}_x}{\partial t} - \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial t}\right)^2 + \frac{\rho_{fz}\varepsilon(\alpha_z - 1)}{2}\left(\frac{\partial \bar{U}_z}{\partial t} - \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial t}\right)^2, \tag{13}$$

которое содержит только осредненные скорости смещений. Если раскрыть скобки в выражении (13), то придем к соотношению

$$W_k = \frac{\rho_{11x}}{2}\left(\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial t}\right)^2 + \frac{\rho_{11z}}{2}\left(\frac{\partial \bar{u}_z}{\partial t}\right)^2 + \frac{\rho_{22x}}{2}\left(\frac{\partial \bar{U}_x}{\partial t}\right)^2 + \frac{\rho_{22z}}{2}\left(\frac{\partial \bar{U}_z}{\partial t}\right)^2 + \\ + \rho_{12x}\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial t}\frac{\partial \bar{U}_x}{\partial t} + \rho_{12z}\frac{\partial \bar{u}_z}{\partial t}\frac{\partial \bar{U}_z}{\partial t}, \tag{14}$$

в котором

$$\begin{aligned} \rho_{11x} &= \rho_s(1-\varepsilon) + \varepsilon\rho_{fx}(\alpha_x - 1), \\ \rho_{11z} &= \rho_s(1-\varepsilon) + \varepsilon\rho_{fz}(\alpha_z - 1), \\ \rho_{22x} &= \varepsilon\rho_{fx}\alpha_x, \quad \rho_{22z} = \varepsilon\rho_{fz}\alpha_z, \\ \rho_{12x} &= -\rho_{fx}\varepsilon(\alpha_x - 1), \quad \rho_{12z} = -\rho_{fz}\varepsilon(\alpha_z - 1). \end{aligned} \tag{15}$$

Выражение (14) для плотности кинетической энергии должно быть положительно определенным. Это требование выполняется, так как коэффициенты (15) удовлетворяют неравенствам

$$\begin{gathered} \rho_{11x} > 0, \quad \rho_{22x} > 0, \\ \rho_{11x}\rho_{22x} - \rho_{12x}^2 = \rho_{fx}\varepsilon[\rho_s\alpha_x(1-\varepsilon) + \rho_{fx}\varepsilon(\alpha_x - 1)] > 0, \\ \rho_{11z} > 0, \quad \rho_{22z} > 0, \\ \rho_{11z}\rho_{22z} - \rho_{12z}^2 = \rho_{fz}\varepsilon[\rho_s\alpha_z(1-\varepsilon) + \rho_{fz}\varepsilon(\alpha_z - 1)] > 0 \end{gathered} \tag{16}$$

и образуют положительно определенные матрицы

$$\begin{pmatrix} \rho_{11x} & \rho_{12x} \\ \rho_{12x} & \rho_{22x} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \rho_{11z} & \rho_{12z} \\ \rho_{12z} & \rho_{22z} \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Из выражений для плотности кинетической энергии (14), с учетом известных формул для плотности потенциальной энергии и на основании принципа Гамильтона, следуют уравнения сплошной среды

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \rho_{11x} \frac{\partial^2 \bar{u}_x}{\partial t^2} + \rho_{12x} \frac{\partial^2 \bar{U}_x}{\partial t^2}, \\
&\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} = \rho_{11z} \frac{\partial^2 \bar{u}_z}{\partial t^2} + \rho_{12z} \frac{\partial^2 \bar{U}_z}{\partial t^2}, \\
&\frac{\partial \tau}{\partial x} = \rho_{12x} \frac{\partial^2 \bar{u}_x}{\partial t^2} + \rho_{22x} \frac{\partial^2 \bar{U}_x}{\partial t^2}, \\
&\frac{\partial \tau}{\partial z} = \rho_{12z} \frac{\partial^2 \bar{u}_z}{\partial t^2} + \rho_{22z} \frac{\partial^2 \bar{U}_z}{\partial t^2}.
\end{aligned} \tag{18}
$$

Уравнения (18) совместно с законом Гука описывают эффективную осредненную модель среды, в которой чередуются однородные изотропные слои Био [6]. Обе фазы этой модели являются трансверсально-изотропными, а сама модель названа в работе [6] обобщенной трансверсально-изотропной моделью Био. Обычная трансверсально-изотропная модель Био учитывает анизотропию только упругой фазы. Эта модель Био также характеризуется уравнениями (18) и равенствами (8), (12)–(15), в которых

$$
\rho_{fx} = \rho_{fz}, \quad \alpha_x \neq \alpha_z. \tag{19}
$$

Изотропная модель Био описывается уравнениями (18) и равенствами (8), (12)–(15), при этом

$$
\rho_{fx} = \rho_{fz}, \quad \alpha_x = \alpha_z, \quad \rho_{11x} = \rho_{11z}, \quad \rho_{12x} = \rho_{12z}, \quad \rho_{22x} = \rho_{22z}. \tag{20}
$$

Число неравных коэффициентов в уравнениях (18) в этом случае сокращается до трех.

Литература

1. M. A. Biot, *Theory of propagation of elastic waves in fluid-saturated porous solid. I Low-frequency range.* — J. Acoust. Soc. Am. **28**, No. **2** (1956), 168–178.
1. M. A. Biot, *Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media.* — J. Appl. Phys. **33**, No. **4** (1962), 1482–1498.
3. O. Coussy, T. Bourbie, *Propagation des ondes, acoustiques dans les milieux poreux satures.* — Revue de L'Institut Francais du Petrole **39**, No. **1** (1984), 47–66.
4. Л. А. Молотков, А. В. Бакулин, *Эффективная модель слоистой упруго-жидкой среды как частный случай модели Био.* — Зап. научн, семин. ПОМИ **230** (1995), 172–195.
5. Л. А. Молотков, *Об эквивалентности слоисто-периодических и трансверсально-изотропных сред.* — Зап. научн, семин. ЛОМИ **89** (1979), 219–233.

6. Л. А. Молотков, А. В. Бакулин, *Эффективные модели слоистых сред, содержащих пористые слои Био.* — Зап. научн, семин. ПОМИ **239** (1997), 140–163.

Molotkov L. A. On coefficients of pore tortuosity in the effective Biot model.

In order to satisfy the derivation of the effective Biot model of porous medium the exact expression of density of kinetic energy is established and studied. In investigating this expression the displacements and their velocities are averaged and dispersion of normalized velocities in the fluid phase is introduced. The involved in Biot equations coefficients of pore tortuosity are expressed in term of dispersion. As result the Biot equations of porous continuous medium are justified.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им.В. А. Стеклова РАН

Поступило 9 февраля 1999 г.