Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 257, 1999 г.

Л. А. Молотков

О РАСПРОСТРАНЕНИИ НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН В ИЗОЛИРОВАННОМ ПОРИСТОМ ФЛЮИДОНАСЫЩЕННОМ СЛОЕ БИО

В связи с большим интересом к распространению волн в пористых флюидонасыщенных средах предлагаемая статья посвящена аналитическому исследованию распространения нормальных волн в свободном слое Био [1]. Изучение волновых процессов в таком слое является важным как основа для исследования интерференционных волн в слоистых средах и, в частности, в пористом слое, разделяющем два пористых или упругих полупространства. Особенно важными являются дисперсионные кривые, определяющие зависимость фазовых скоростей нормальных волн в изолированном слое от частоты или волнового числа, так как эти кривые могут рассматриваться как частный случай дисперсионных кривых для пористого слоя, находящегося в контакте с другими средами. Проведенные в работе исследования дисперсионных кривых нормальных волн были выполнены не численными, а аналитическими методами, и поэтому полученные результаты относятся к любым возможным параметрам пористых слоев Био. Используемые в работе методы являются обобщением подходов, которые применялись в статьях [2, 3] при исследовании дисперсионных уравнений в случае изолированных упругих слоев.

Другая тема этой работы состоит в исследовании возможности образования поверхностной волны Релея на свободной плоской границе пористой среды Био. В работе установлено, что волна Релея на указанной границе образуется не при всех параметрах, и выводятся неравенства, при удовлетворении которых волна Релея отсутствует. Свободная граница пористой среды Био существенно отличается от свободной границы упругой среды, так как на ней волна Релея всегда возникает, и подобна границе двух упругих сред, на которой волна Стоунли образу-

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ) грант 99-01-00107.

ется только при выполнении определенного условия. Исследование волновых полей в пористых средах Био проводилось в ряде работ (например, [4, 5]). Однако в этих работах исследование волновых полей осуществлялось только численными методами, поэтому вопрос о возможном отсутствии волны Релея не ставился.

§1. Постановка и решение задачи о волновом поле в изолированном пористом флюидонасыщенном слое

Пусть задан изолированный однородный изотропный пористый слой Био $-h \leqslant z \leqslant h$. Поле смещений и напряжений в этом слое описывается уравнениями

$$\begin{pmatrix} \tau_{xx} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{zz} \\ -p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & A & A & M \\ A & P & A & M \\ A & A & P & M \\ M & M & M & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial u_x/\partial x \\ \partial u_y/\partial y \\ \partial u_z/\partial z \\ \vartheta, \end{pmatrix},$$

$$\tau_{xy} = L\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right), \quad \tau_{xz} = L\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right), \tag{1.1}$$

$$\tau_{yz} = L\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right), \quad \vartheta = \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z},$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Div}\,\boldsymbol{\tau} \\ -\nabla p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho & \rho_f \\ \rho_f & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial^2\mathbf{u}/\partial t^2 \\ \partial^2\mathbf{w}/\partial t^2 \end{pmatrix},$$

в которых $\boldsymbol{\tau}$ – тензор полного напряжения, p и $\mathbf{w}$ – давление и вектор относительных смещений в жидкой фазе, $\mathbf{u}$ – вектор смещений в упругой фазе, P, A, M, R и L – модели ($P = A + 2L$), ρ – общая плотность, ρ_f – плотность жидкой фазы и m – коэффициент с размерностью плотности. Входящие в уравнение (1.1) матрицы предполагаются положительно определенными. Это предположение делает положительными плотности кинетической и потенциальной энергий. Границы слоя $z = -h$ и $z = h$ рассматриваются свободными от напряжений за исключением точки $(0, 0, -h)$, к которой с момента времени $t = 0$ приложена внешняя нормальная сила $f(t)$. Так как образующееся волновое поле обладает осевой симметрией, то его удобно представлять в цилиндрической системе координат r, θ, z. В этой системе координат напряжения и смещения выражаются через потенциалы φ, ϕ и ψ с помощью равенств

$$
\begin{gathered}
\tau_{zz} = \rho\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \rho_f\,\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - 2L\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial\varphi}{\partial r} - \frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial z} - \frac{1}{r}\,\frac{\partial\psi}{\partial z}\right), \\
\tau_{xz} = L\left(2\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\partial z} - \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} - \frac{\psi}{r^2}\right), \\
-p = \rho_f\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + m\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}, \qquad (1.2) \\
u_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\psi}{r}, \quad u_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r} - \frac{\partial\psi}{\partial z}, \\
w_z = \frac{\partial\phi}{\partial z} + \frac{\rho_f}{m}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\psi}{r}\right), \quad w_r = \frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{\rho_f}{m}\,\frac{\partial\psi}{\partial z}.
\end{gathered}
$$

Используемые потенциалы удовлетворяют уравнениям

$$
\begin{gathered}
P\Delta\varphi + M\Delta\phi = \rho\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \rho_f\,\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}, \\
M\Delta\varphi + R\Delta\phi = \rho\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + m\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}, \qquad (1.3) \\
\Delta\psi - \frac{\psi}{r^2} = \rho\frac{m\rho - \rho_f^2}{m}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}.
\end{gathered}
$$

Граничные условия задаются соотношениями

$$
\begin{aligned}
&\tau_{zz} = \frac{\delta(r)f(t)}{2\pi r}, \quad \tau_{\theta z} = p = 0 \qquad \text{при} \quad z = -h, \\
&\tau_{zz} = \tau_{\theta z} = p = 0 \qquad\qquad\quad \text{при} \quad z = h. \qquad (1.4)
\end{aligned}
$$

Так как слой возбуждается источником (1.4) только с момента времени $t = 0$, то потенциалы должны удовлетворять нулевым начальным условиям

$$
\varphi = \phi = \psi = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{\partial\psi}{\partial t} = 0 \qquad (1.5)
$$

при $t = 0$. Для построения волнового поля полезно с учетом начальных условий (1.5) выразить функцию, характеризующую источник, интегралами Фурье–Бесселя и Меллина

$$
\frac{\delta(r)f(t)}{2\pi r} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty \frac{k^2 J_0(kr)dk}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(k\eta)e^{kt\eta}\,d\eta, \qquad (1.6)
$$

в которых

$$F(k\eta) = \int\limits_0^\infty f(t)\, e^{-k\eta t}\, dt. \qquad (1.7)$$

Кроме того, источник, заданный соотношениями (1.4), полезно представить в виде наложения двух источников:

симметричного источника

$$\tau_{zz} = \frac{\delta(r) f(t)}{4\pi r}, \quad \tau_{\theta z} = p = 0 \quad \text{при} \quad z = \pm h \qquad (1.8)$$

и антисимметричного источника

$$\tau_{zz} = \mp \frac{\delta(r) f(t)}{4\pi r}, \quad \tau_{\theta z} = p = 0 \quad \text{при} \quad z = \pm h \qquad (1.9)$$

Симметричный источник (1.8) создает поле смещений, симметричное относительно средней плоскости $z = 0$, а поле смещний от источника (1.9) является антисимметричным относительно $z = 0$.

Решения уравнений (1.3) представляются равенствами

$$\varphi = \int\limits_0^\infty \frac{J_0(kr)dk}{2\pi i} \int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} [X \operatorname{ch} kz\alpha_1 + Y \operatorname{ch} kz\alpha_2]\, e^{kt\eta}\, d\eta,$$

$$\phi = \int\limits_0^\infty \frac{J_0(kr)dk}{2\pi i} \int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} [A_1 X \operatorname{ch} kz\alpha_1 + A_2 Y \operatorname{ch} kz\alpha_2]\, e^{kt\eta}\, d\eta, \qquad (1.10)$$

$$\psi = \int\limits_0^\infty \frac{J_1(kr)dk}{2\pi i} \int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} Z \operatorname{sh} kz\beta\, e^{kt\eta}\, d\eta;$$

$$\varphi = \int\limits_0^\infty \frac{J_0(kr)dk}{2\pi i} \int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} [X \operatorname{sh} kz\alpha_1 + Y \operatorname{sh} kz\alpha_2]\, e^{kt\eta}\, d\eta,$$

$$\phi = \int\limits_0^\infty \frac{J_0(kr)dk}{2\pi i} \int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} [A_1 X \operatorname{sh} kz\alpha_1 + A_2 Y \operatorname{sh} kz\alpha_2]\, e^{kt\eta}\, d\eta, \qquad (1.11)$$

$$\psi = \int\limits_0^\infty \frac{J_1(kr)dk}{2\pi i} \int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} Z \operatorname{ch} kz\beta \, e^{kt\eta} \, d\eta,$$

соответствующими симметричному и антисимметричному случаям. В формулах (1.10) и (1.11) использованы обозначения

$$\alpha_i = \sqrt{1 + \frac{\eta^2}{v_i^2}} \quad (i = 1, 2), \quad \beta = \sqrt{1 + \frac{\eta^2}{v_3^2}},$$

$$v_{1,2}^2 = \frac{Pm + R\rho - 2M\rho_f \pm \sqrt{(Pm + R\rho - 2M\rho_f)^2 - 4(PR - M^2)(\rho m - \rho_f^2)}}{2(\rho m - \rho_f^2)},$$

$$v_3^2 = \frac{Lm}{\rho m - \rho_f^2}, \quad A_{1,2} = \frac{P - \rho v_{1,2}^2}{\rho_f v_{1,2}^2 - M} = \frac{M - \rho_f v_{1,2}^2}{m v_{1,2}^2 - R}. \tag{1.12}$$

Функции $X(k, \eta)$ $Y(k, \eta)$ и $Z(k, \eta)$ определяются в обоих случаях из граничных условий (1.7) и (1.9). После подстановки формул (1.10) в условия (1.8) и после приравнивая подынтегральных функций приходим к уравнениям

$$\begin{gathered}
\left(2L + \rho\eta^2 + A_1\rho_f\eta^2\right) X \operatorname{ch} kh\alpha_1 + \left(2L + \rho\eta^2 + A_2\rho_f\eta^2\right) Y \operatorname{ch} kh\alpha_2 + \\
+ 2L\beta Z \operatorname{ch} kh\beta = F/(4\pi), \\
(\rho_f + mA_1) X \operatorname{ch} kh\alpha_1 + (\rho_f + mA_2) Y \operatorname{ch} kh\alpha_2 = 0, \\
2\alpha_1 X \operatorname{sh} kh\alpha_1 + 2\alpha_2 Y \operatorname{sh} kh\alpha_2 + \left(2 + \eta^2/v_3^2\right) Z \operatorname{sh} kh\beta = 0,
\end{gathered} \tag{1.13}$$

определяющим функции X, Y и Z в симметричном случае. После ряда элементарных преобразований уравнения (1.13) заменяются системой уравнений

$$\begin{gathered}
g \operatorname{ch} kh\alpha_1 X + g \operatorname{ch} kh\alpha_2 Y + 2\beta \operatorname{ch} kh\beta Z = F/(4\pi L), \\
\left(v_2^2 - v_4^2\right) \operatorname{ch} kh\alpha_1 X + \left(v_1^2 - v_4^2\right) \operatorname{ch} kh\alpha_2 Y = 0, \\
2\alpha_1 \operatorname{sh} kh\alpha_1 X + 2\alpha_2 \operatorname{sh} kh\alpha_2 Y + g \operatorname{sh} kh\beta Z = 0,
\end{gathered} \tag{1.14}$$

в которой

$$g = 2 + \eta^2/v_s^2, \quad v_4^2 = R/m. \tag{1.15}$$

Решение системы (1.14) представляется равенствами

$$\Delta_0 = (v_1^2 - v_2^2)g^2 \operatorname{th} kh\beta - 4(v_1^2 - v_4^2)\alpha_1\beta \operatorname{th} kh\alpha_1 - 4(v_4^2 - v_2^2)\alpha_2\beta \operatorname{th} kh\alpha_2,$$

$$X = \frac{(v_1^2 - v_4^2)gF \operatorname{th} kh\beta}{4\pi L\Delta_0 \operatorname{ch} kh\alpha_1}, \quad Y = \frac{(v_4^2 - v_2^2)gF \operatorname{th} kh\beta}{4\pi L\Delta_0 \operatorname{ch} kh\alpha_2}, \tag{1.16}$$

$$Z = -\frac{F[(v_1^2 - v_4^2)\alpha_1 \operatorname{th} kh\alpha_1 + (v_4^2 - v_2^2)\alpha_2 \operatorname{th} kh\alpha_2]}{2\pi L\Delta_0 \operatorname{ch} kh\beta}.$$

Полученные формулы (1.16) совместно с соотношениями (1.2), (1.7), (1.10) и (1.12) определяют поля потенциалов, смещения и напряжений симметричного источника (1.8).

Аналогичный вывод проводится в случае антисимметричного источника (1.9). В результате этого вывода приходим к системе уравнений

$$g \operatorname{sh} kh\alpha_1 X + g \operatorname{sh} kh\alpha_2 Y + 2\beta \operatorname{sh} kh\beta Z = -F/(4\pi L),$$

$$(v_4^2 - v_2^2) \operatorname{sh} kh\alpha_1 X + (v_1^2 - v_1^2) \operatorname{sh} kh\alpha_2 Y = 0, \tag{1.17}$$

$$2\alpha_1 \operatorname{ch} kh\alpha_1 X + 2\alpha_2 \operatorname{ch} kh\alpha_2 Y + g \operatorname{ch} kh\beta Z = 0,$$

решение которой выражается соотношениями

$$\Delta_1 = (v_1^2 - v_2^2)g^2 \operatorname{cth} kh\beta - 4(v_1^2 - v_4^2)\alpha_1\beta \operatorname{cth} kh\alpha_1 - 4(v_4^2 - v_2^2)\alpha_2\beta \operatorname{cth} kh\alpha_2,$$

$$X = -\frac{(v_1^2 - v_4^2)gF \operatorname{cth} kh\beta}{4\pi L\Delta_1 \operatorname{sh} kh\alpha_1}, \quad Y = -\frac{(v_4^2 - v_2^2)gF \operatorname{cth} kh\beta}{4\pi L\Delta_1 \operatorname{sh} kh\alpha_2}, \tag{1.18}$$

$$Z = \frac{F[(v_1^2 - v_4^2)\alpha_1 \operatorname{cth} kh\alpha_1 + (v_4^2 - v_2^2)\alpha_2 \operatorname{cth} kh\alpha_2]}{2\pi L\Delta_1 \operatorname{sh} kh\beta}.$$

§2. Исследование дисперсионных уравнений

Для исследования волновых полей (1.2), (1.10), (1.11), (1.16) и (1.18) необходимо выяснить особенности подынтегральных функций на плоскости η. Чтобы исключить зависимость поля от приложенной силы, будем предполагать, что функция $F(k\eta)$ не имеет особенностей. Это предположение соответствует случаю $f(t) = \delta(t)$. С учетом этого предположения функции $X \operatorname{ch} kz\alpha_1$, $Y \operatorname{ch} kz\alpha_2$, $Z \operatorname{sh} kz\beta$, $X \operatorname{sh} kz\alpha_1$, $Y \operatorname{sh} kz\alpha_2$ и $Z \operatorname{ch} kz\beta$ не имеют точек ветвления, а имеют только полюса, совпадающие с корнями уравнений

$$\Delta_0(k, \eta) = 0, \tag{2.1}$$

$$\Delta_1(k, \eta) = 0, \qquad (2.2)$$

соответствующих симметричному и антисимметричному случаям.

Корни обоих уравнений расположены только на мнимой оси плоскости η. Чтобы убедиться в справедливости этого утверждения, заметим, что величины $\Delta_0(k, \eta)$ и $\Delta_1(k, \eta)$ являются вещественными на всей мнимой оси. Отсюда следует, что, если существует комплексный или вещественный корень уравнения (2.1) или (2.2) в левой полуплоскости η, то в правой полуплоскости находится ему симметричный относительно мнимой оси корень того же уравнения. Существование корней уравнений (2.1) и (2.2) в левой полуплоскости исключается, так как в этом случае, в соответствии с леммой Жордана, не выполняются нулевые начальные условия (1.5). Поскольку исключаются корни вне мнимой оси, то приходим к выводу, что уравнения (2.1) и (2.2) могут иметь только чисто мнимые корни $\eta = i\tau$.

Интегралы Меллина, входящие в выражения для потенциалов (1.10) и (1.11), а также в выражения для смещений и напряжений, могут быть представлены в виде сумм вычетов в полюсах (2.1) или (2.2), расположенных на мнимой оси. Эти вычеты в случае полюсов первого порядка остаются с ростом времени конечными и возрастали бы линейно со временем, если им соответствовал бы полюс второго порядка при $\eta \neq 0$. Так как такой рост вычетов невозможен вследствие ограниченности энергии и так как по этой же причине не могут быть полюса более высоких порядков, то приходим к заключению, что уравнения (2.1) и (2.2) могут иметь только простые корни.

В соответствии с выражениями интегралов Меллина через сумму вычетов, волновое поле, как и в работах [2, 3, 6], представляется в виде наложения нормальных волн. Величина τ является фазовой соростью v_{ph} нормальной волны вдоль плоскостей $z = \text{const}$ и функцией $\tau(k)$ от волнового числа k. Обладающая дисперсией нормальная волна характеризуется также групповой скоростью

$$v_{gr} = \tau + k d\tau/dk \qquad (2.3)$$

и циклической частотой

$$\omega = k\tau(k). \qquad (2.4)$$

На основании функциональной зависимости $\tau(k)$ формулы (2.3) и (2.4) позволяют рассчитывать функции $v_{ph}(\omega)$ и $v_{gr}(\omega)$ для пластинчатой волны и других нормальных волн.

Так как корни уравнений (2.1) и (2.2) симметрично расположены относительно вещественной оси, то будем их исследовать только при $\tau \geqslant 0$. Это исследование начнем со случая, когда $kh \ll 1$ и когда для конечных τ гиперболические функции полезно заменить первыми членами рядов по формулам

$$\operatorname{th} z = z - \frac{z^3}{3}, \qquad \operatorname{cth} z = \frac{1}{z} + \frac{z}{3}. \tag{2.5}$$

В результате этих замен уравнение (2.1) при $kh \ll 1$ переходит в уравнения

$$\tau^2 = 0, \qquad \tau^2 = v_{pl}^2 + 0(k^2h^2), \tag{2.6}$$

а уравнение (2.2) – в уравнения

$$\tau^2 = 0, \qquad \tau^2 = \frac{1}{3}k^2h^2v_{pl}^2. \tag{2.7}$$

Корни $\tau = 0$ являются корнями уравнений (2.1) и (2.2) при всех вещественных kh, но подынтегральные выражения для смещений при $\tau = 0$ и $kh \neq 0$ не имеют полюсов, так как особенности в этих точках сокращаются. Величина v_{pl} имеет выражения

$$v_{pl}^2 = 4v_3^2\left(1 - \frac{v_3^2v_4^2}{v_1^2v_2^2}\right) = \frac{4Lm(PR - M^2 - RL)}{(\rho m - \rho_f^2)(PR - M^2)} =$$

$$= m\begin{vmatrix} P & A & M \\ A & P & M \\ M & M & R \end{vmatrix} \Bigg/ \left(\begin{vmatrix} \rho & \rho_f \\ \rho_f & m \end{vmatrix}\begin{vmatrix} P & M \\ M & R \end{vmatrix}\right), \tag{2.8}$$

из которых с использованием положительной определенности матриц, входящих в уравнения (1.1), следует, что $v_{pl}^2 > 0$. Со скоростью v_{pl} распространяется низкочастотная нормальная волна в пористой пластине Био, при этом ее фазовая и групповая скорости при $k = 0$ и $\omega = 0$, согласно формулам (2.3) и (2.6), совпадают. Эта волна аналогична пластинчатой волне в упругой пластине [3, 6]. Вторая формула (2.7) описывает изгибную волну, которая связана с антисимметричными колебаниями слоя и которая аналогична изгибной волне в упругом слое [2, 6]. Пластинчатая и изгибная волны являются низкочастотными, так как спектр этих волн, согласно формулам (2.4), (2.6) и (2.7), начинается с нулевой частоты. Для изгибной волны, как и в упругом случае [6], можно записать уравнение Кирхгоффа.

Все остальные корни уравнений (2.1) и (2.2) при $k = 0$ находятся в бесконечно далекой точке $\eta = i\infty$, а при $kh \ll 1$ удовлетворяют условию

$$\tau \gg v_1. \tag{2.9}$$

В этой области уравнения (2.1) и (2.3) представляются равенствами

$$(v_1^2 - v_2^2)g^2 \operatorname{tg} kh\overline{\beta} + 4(v_1^2 - v_4^2)\overline{\alpha}_1 \overline{\beta} \operatorname{tg} kh\overline{\alpha}_1 + \\ +4(v_4^2 - v_2^2)\overline{\alpha}_2 \overline{\beta} \operatorname{tg} kh\overline{\alpha}_2 = 0, \tag{2.10}$$

$$(v_1^2 - v_2^2)g^2 \operatorname{ctg} kh\overline{\beta} + 4(v_1^2 - v_4^2)\overline{\alpha}_1 \overline{\beta} \operatorname{ctg} kh\overline{\alpha}_1 + \\ +4(v_4^2 - v_2^2)\overline{\alpha}_2 \overline{\beta} \operatorname{ctg} kh\overline{\alpha}_2 = 0, \tag{2.11}$$

в которых

$$\overline{\alpha}_i = \sqrt{\tau^2/v_i^2 - 1}\ \ (i = 1, 2), \quad \overline{\beta} = \sqrt{\tau^2/v_3^2 - 1}, \ \ g = 2 - \tau^2/v_3^2. \tag{2.12}$$

Так как коэффициенты при тангенсах в области (2.9) являются величинами разных порядков, то уравнение (2.10) распадается на три приближенных уравнения

$$\operatorname{tg} kh\overline{\beta} = 0, \quad \operatorname{tg} kh\overline{\alpha}_1 = \infty, \quad \operatorname{tg} kh\overline{\alpha}_2 = \infty. \tag{2.13}$$

Аналогичным образом уравнение (2.11) переходит в три других приближенных уравнения

$$\operatorname{ctg} kh\overline{\beta} = 0, \quad \operatorname{ctg} kh\overline{\alpha}_1 = \infty, \quad \operatorname{ctg} kh\overline{\alpha}_2 = \infty. \tag{2.14}$$

С учетом погрешности перехода от равенств (2.10) и (2.11) к соотношениям (2.13) и (2.14) и с учетом решений уравнений (2.13) и (2.14) получим асимптотические формулы

$$\tau = \frac{n\pi v_3}{kh}\left[1 + O(k^2h^2)\right], \\ \tau = \frac{(2n-1)\pi v_i}{2kh}\left[1 + O(k^2h^2)\right] \quad \begin{matrix} i = 1, 2 \\ n = 1, 2, \ldots \end{matrix}; \\ \tau = \frac{(2n-1)\pi v_3}{2kh}\left[1 + O(k^2h^2)\right], \tag{2.15}$$

$$\tau = \frac{n\pi v_i}{2kh}\left[1 + O(k^2h^2)\right] \qquad \begin{matrix} i = 1,2 \\ n = 1,2,\ldots \end{matrix} \tag{2.16}$$

для корней соответствующих уравнений (2.10) и (2.11). Из соотношений (2.15) и (2.16) следует, что все корни τ с ростом kh двигаются в сторону начала координат.

Перед тем, как приступить к исследованию корней уравнений (2.1) и (2.2) в области конечных τ, отметим, что скорости v_1, v_2 и v_3 удовлетворяют или неравенствам

$$v_3 < v_2 < v_1 \quad (\text{случай а}), \tag{2.17}$$

или соотношениям

$$v_2 < v_3 < v_1 \quad (\text{случай в}), \tag{2.18}$$

а параметр v_4 с размерностью скорости ограничен условиями

$$v_2 < v_4 < v_1, \tag{2.19}$$

которые могут быть легко проверены. В соответствии с неравенствами (2.17) и (2.18), разделим полуось $\tau \geqslant 0$ на интервалы

$$\begin{array}{llll} \mathrm{I} & v_1 \leqslant \tau < \infty, & & \\ \mathrm{II\,a} & v_2 \leqslant \tau < v_1, & \mathrm{II\,b} & v_3 \leqslant \tau < v_1, \\ \mathrm{III\,a} & v_3 \leqslant \tau < v_2, & \mathrm{III\,b} & v_2 \leqslant \tau < v_3, \\ \mathrm{IV\,a} & 0 \leqslant \tau < v_3, & \mathrm{IV\,b} & 0 \leqslant \tau < v_2. \end{array} \tag{2.20}$$

Покажем, что в ряде указанных интервалов корни уравнений (2.1) и (2.2) монотонно двигаются с ростом kh в направлении начала координат. В интервале I оба уравнения выражаются равенствами (2.10) и (2.11). Обозначим их левые части соотвественно через $\delta_0(kh,\tau)$ и $\delta_1(kh,\tau)$ и получим уравнения

$$\delta_0(kh,\tau) = 0, \quad \delta_1(kh,\tau) = 0, \tag{2.21}$$

из которых следуют соотношения

$$\frac{d\tau}{dkh} = -\frac{\partial\delta_0}{\partial kh}\bigg/\frac{\partial\delta_0}{\partial\tau}, \quad \frac{d\tau}{dkh} = -\frac{\partial\delta_1}{\partial kh}\bigg/\frac{\partial\delta_1}{\partial\tau}. \tag{2.22}$$

Так как уравнения не могут иметь двойных корней, то производные $\partial\delta_0/\partial\tau$ и $\partial\delta_1/\partial\tau$ в точках непрерывности сохраняют знаки. Также эти производные не меняют знаки при переходе корней через полюса левых частей уравнений (2.10) и (2.11). Другие производные $\partial\delta_0/\partial kh$ и $\partial\delta/\partial kh$ согласно равенствам (2.10), (2.11) и условию (2.19), также сохраняют знаки. Отсюда следует, что величина $d\tau/dkh$ для обоих уравнений является знакопостоянной, и с учетом формул (2.15) и (2.16), – отрицательной.

Аналогичный вывод делается для уравнений (2.10) и (2.11) в интервалах II a, II b и III a. В этих промежутках также выполняется неравенство $d\tau/dkh < 0$. Для уравнений (2.10) и (2.11). В интервалах II a и II b эти уравнения заменяются равенствами

$$(v_1^2 - v_2^2)g^2 \frac{\operatorname{tg} kh\overline{\beta}}{\operatorname{th} kh\alpha_1} - 4(v_1^2 - v_4^2)\alpha_1 \overline{\beta} +$$

$$+4(v_4^2 - v_2^2)\overline{\alpha}_2 \overline{\beta} \frac{\operatorname{tg} kh\overline{\alpha}_2}{\operatorname{th} kh\alpha_1} = 0,$$

$$(v_1^2 - v_2^2)g^2 \operatorname{ctg} kh\overline{\beta} + 4(v_1^2 - v_4^2)\alpha_1 \overline{\beta} \operatorname{cth} kh\overline{\alpha}_1 +$$

$$+4(v_4^2 - v_2^2)\overline{\alpha}_2 \overline{\beta} \operatorname{ctg} kh\overline{\alpha}_2 = 0, \tag{2.23}$$

а в промежутке III a выполняются соотношения

$$\frac{(v_1^2 - v_2^2)g^2 \operatorname{tg} kh\overline{\beta}}{\operatorname{th} kh\alpha_2} - 4(v_1^2 - v_4^2)\alpha_1 \overline{\beta} \frac{\operatorname{th} kh\alpha_1}{\operatorname{th} kh\alpha_2} - 4(v_4^2 - v_2^2)\alpha_2 \overline{\beta} = 0,$$

$$(v_1^2 - v_2^2)g^2 \operatorname{ctg} kh\overline{\beta} + 4(v_1^2 - v_4^2)\alpha_1 \overline{\beta} \operatorname{cth} kh\alpha_1 +$$

$$+4(v_4^2 - v_2^2)\alpha_2 \overline{\beta} \operatorname{cth} kh\overline{\alpha}_2 = 0, \tag{2.24}$$

При получении этих уравнений левые части первых уравнений (2.23) и (2.24) были разделены соответственно на величины $\operatorname{th} kh\alpha_1$ и $\operatorname{th} kh\alpha_2$ и при этой операции положение корней не менялось. Поэтому производные левых частей уравнений (2.23) и (2.24) по τ также сохраняют знаки. Так как для любых $a > 0$, $b > 0$ выполняется неравенство

$$d(\operatorname{tg} ax/\operatorname{th} bx)/dx > 0 \tag{2.25}$$

и при $b > a > 0$ справедливо соотношение

$$d(\operatorname{th} ax/\operatorname{th} bx)/dx > 0 \tag{2.26}$$

то, с учетом условия $\alpha_1 > \alpha_2$, приходим к выводу, что производные по kh от левых частей уравнений (2.23) и (2.24) также сохраняют знаки. Поэтому в промежутках II a, II b и III a корни уравнений (2.1) и (2.2) монотонно двигаются с ростом k в сторону начала координат.

В интервале III уравнения (2.1) и (2.2) представляются равенствами

$$\frac{(v_1^2-v_2^2)g^2\operatorname{th}kh\beta}{\operatorname{th}kh\alpha_1}-4(v_1^2-v_4^2)\alpha_1\beta+$$
$$+\frac{4(v_4^2-v_2^2)\overline{\alpha}_2\,\beta\operatorname{tg}kh\,\overline{\alpha}_2}{\operatorname{th}kh\alpha_1}=0,$$
$$(v_1^2-v_2^2)g^2\operatorname{cth}kh\beta-4(v_1^2-v_4^2)\alpha_1\beta\operatorname{cth}kh\alpha_1-$$
$$-4(v_4^2-v_2^2)\overline{\alpha}_2\,\beta\operatorname{ctg}kh\,\overline{\alpha}_2=0. \tag{2.27}$$

Из первого соотношения (2.27), с учетом неравенства (2.26) и условия $\beta<\alpha_1$, следует, что корни уравнения (2.1) в интервале III b монотонно перемещаются в сторону меньших τ. Корни второго уравнения (2.27) также монотонно двигаются в том же направлении, однако это утверждение оказывается справедливым только с некоторого значения kh, которое может быть определено из условия

$$\frac{4(v_4^2-v_2^2)\alpha_2^2}{\cos^2kh\,\overline{\alpha}_2}-\frac{(v_1^2-v_2^2)g^2}{\operatorname{ch}^2kh\beta}+\frac{4(v_1^2-v_4^2)}{\operatorname{ch}^2kh\alpha}=0, \tag{2.28}$$

полученного после дифференцирования по kh второго уравнения (2.27).

Таким образом, все корни уравнений (2.1) и (2.2) в интервалах I, II и III перемещаются при больших kh в направлении начала координат. Чтобы уточнить характер движения корней, проведем на плоскости τ, kh линии

$$2kh\overline{\beta}=(2n-1)\pi,\quad 2kh\overline{\alpha}_i=(2n-1)\pi$$
$$(i=1,2;\quad n=1,2,3,\dots), \tag{2.29}$$

на которых входящие в уравнения (2.1) тригонометрические тангенсы имеют полюса. На основании записанных для интервалов I, II и III уравнений (2.1), можно утвержать, что в каждой полосе, ограниченной соседними линиями (2.29), перемещается с ростом kh один и только один корень уравнения (2.1). В случае уравнения (2.2) проводятся аналогичные линии

$$kh\overline{\beta}=n\pi,\quad kh\overline{\alpha}_i=n\pi\quad(i=1,2;n=1,2,3,\dots), \tag{2.30}$$

на которых входящие в уравнения (2.2) тригонометрические котангенсы имеют полюса, и во всех полосах, образованных соседними линиями, также перемещается изолированный корень уравнения (2.2).

Так как имеет место сходство в расположении линий (2.9), (2.30) и линий корней уравнений (2.1) и (2.2), то указанные линии в обоих случаях могут быть схематически изображены на одном рис. 1. При этом линии (2.29) и (2.30) показаны сплошными, а линии корней пунктирными линиями и $v_{2,3} = \max(v_2, v_3)$, $v_{3,2} = \min(v_2, v_3)$.

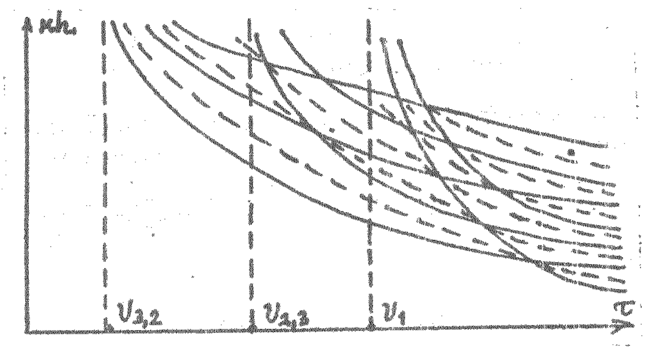

Рис. 1.

При $\tau \to \infty$ все линии (2.29) и (2.30) асимптотически приближаются к оси τ и в области $\tau \gg v_1$ эти линии, как правило, не пересекаются. С уменьшением τ линии (2.29) и (2.30) начинают пересекаться, и область их пересечений ограничивается неравенством $\tau > v_{2,3}$. Через каждую точку пересечения указанных линий обязательно проходит одна из линий корней уравнений (2.1) и (2.2). По мере неограниченного роста параметра kh все линии (2.29) и (2.30) в области $v_{3,2} < \tau < v_{2,3}$ асимптотически приближаются к прямой $\tau = v_{3,2}$. Из этого факта следует, что все корни, удовлетворяющие при $kh \ll 1$ равенствам (2.15) и (2.16), представляются в случае $kh \gg 1$ соотношением

$$v = v_{3,2} + 0(1/kh) \tag{2.31}$$

и приближаются к предельной точке $\tau = v_{3,2}$.

Корни с ростом kh двигаются по мнимой оси неравномерно. Так как часть линий (2.29) и (2.30) приближается асимптотически к прямым $\tau = v_1$ и $\tau = v_{2,3}$, то плотность полос сокращается по мере перехода от интервала I к интервалу II, а затем к интервале III (рис. 1). В результате этих сокращений возникает скопление корней уравнений (2.1) и (2.2) около точек $\tau = v_1$ и $\tau = v_{2,3}$. Каждый корень из этих скоплений при определенных kh попадает в окрестность точки $\tau = v_{3,2}$ и удовлетворяет условию (2.3). Особое перемещение наблюдается у корней, которые выходят из точек $\tau = v_{pl}$ и $\tau = 0$. В интервалах I, II и III эти корни могут находиться в области между осью τ и ближайщей к ней линией (2.29) или (2.30). Движение этих корней будет рассматриваться в §3.

§3. Условия образования волны Релея. Исследование особых корней дисперсионного уравнения

Для анализа особых корней уравнений (2.1) и (2.2) при $kh \gg 1$ полезно предварительно исследовать кори уравнения

$$(v_1^2 - v_2^2)g^2 - 4(v_1^2 - v_4^2)\alpha_1\beta - 4(v_4^2 - v_2^2)\alpha_2\beta = 0 \qquad (3.1)$$

на интервале мнимой оси

$$0 < \tau < \min(v_2, v_3). \qquad (3.2)$$

Уравнение (3.1) является уравнением Релея для пористого полупространства Био со свободной границей. Корень уравнения (3.1) в промежутке (3.2) определяет скорость v_R поверхностной волны Релея на свободной границе пористой среды Био. Существование этой волны тесно связано с наличием этого корня. Кроме того, корень уравнения (3.1) в интервале (3.2) является пределом для особых корней уравнений (2.1) и (2.2) при $kh \to \infty$.

Для исследования существования корня уравнения (3.1) в интервале (3.2) обозначим левую часть уравнения (3.1) через $\varphi(\tau)$. Разлагая в ряд функцию $\varphi(\tau)$, получим соотношение

$$\varphi(\tau) = -\frac{\tau^2(v_1^2 - v_2^2)}{2v_1^2v_2^2v_3^2}\left(v_1^2v_2^2 - v_3^2v_4^2\right)\left[1 + O\left(\frac{\tau^2}{v_3^2}\right)\right] < 0 \qquad (3.3)$$

при малых τ. В случае $v_3 < v_2$ на другом конце интервала (3.2), при $\tau = v_3$, выполняется соотношение

$$\varphi(v_3) = v_1^2 - v_3^2 > 0, \qquad (3.4)$$

которое показывает, что при $v_3 < v_2$ корень Релея $\tau = v_R$ всегда существует. Если выполняется условие $v_2 < v_3$, то для существования корня Релея необходимо удовлетворить неравенству

$$\varphi(v_2) = \left[(v_1^2 - v_2^2)g^2 - 4(v_1^2 - v_4^2)\alpha_1\beta\right]\Big|_{\tau=v_2} > 0. \tag{3.5}$$

В случае

$$\left[(v_1^2 - v_2^2)g^2 - 4(v_1^2 - v_4^2)\alpha_1\beta\right]\Big|_{\tau=v_2} < 0 \tag{3.6}$$

корень и волна Релея отсутствуют. Неравенство (3.5) эквивалентно условию

$$\left(2 - \frac{v_2^2}{v_3^2}\right)^2 \Big/ \sqrt{1 - \frac{v_2^2}{v_3^2}} > 4\left(1 - \frac{v_4^2}{v_1^2}\right) \Big/ \sqrt{1 - \frac{v_2^2}{v_1^2}}, \tag{3.7}$$

которое связывает три величины v_2/v_1, v_4/v_1 и v_2/v_3, удовлетворяющие дополнительным неравенствам

$$v_2/v_1 < v_4/v_1 < v_2/v_3. \tag{3.8}$$

Области, где выполняется и не выполняется соотношение (3.7) имеют довольно сложные границы. Поэтому укажем только, что неравенство (3.7) справедливо при условии $v_2/v_3 = 0.82$, $v_4/v_1 = 0,6$, $v_2/v_1 = 0,5$ и не выполняется, когда $v_2/v_3 = 0.82$, $v_4/v_1 = 0,5$, $v_2/v_1 = 0,4$. Таким образом, пористая среда Био отличается от упругой среды тем, что на свободной границе пористой среды Био может не распространяться волны Релея.

Исследование особых корней уравнений (2.1) и (2.2) при $kh \gg 1$ будем проводить в трех случаях: случай 1, когда $v_3 < v_2$; случай 2, когда $v_2 < v_3$ и неравенство (3.5) выполняется; случай 3, когда $v_2 < v_3$ и неравенство (3.6) выполняются.

В случае 1 уравнение (2.1) при $\tau = \nu_3$

$$\begin{gathered}\left[(v_1^2 - v_2^2)g^2\, kh - 4(v_1^2 - v_4^2)\alpha_1 \operatorname{th} kh\alpha_1 - \right.\\ \left. -4(v_4^2 - v_2^2)\alpha_2 \operatorname{th} kh\alpha_2\right]\Big|_{\tau=v_3} = 0.\end{gathered} \tag{3.9}$$

имеет единственный корень. С дальнейшим ростом kh этот корень переходит в интервал IV и стремится к корню Релея $\tau = v_R$.

Уравнение (2.2) при $\tau = v_3$ не имеет корней. Из корней уравнения (2.2) к корню Релея $\tau = v_R$ при $kh \to \infty$ подходит изгибной корень, который при $kh \ll 1$ выражается вторым соотношением (2.7). Оба корня приближаются к предельному значению $\tau = v_R$ монотонно. В этом легко убедиться, если записать уравнения (2.1) и (2.2) в виде равенств

$$(v_1^2 - v_2^2)g^2 - 4(v_1^2 - v_4^2)\alpha_1\beta\frac{\operatorname{th} kh\alpha_1}{\operatorname{th} kh\beta} - 4(v_4^2 - v_2^2)\alpha_2\beta\frac{\operatorname{th} kh\alpha_2}{\operatorname{th} kh\beta} = 0,$$

$$(v_1^2 - v_2^2)g^2 - 4(v_1^2 - v_4^2)\alpha_1\beta\frac{\operatorname{th} kh\beta}{\operatorname{th} kh\alpha_1} - 4(v_4^2 - v_2^2)\alpha_2\beta\frac{\operatorname{th} kh\beta}{\operatorname{th} kh\alpha_2} = 0. \quad (3.10)$$

Таким образом, перемещение особых корней при $v_3 < v_2$ подобно движению аналогичных корней в случае упругого слоя (рис. 2) [2, 3].

В случае 2 уравнение (2.1) при $\tau = v_2$ представляется соотношением

$$\left[(v_1^2 - v_2^2)g^2 \operatorname{th} kh\beta - 4(v_1^2 - v_4^2)\alpha_1\beta \operatorname{th} kh\alpha_1\right]\Big|_{\tau = v_2} = 0. \quad (3.11)$$

Левая часть этого соотношения при $kh \ll 1$ равна

$$kh\left(v_1^2 - v_2^2\right) v_2^2 v_3^{-4}\left(v_2^2 - v_{pl}^2\right), \quad (3.12)$$

монотонно возрастает с ростом kh и переходит при $kh = \infty$ в выражение

$$\left[(v_1^2 - v_2^2)g^2 - 4(v_1^2 - v_4^2)\alpha_1\beta\right]\Big|_{\tau = v_2}, \quad (3.13)$$

которое в случае 2, когда выполняется неравенство (3.5), является положительным. Поэтому уравнение (3.11) при условии

$$v_2 < v_{pl} \quad (3.14)$$

имеет корень, который после пересечения прямой $\tau = v_2$ стремится к релеевскому корню $\tau = v_R$ (рис. 2). Если же выполняется противоположное условие $v_{pl} < v_2$, то уравнение (3.11) не имеет корней, а корень, заданный при $kh \ll 1$ вторым равенством (2.6), стремится к значению $\tau = v_R$ внутри интервала $0 < \tau < v_2$. Если использовать выражения для модулей среды Био

$$P = \frac{(K_r - K_b)^2}{D - K_b} + K_b + \frac{4}{3}L, \quad M = \frac{K_r(K_r - K_b)}{D - K_l},$$
$$R = \frac{K_r^2}{D - K_b}, \qquad D = K_r\left[1 + \varepsilon\left(\frac{K_r}{K_f} - 1\right)\right] \tag{3.15}$$

через модули всестороннего сжатия K_b, K_f и K_r соответственно пористой среды, жидкой фазы и скелета и через пористость ε [7], то соотношение $v_{pl} < v_2$ оказывается невозможным при $v_2 < v_3$. В самом деле, с учетом соотношений (3.15) квадрат скорости v_{pl} выражается формулами

$$v_{pl}^2 = \frac{Lm}{\rho m - \rho_f^2}\frac{4K_b + \frac{4}{3}L}{K_b + \frac{4}{3}L} = v_3^2\frac{4K_b + \frac{4}{3}L}{K_b + \frac{4}{3}L}, \tag{3.16}$$

из которых следует неравенство

$$v_{pl}^2 > v_3^2, \tag{3.17}$$

справедливое при всех значениях модулей всестороннего сжатия. Из условия (3.17) вытекает, что неравенство (3.14) также выполняется при всех значениях модулей всестороннего сжатия.

Уравнение (2.2) при $\tau = v_2$ переходит в соотношение

$$\Big[(v_1^2 - v_2^2)g^2 \operatorname{cth} kh\beta - 4(v_1^2 - v_4^2)\alpha_1\beta \operatorname{cth} kh\alpha_1 -$$
$$-4(v_4^2 - v_2^2)\beta/(kh)\Big]\Bigg|_{\tau = v_2} = 0. \tag{3.18}$$

Левая часть уравнения (3.18) при $kh \ll 1$ является положительной, а при $kh \gg 1$ переходит в выражение (3.13), которое во втором случае также положительное. Поскольку не удается доказать, что левая часть уравнения (3.18) монотонно изменяется с ростом kh, то корень уравнения (2.2) в случае 2 или не пересекает прямую $\tau = v_2$, или пересекают ее два раза. Эти обе возможности определяются параметрами среды. Возможные перемещения корней показаны на рис. 2 пунктирными линиями. Во всех случаях изгибный корень при $kh \to \infty$ стремится к релеевскому корню v_R.

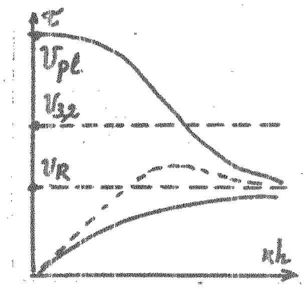

Рис. 2

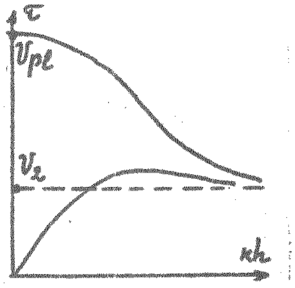

Рис. 3.

В случае 3 уравнение (2.1) при $\tau = v_2$ также представляется равенством (3.11), левая часть которого монотонно возрастает с ростом kh от (3.12) до выражения (3.13). Так как последнее выражение в случае 3 является отрицательным, то уравнение (3.11) в случае 3 не имеет корней и выполняется условие (3.14). Корень, вышедший из $\tau = v_{pl}$, как и все корни уравнения (2.1), стремится к $\tau = v_2$. Уравнение (2.2) в случае 3 переходит при $\tau = v_2$ в уравнение (3.15). Так как его левая часть является положительной при $kh \ll 1$ и отрицательной в случае $kh \gg 1$, то корень уравнения (2.2) пересекает прямую $\tau = v_2$. Это пересечение осуществляется изгибным корнем, который не может стремиться к релеевскому корню и поэтому поднимается выше прямой $\tau = v_2$, а затем, как и другие корни, подходит асимптотически к прямой $\tau = v_2$ (рис. 3).

В заключение отметим, что в изолированном пористом слое Био могут также распространяться волны Лява. Однако при воздействии (1.4) эти волны не образуются. Волны Лява возникают, в частности, в случае источника типа центра вращения. Дисперсионное уравнение для волн Лява представляется равенством

$$\operatorname{sh} 2kh\beta = 0, \tag{3.19}$$

из которого следует соотношение

$$\tau = v_3\sqrt{1 + \frac{n^2\pi^2}{4k^2h^2}} \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{3.20}$$

для фазовых скоростей. Уравнение (3.19) и его решения (3.20) относятся к симметричному и антисимметричному случаям. Оба эти соотношения аналогичны соответствующим равенствам в случае изолированного упругого слоя.

Литература

1. M. A. Biot, *Theory of propagation of elastic waves in fluid-saturated porous solid. I Low-frequency range.* — J. Acoust. Soc. Am. **28, No. 2** (1956), 168–178.
2. Н. С. Смирнова, Л. А. Молотков, *Об исследовании антисимметричных колебаний в упругом слое.* — В кн.: Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. **9**, (1968), 97–107.
3. Л. А. Молотков, У. Баймагамбетов, Н. С. Смирнова, *Об исследовании дисперсионных уравнений свободного трансверсально-изотропного упругого слоя.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **99** (1980), 85–103.
4. A. J. Philippacopoulos, *Waves in partially saturated layered half-space analytic formulation.* — Bull. Seim. Soc. Am. **77, No. 5** (1987), 1838–1853.
5. A. J. Philippacopoulos, *Lamb's problem for fluid-saturated, porous media.* — Bull. Seim. Soc. Am. **78, No. 2** (1988), 908–923.
6. Г. И. Петрашень, Л. А. Молотков, *О некоторых проблемах динамической теории упругости в случае сред, содержащих тонкие слои.* — Вестник ЛГУ **22** (1958), 137–156.
7. Р. Д. Столл, *Акустические волны в водонасыщенных осадках.* — В кн.: Акустика морских осадков. Мир, М. (1977), 28–46.

Molotkov L. A. On propagation of normal waves in an isolated porous saturated by fluid Biot layer.

For a porous saturated by fluid Biot layer with boundaries where stresses and pressure vanish wave field is established and dispersion equations are derived. The roots of the dispersion equation and the dependence of phase velocities of the normal waves on wave number are investigated by analytical methods. It is shown that the phase velocities of the most of normal waves decrease with increasing of the wave number. The special investigations are fulfilled in the case of the bend wave and the plate wave and their phase velocities on high frequences. It is shown too that on the boundary of the porous halfspace Biot the Rayleigh wave propagates not always and the conditions of its existence are established.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 25 ноября 1998 г.