Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 257, 1999 г.

С. А. Назаров

ЗАДАЧА НАВЬЕ–СТОКСА В ДВУМЕРНОЙ ОБЛАСТИ С УГЛОВЫМИ ВЫХОДАМИ НА БЕСКОНЕЧНОСТЬ

1. Постановка задачи и предварительное описание результатов. Пусть Ω – область на плоскости $\mathbb{R}^2$. Рассматриваются система уравнения Стокса

$$-\nu\nabla\cdot\nabla v(x)+\nabla p(x)=f(x),\quad -\nabla\cdot v(x)=g(x),\quad x\in\Omega, \tag{1}$$

или система уравнения Навье–Стокса

$$\begin{gathered}-\nu\nabla\cdot\nabla v(x)+\big(v(x)\cdot\nabla\big)v(x)+\nabla p(x)=f(x),\\ -\nabla\cdot v(x)=g(x),\quad x\in\Omega,\end{gathered} \tag{2}$$

с краевыми условиями

$$v(x)=h(x),\quad x\in\partial\Omega. \tag{3}$$

При этом $x=(x_1,x_2)$, $\nabla=(\partial/\partial x_1,\partial/\partial x_2)$, точкой обозначено скалярное произведение в $\mathbb{R}^2$; $u=(u_1,u_2)$ и p – вектор скоростей и давление в потоке, а ν – вязкость (несжимаемой) жидкости. Кроме того, $f=(f_1,f_2)$, $h=(h_1,h_2)$, а g – скалярная функция.

Считаем, что область Ω имеет два угловых выхода на бесконечность, т.е. вне круга $B_R=\{x\in\mathbb{R}^2:|x|<R\}$ с некоторым радиусом $R>0$ она совпадает с объединением двух углов

$$K_\pm=\{x:r>0,\,|\varphi-\varphi_\pm|<\alpha_\pm\}\,. \tag{4}$$

Здесь (r,φ) – полярные координаты, $x_1=r\cos\varphi$, $x_2=r\sin\varphi$; величины $\varphi_\pm$ и $\alpha_\pm$ выбраны так, что

$$0\leqslant\varphi_+-\alpha_+<\varphi_++\alpha_+\leqslant\pi\leqslant\varphi_--\alpha_-<\varphi_-+\alpha_-\leqslant 2\pi. \tag{5}$$

Разумеется, вершины углов (4) можно было бы разъединить и ввести полярные координаты $(r^\pm,\varphi^\pm)$ с центром в каждой из них,

---

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (грант 96-15-96077).

однако обобщениями такого рода мы пренебрегаем. Лишь для упрощения формулировок предполагаем, что граница $\partial\Omega$ гладкая – в принципе она может содержать конечное число угловых точек (см. конец разд. 6).

В настоящей работе изучается разрешимость задач (1), (3) и (2), (3), а также асимптотика их решений (малых в нелинейном случае); попутно устанавливаются асимптотически точные весовые оценки таких решений. Результаты, представленные в разд. 2 и относящиеся к линейной задаче, получаются на основе теории общих эллиптических задач в областях с коническими или угловыми точками (см. [1–4] и др.; для унификации ссылок при цитировании указываются номера нужных утверждений из [4]). Однако нелинейное слагаемое из (2) порождает оператор, не являющийся непрерывным в обычных (см. [1, 4] и далее разд. 2) весовых классах $V^l_\beta(\Omega)$ с возникшими в разд. 2 ограничениями на весовой показатель β (это – отличительная черта двумерной задачи Навье–Стокса; сравни [5], где аналогичные вопросы рассматриваются в трехмерной ситуации). Вместе с тем, названный оператор становится непрерывным на весовых пространствах с отделенной асимптотикой – их элементы допускают вблизи бесконечности разложения, в которых остаток принадлежит $V^l_\gamma(\Omega)$ с $\gamma > \beta$, а угловые части берутся из $H^l(\varphi_\pm - \alpha_\pm, \varphi_\pm + \alpha_\pm)$. Подобные пространства возникли, по-видимому, впервые и в разд. 3 доказывается фредгольмово свойство оператора Стокса $\mathfrak{S}$, определенного на них; там же полностью описываются ядро и коядро оператора $\mathfrak{S}$. После этого в разд. 4 и 5 при помощи принципа Банаха устанавливается существование (малых) решений задачи Навье–Стокса в построенных классах функций. Из-за скачкообразного увеличения размерности коядра $\operatorname{coker}\mathfrak{S}$ при переходе к случаю $\alpha_\pm = \pi/2$, в разд. 5 приходится предъявлять дополнительные требования к данным задачи, сводящиеся к условиям симметрии относительно оси абсцисс. Наконец, в разд. 6 обсуждаются возможные обобщения, в частности, перенос результатов на весовые классы Гельдера и пространства L_p.

Рассматриваемая здесь задача имеет давнюю историю (см. [6, 7]). Впервые она возникла в [8], где было указано на множественность решений в случае течения жидкости в двух полупространствах, соединенных отверстием в перегородке, и проверены единственность и существование малого решения при дополнительном задании потока через отверстие (в [8, 5] это условие также заменяется эквивалентным – заданием перепада давления). Глобальная разрешимость получена в [9] как следствие более общих результатов. Дальнейшие исследования свойств решений (скорость затухания на бесконечности, глобальная единственность и пр.) проводилось в [5, 7, 10–12] и др., однако до сих пор не было изучено поведение при $|x| \to \infty$ решения двумерной задачи (ввиду ее исключительности: асимптотически линейная и нелинейная части одной силы). Настоящая статья восполняет (при малых числах Рейнольдса) этот пробел. Результаты были анонсированы в заметке [13].

Как недавно стало известно автору, похожие оценки решений были независимо получены Ж. П. Галди, М. Р. Падулой, В. А. Солонниковым, а также В. Г. Мазья, А. С. Слуцким.

2. Весовые пространства и разрешимсть линейной задачи. Как обычно, через $V^l_\beta(\Omega)$ обозначаем пространство функций на Ω, полученное пополнением множества $C_0^\infty(\overline{\Omega})$ по норме

$$\|z; V^l_\beta(\Omega)\| = \left(\sum_{k=0}^{l} \|(1+r)^{\beta-l+k}\, \nabla^k z;\ L_2(\Omega)\|^2 \right)^{1/2},$$

где $\beta \in \mathbb{R}$, l – целое неотрицательное, а под $\nabla^k z$ подразумевается совокупность всех производных порядка k функции z. При $l \geqslant 1$ естественным образом определяется следовое пространство $V^{l-1/2}_\beta(\partial\Omega)$; оно снабжается такой нормой:

$$\|w; V^{l-1/2}_\beta(\partial\Omega)\| = \inf\Big\{ \|z; V^l_\beta(\Omega)\| \ \Big|\ z = w \ \text{ на } \ \partial\Omega \Big\}.$$

Ясно, что оператор задачи (1), (3),

$$\mathcal{D}^l_\beta \equiv V^{l+1}_\beta(\Omega)^2 \times V^l_\beta(\omega) \ni (v,p) \mapsto S^l_\beta(v,p) =$$

$$= (f,g,h) \in V^{l-1}_\beta(\Omega)^2 \times V^l_\beta(\Omega) \times V^{l+1/2}_\beta(\partial\Omega)^2 \equiv \mathcal{R}^l_\beta(\Omega, \partial\Omega), \qquad (6)$$

оказывается непрерывным при любых $\beta \in \mathbb{R}$ и $l = 1, 2, \ldots$.

Степенным решением однородной задачи Стокса в угле $K^\pm$ называется вектор-функция $(v^\pm, p^\pm)$,

$$v^\pm(x) = r^\Lambda\, V^\pm(\varphi), \quad p^\pm(x) = r^{\Lambda-1}\, P^\pm(\varphi), \qquad (7)$$

удовлетворяющая краевой задаче

$$-\nu\nabla\cdot\nabla v^{\pm}(x)=f^{\pm}(x),\ -\nabla\cdot v^{\pm}(x)=g^{\pm}(x),\ x\in K^{\pm},$$
$$v^{\pm}(x)=h^{\pm}(x),\ x\in\partial K^{\pm}\setminus O, \tag{8}$$

с нулевыми правыми частями. Подставляя (7) в однородные уравнения (8) и разделяя переменные r и φ, приходим к краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered}\mathbb{S}(\Lambda,\partial/\partial\varphi)(V^{\pm},P^{\pm})=0\ \text{ на }\ \Upsilon_{\pm}=(\varphi_{\pm}-\alpha_{\pm},\varphi_{\pm}+\alpha_{\pm}),\\ V^{\pm}(\varphi_{\pm}-\alpha_{\pm})=0,\quad V^{\pm}(\varphi_{\pm}+\alpha_{\pm})=0.\end{gathered}\tag{9}$$

Так как коэффициенты дифференциального оператора $\mathbb{S}(\Lambda,\partial/\partial\varphi)$ постоянны, задача (9) допускает явное решение. Так, известно (см. [14–16] и др.), что ее собственные числа Λ (или, что то же, показатели в (7)) удовлетворяют трансцендентному уравнению

$$\sin(2\alpha_{\pm}\Lambda)=\Lambda\sin 2\alpha_{\pm}, \tag{10}$$

но не равны нулю. В силу (5) $\alpha_{\pm}\leqslant\pi/2$ и, как нетрудно проверить, в полосе

$$\{\Lambda\in\mathbb{C}:|\operatorname{Re}\Lambda|<1\} \tag{11}$$

нет ненулевых корней уравнения (10).

Предложение 1 (4.1.2, 4.1.5 [4]). *Оператор (6) фредгольмов в том и только в том случае, если на прямой $\{\Lambda\in\mathbb{C}:\operatorname{Re}\Lambda=l-\beta\}$ нет собственных чисел задач (9). При таких весовых показателях β решение $(v,p)\in\mathcal{D}^l_\beta(\Omega)$ задачи (1), (3) удовлетворяет оценке*

$$\|(v,p);\mathcal{D}^l_\beta(\Omega)\|\leqslant c\big(\|(f,g,h);\mathcal{R}^l_\beta(\Omega,\partial\Omega)\|+\|(v,p);L_2(\Omega\cap B_R)^3\|\big) \tag{12}$$

с постоянной c, не зависящей от (v,p) и (f,g,h).

Справедлива формула Грина

$$(-\nu\nabla\cdot\nabla v+\nabla p,u)_\Omega+(-\nabla\cdot v,q)_\Omega+(v,nq-\nu\partial_n u)_{\partial\Omega}=$$
$$=(v,-\nu\nabla\cdot\nabla u+\nabla q)_\Omega+(p,-\nabla\cdot u)_\Omega+(np-\nu\partial_n v,u)_{\partial\Omega}, \tag{13}$$

где $(\ ,\ )_\Xi$ – скалярное произведение в пространстве $L_2(\Xi)$, скалярном или векторном; (v,p), $(u,q)\in C_0^\infty(\overline{\Omega})^3$; n – единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega$, а $\partial_n=n\cdot\nabla$ – производная вдоль n. Благодаря (13) задача (1), (3) является формально самосопряженной и потому верно следующее утверждение.

Предложение 2 (4.1.2, 4.3.8, 5.1.4 [4]). *Операторы S^l_β и $S^l_{2l-\beta}$ фредгольмовы одновременно, причем*

$$\operatorname{coker} S^l_{2l-\beta} = \left\{ \left(u, q, \left(nq - \nu\partial_n u\right)\big|_{\partial\Omega}\right) : (u,q) \in \ker S^l_\beta \right\}.$$

Так как $S^l_\beta = S^l_{2l-\beta}$ при показателе $\beta = l$, допустимом в предложении 1 (ввиду сказанного о полосе (11)), в силу предложения 2

$$\operatorname{Ind} S^l_l \equiv \dim\ker S^l_l - \dim\operatorname{coker} S^l_l = 0.$$

Кроме того, для $(v,p) \in \ker S^l_l$ получаем соотношение

$$0 = \left(-\nu\nabla\cdot\nabla v + \nabla p, v\right)_\Omega + \left(\nu\partial_n v - np, v\right)_{\partial\Omega} = \nu\sum_{j=1}^{2}\left(\nabla v_j, \nabla v_j\right)_\Omega,$$

т.е. $v_i = c_i$, а потому $\nabla p = 0$ и $p = c_0$. При этом $c_i = 0$ в соответствии с однородностью условия (3) и $c_0 = 0$ согласно $1 \notin V^l_l(\Omega)$. Таким образом, ядро оператора S^l_l тривиально и он является изоморфизмом. Наконец, теоремы 4.2.1, 4.2.4 [4] (см. также далее предложение 3) наделяют этим свойством и те S^l_β, для которых $|\beta - l| < 1$ (опять-таки ввиду сказанного о полосе (11)).

Следствие 1. *Оператор S^l_β – изоморфизм при $\beta \in (l-1, l+1)$.*

Поскольку увеличение β приводит к сужению пространства $\mathcal{D}^l_\beta(\Omega)$ из (6), S^l_β – мономорфизм для $\beta > l-1$.

Следствие 2. *Если показатель $\beta > l-1$ допустим в смыле предложения* 1, *то из* (12) *можно убрать последнее слагаемое.*

3. Линейная задача в весовых классах с отделенной асимптоти кой. Мотивацией дальнейшего, более глубокого, изучения задачи (1), (3) служит следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть $\ell \geqslant 1$. Отображение (нелинейное)*

$$V^{l+1}_\beta(\Omega)^2 \ni v \mapsto N(v) = (v\cdot\nabla)v \in V^{l-1}_\beta(\Omega)^2$$

оказывается непрерывным лишь при условии $\beta \geqslant l+1$.

Доказательство. Ввиду теорем Соболева о вложении H^{l+1} в C^{l-1} достаточно ограничиться случаями $\operatorname{supp} v \subset \Xi_\pm = \overline{\Omega}\cap(\overline{\mathbb{R}^2_\pm} \setminus B_R)$, где $\mathbb{R}^2_\pm = \{x : \pm x_2 > 0\}$. В полуполосе $\Sigma_\pm = (\ln R, \infty)\times\Upsilon_\pm$ рассмотрим вектор-функцию

$$\Sigma_\pm \ni (t,\varphi) \mapsto u(t,\varphi) = \exp([\beta - l]t)v\left(e^t\cos\varphi, e^t\sin\varphi\right)$$

(иными словами, выполним замену координат $x \mapsto (r, \varphi) \mapsto (t, \varphi)$, где $t = \ln r$, и положим $u(t, \varphi) = r^{\beta - l} v(x)$). Согласно определению нормы в $V_\beta^{l+1}(\Omega)$ справедливо включение $u \in H^{l+1}(\Sigma_\pm)$ и оценка

$$\left\| u; H^{l+1}(\Sigma_\pm) \right\| \leqslant c \left\| v; V_\beta^{l+1}(\Xi_\pm) \right\|$$

($H^l(\Sigma)$ – пространство Соболева). Кроме того,

$$r^{\beta - l + 2} N(v; x) = \exp(-[\beta - l - 1]t) \left\{ u(t, \varphi) \cdot \mathcal{L}\left(\varphi, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial \varphi}\right) \right\} u(t, \varphi), \quad (14)$$

причем $\mathcal{L} = (\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2)$, $\mathcal{L}_j$ – дифференциальный оператор первого порядка с коэффициентами, гладко зависящими от $\varphi \in [\varphi_\pm - \alpha_\pm, \varphi_\pm + \alpha_\pm]$. Если $\beta - l - 1 \geqslant 0$, то

$$\begin{gathered} \left\| N(v); V_\beta^{l-1}(\Xi_\pm) \right\| \leqslant c \left\| e^{-[\beta - l - 1]t} \, (v \cdot \mathcal{L}) v; H^{l-1}(\Sigma_\pm) \right\| \leqslant \\ \leqslant c \left\| (u \cdot \mathcal{L}) u; \, H^{l-1}(\Sigma_\pm) \right\| \leqslant c \left\| u; C^{l-1}(\Sigma_\pm) \right\| \times \left\| u; H^l(\Sigma_\pm) \right\| \leqslant \quad (15) \\ \leqslant c \left\| u; H^{l+1}(\Sigma_\pm) \right\|^2 \leqslant c \left\| v; V_\beta^{l+1}(\Xi_\pm) \right\|^2 \end{gathered}$$

(применили неравенство $\left\| u; C^{l-1}(\Sigma_\pm) \right\| \leqslant c \left\| u; H^{l+1}(\Sigma_\pm) \right\|$, гарантируемое упомянутой теоремой вложения). В случае $\beta - l - 1 < 0$ оценка (15) нарушается из-за растущего экспоненциального множителя в (14). •

Итак, оператор N, отвечающий нелинейным слагаемым в (2), оказывается непрерывным только для тех l и β, которые не удовлетворяют условию следствия 1. Оператор S_β^l не является изоморфизмом, если $\beta \geqslant l + 1$ (при $\beta = l + 1$ он теряет фредгольмовость согласно предложению 1, а при $\beta > l + 1$ возникает нетривиальное коядро – см. далее предложение 3). Поэтому оператор задачи Навье–Стокса нельзя рассматривать как возмущение оператора S_β^l. Мы исправим положение дел, сузив область определения оператора задачи Стокса за счет уточнения поведения решения на бесконечности. При этом ситуации $\alpha_\pm < \pi/2$ и $\alpha_\pm = \pi/2$ (см. (5)) обрабатываются по-разному, и в последней приходится вводить дополнительные ограничения на данные задачи. Подчеркнем, что эти же ограничения возникают и тогда, когда хотя бы один из растворов $2\alpha_\pm$ угловых выходов на бесконечность равен π, но этот, комбинированный, случай отдельно не рассматривается, поскольку новые затруднения при получении результата не возникают.

Следующее утверждение получается после несложных вычислений, относящихся к трансцендентному уравнению (10) и к системе (9) (их можно найти, к примеру, в [14–16]). Для сокращения записи не будем указывать метки "±" у символов $V^{\pm}$, $P^{\pm}$, $\alpha_{\pm}$, $\Upsilon_{\pm}$ и т.п., а $\varphi_{\pm}$ будем обозначать φ^0.

Лемма 2. 1) *Если* $\alpha < \pi/2$, *то в полосе* $\{\Lambda \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re}\Lambda| < 1 + \delta(a)\}$, *где* $\delta(\alpha) > 0$, $\delta(\alpha) \to +0$ *при* $\alpha \to \pi/2 - 0$ *и* $\delta(\alpha) \to +\infty$ *при* $\alpha \to +0$, *имеются в точности два собственных числа* $\Lambda = \pm 1$ *задачи* (9). *Они простые, и им соответствуют собственные векторы*

$$\mathcal{V}^{(+1)}(\varphi) = 0, \quad \mathcal{P}^{(+1)}(\varphi) = 1;$$

$$\mathcal{V}^{(-1)}(\varphi) = \big[\cos 2(\varphi - \varphi^0) - \cos 2\alpha\big](\cos\varphi, \sin\varphi), \tag{16}$$

$$\mathcal{P}^{(-1)}(\varphi) = 2\cos 2(\varphi - \varphi^0).$$

2) *При* $\alpha = \pi/2$ *полоса* $\{\Lambda \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re}\Lambda| < 2\}$ *содержит в точности два собственных числа* $\Lambda = \pm 1$ *задачи* (9). *Они просты алгебраически (присоединенных векторов нет), но каждому отвечает пара собственных векторов. Первые собственные векторы задаются равенствами* (16) *при* $\varphi^0 = \alpha = \pi/2$, *а вторые имеют вид*

$$\begin{aligned} \mathbf{V}^{(+1)}(\varphi) &= (\sin\varphi, 0), & \mathbf{P}^{(+1)}(\varphi) &= 0; \\ \mathbf{V}^{(-1)}(\varphi) &= \sin 2\varphi(\cos\varphi, \sin\varphi), & \mathbf{P}^{(-1)}(\varphi) &= 2\sin 2\varphi. \end{aligned} \tag{17}$$

Лемма 3.5.9 [4] "двумерной" формуле Грина (13) сопоставляет ее "одномерный" вариант (впрочем, несложен и его непосредственный вывод):

$$\big\langle \mathbb{S}(\Lambda)(V,P),(U,Q)\big\rangle + \sum_{\pm} \pm V \cdot \overline{\mathbb{T}(-\overline{\Lambda})(U,Q)}\,\Big|_{\varphi=\varphi^0\pm\alpha} =$$

$$= \big\langle (V,P), \mathbb{S}(-\overline{\Lambda})(U,Q)\big\rangle + \sum_{\pm} \pm \mathbb{T}(\Lambda)(V,P)\cdot\overline{U}\Big|_{\varphi=\varphi^0\pm\alpha}; \tag{18}$$

здесь $\Lambda \in \mathbb{C}$, черта означает комплексное сопряжение, $\langle\,,\rangle$ – скалярное произведение в $L_2(\Upsilon)$, $\mathbb{S}(\Lambda) = \mathbb{S}(\Lambda, \partial/\partial\varphi)$,

$$\mathbb{T}(\Lambda)(V,P) = (-\sin\varphi, \cos\varphi)P - \nu\partial U/\partial\varphi$$

(множителем при P служит единичный вектор нормали к стороне $\{\varphi=\varphi^0+\alpha\}$ угла (4)). Из (18) вытекает, что задача

$$\mathbb{S}\left(\Lambda,\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)(V,P)=(F,G) \text{ на } \Upsilon,\ V(\varphi^0\pm\alpha)=H^{(\pm\alpha)} \tag{19}$$

и та же задача с заменой Λ на $-\overline{\Lambda}$ оказываются формально самосопряженными. Теперь, опираясь на известные свойства эллиптических краевых задач, получаем в соответствии с леммой 2 используемые далее условия разрешимости задачи (19) при $\Lambda=-1$.

Следствие 3. 1) *Если $\alpha<\pi/2$ и $\Lambda=-1$, то задача* (19) *с правой частью*

$$\left(F,G,H^{(\pm\alpha)}\right)\in H^{l-1}(\Upsilon)^2\times H^l(\Upsilon)\times\mathbb{C}^2\times\mathbb{C}^2 \tag{20}$$

имеет решение

$$(V,P)\in H^{l+1}(\Upsilon)^2\times H^l(\Upsilon) \tag{21}$$

в том и только в том случае, если

$$\int\limits_{\Upsilon}G(\varphi)d\varphi+\sum_{\pm}\pm\left[H_2^{(\pm\alpha)}\cos\varphi-H_1^{(\pm\alpha)}\sin\varphi\right]\Big|_{\varphi=\varphi^0\pm\alpha}=0. \tag{22}$$

Это решение определено с точностью до слагаемого $c(\mathcal{V}^{(-1)},\mathcal{P}^{(-1)})$.

2) *При $\alpha=\pi/2$ задача* (19) *с $\alpha=-1$ и с правой частью* (20) *имеет решение* (21) *тогда и только тогда, когда в дополнение к* (22) *справедливо соотношение*

$$\int\limits_{\varphi^0-\pi/2}^{\varphi^0+\pi/2}F_1(\varphi)\sin\varphi\,d\varphi+\nu\left(H_1^{(+\alpha)}+H_1^{(-\alpha)}\right)=0. \tag{23}$$

Это решение определено с точностью до аддитивной добавки $c(\mathcal{V}^{(-1)},\mathcal{P}^{(1)})+c(\mathbf{V}^{(-1)},\mathbf{P}^{(-1)})$.

Замечание 1. 1) Как обычно, условия разрешимости (22) и (23) возникают из формулы Грина (18), если положить $\Lambda=-1$, заменить $\mathbb{S}(-1)(V,P)$ и $V(\varphi^0\pm\alpha)$ правыми частями (F,G) и $H^{(\pm\alpha)}$, а на место (U,Q) поставить собственные векторы из (16) и (17), отвечающие $\Lambda=1$.

2) Вектор $(r^\Lambda V,r^{\Lambda-1}P)$ служит решением задачи (8) с правыми частями $r^{\Lambda-2}F$, $r^{\Lambda-1}G$ и $r^\Lambda H$.

Фиксируем натуральное число l и весовой показатель

$$\gamma \in \bigl(l+1, l+1+\min\{\delta(\alpha_+), \delta(\alpha_-)\}\bigr), \tag{24}$$

где $\delta(\alpha)$ – величина из леммы 2(1), причем в случае $\alpha_\pm = \pi/2$ считаем дополнительно, что в (24) $\min\{\dots\} = 1$. Введем пространство $\mathfrak{D}$ вектор-функций (v, p), представимых в виде

$$\begin{aligned} v(x) &= \widetilde{v}(x) + \sum_\pm \chi_\pm(x) r^{-1}\, V^\pm(\varphi), \\ p(x) &= \widetilde{p}(x) + \sum_\pm \chi_\pm(x)\bigl[r^{-2} P^\pm(\varphi) + \Pi^\pm\bigr], \end{aligned} \tag{25}$$

где $\chi_\pm$ – гладкие срезующие функции, $\chi_\pm = 1$ на $(\Omega \setminus B_{2R}) \cap \mathbb{R}^2_\pm$ и $\chi_\pm = 0$ на $\Omega \setminus (B_R \cap \mathbb{R}^2_\pm)$ (иными словами, $\chi_\pm$ равна единице около бесконечности в "своем" угловом выходе $K_\pm$ и аннулируется в "чужом" выходе $K_\pm$). Назначим для $\mathfrak{D}$ такую норму:

$$\begin{aligned} \bigl\|(v,p); \mathfrak{D}\bigr\| = \Bigl\{ \bigl\|(\widetilde{v}, \widetilde{p}); \mathcal{D}^l_\gamma(\Omega)\bigr\|^2 + \\ + \sum_\pm \bigl[\bigl\|(V^\pm, P^\pm); H^{l+1}(\Upsilon_\pm)^2 \times H^l(\Upsilon_\pm)\bigr\|^2 + \bigl|\Pi^\pm\bigr|^2\bigr]\Bigr\}^{1/2} \end{aligned} \tag{26}$$

(вернулись к записи, включающей метки "$\pm$"). Далее через $\pi_\pm$ обозначаем непрерывные проекции в $\mathfrak{D}$; именно, $\pi_\pm(v,p) = \Pi^\pm$.

Замечание 2. 1) Для компонент v_j вектора скоростей из (25) конечны интегралы Дирихле $(\nabla v_j, \nabla v_j)_\Omega$. В давление p добавлено содержащее $\Pi^\pm$ слагаемое, кусочно постоянное на $\Omega \setminus B_{2R}$, – оно не мешает физическому осмыслению задачи и, более того, необходимо появляется при обобщенной постановке задач Стокса и Навье–Стокса (см. [8, 9] и др.).

2) Нетрудно обнаружить, что при $\pi_\pm(v,p) = 0$ выполняются включение $(v,p) \in \mathcal{D}^l_\beta(\Omega)$ и неравенство $\|(v,p); \mathcal{D}^l_\beta(\Omega)\| \leqslant c\|(v,p); \mathfrak{D}\|$; здесь $\beta \in (l-1, l+1)$, как и в следствии 1.

Очевидно, что оператор $\mathfrak{S}$ задачи Стокса (1), (3) действует непрерывно из $\mathfrak{D}$ в пространство $\mathfrak{R}$, состоящее из тех троек (f, g, h), которые допускают представления

$$\begin{aligned} f(x) &= \widetilde{f}(x) + \sum_\pm \chi_\pm(x)\, r^{-3}\, F^\pm(\varphi), \\ g(x) &= \widetilde{g}(x) + \sum_\pm \chi_\pm(x)\, r^{-2}\, G^\pm(\varphi), \end{aligned} \tag{27}$$

$$h(x) = \widetilde{h}(x) + \sum_{\pm} \chi_{\pm}(x)\, r^{-1}\, H^{\pm}(\varphi)$$

и имеют конечной норму

$$\|(f,g,h);\mathfrak{R}\| = \Big\{ \big\|(\widetilde{f},\widetilde{g},\widetilde{h});\mathcal{R}^l_\gamma(\Omega,\partial\Omega)\big\|^2 + \\ + \sum_{\pm} \big[\big\|(F^{\pm},G^{\pm}); H^{l-1}(\Upsilon_{\pm})^2 \times H^l(\Upsilon_{\pm})\big\|^2 + \\ + \big|H^{\pm}(\varphi_{\pm}-\alpha_{\pm})\big|^2 + \big|H^{\pm}(\varphi_{\pm}+\alpha_{\pm})\big|^2\big] \Big\}^{1/2}. \tag{28}$$

Обращаем внимание на то, что разложение h в (27) написано для подходящего продолжения этой вектор-функции, а для самого следа на $\partial\Omega$ в компонентах $H^{\pm}(\varphi)$ важно знать только $H^{\pm}(\varphi_{\pm}+\alpha_{\pm})$ и $H^{-}(\varphi_{\pm}-\alpha_{\pm})$ – это обстоятельство нашло отражение в (28). Отметим еще, что переход в (25), (27) к новым срезкам $\chi_{\pm}$ (в том числе вариация размера R) не изменяет пространств $\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{R}$ ни алгебраически, ни топологически.

Прежде чем исследовать полностью свойства отображения

$$\mathfrak{S} : \mathfrak{D} \to \mathfrak{R}, \tag{29}$$

приведем конкретизацию известной теоремы [1] (см. также теорему 3.2.1 [4]) об асимптотике решений эллиптических задач с коническими или угловыми точками (помимо ссылки на общие результаты, используются лемма 2 и следствие 2).

Предложение 3. *Пусть $(v,p) \in \mathcal{D}^l_\beta(\Omega)$ – решение задачи (1), (3) с правой частью $(f,g,h) \in \mathcal{R}^l_\gamma(\Omega,\partial\Omega)$, где l, β и γ подчинены условию следствия 1 и соотношению (24). Тогда для v и p справедливы представления (25), в которых*

$$(V^{\pm},P^{\pm}) = b_{\pm}\left(\mathcal{V}^{\pm(-1)},\mathcal{P}^{\pm(-1)}\right) + \mathbf{b}_{\pm}\left(\mathbf{V}^{\pm(-1)},\mathbf{P}^{\pm(-1)}\right); \tag{30}$$

вектор-функции справа построены в угловых выходах (4) согласно лемме 2, а $b_{\pm}$ и $\mathbf{b}_{\pm}$ – постоянные (разумеется, $\mathbf{b}_{\pm}=0$ в случае $\alpha_{\pm}<\pi/2$). Для коэффициентов $b_{\pm}$, $\mathbf{b}_{\pm}$ и остатка $(\widetilde{v},\widetilde{p})$ верна оценка

$$\big\|(\widetilde{v},\widetilde{p});\mathcal{D}^l_\beta(\Omega)\big\| + \sum_{\pm}\left(|b_{\pm}|+|\mathbf{b}_{\pm}|\right) \leqslant c\big\|(f,g,h);\mathcal{R}^l_\gamma(\Omega,\partial\Omega)\big\|. \tag{31}$$

Перейдем к доказательству основного утверждения этого раздела.

Теорема 1. 1) *Оператор* $\mathfrak{S}$ *из* (29) *фредгольмов и его индекс* $\operatorname{Ind}\mathfrak{S} = \dim\ker\mathfrak{S} - \dim\operatorname{coker}\mathfrak{S}$ *равен* 0 *при* $\alpha_\pm < \pi/2$ *и* -2 *при* $\alpha_\pm = \pi/2$.

2) *Подпространство* $\ker\mathfrak{S}$ *двумерно и натянуто на специальные решения* $(0,0,1)$ *и* $(\mathfrak{V},\mathfrak{P}) \in \mathfrak{D}$ *однородной задачи* (1), (3). *Второе решение характеризуется следующими формулами:*

$$\pi_\pm(\mathfrak{V},\mathfrak{P}) = \mp\frac{1}{2}, \quad J(\mathfrak{V};\Gamma) \equiv \int\limits_\gamma \mathfrak{V}\cdot n ds_x > 0; \tag{32}$$

здесь Γ – *произвольный простой гладкий контур, соединяющий лучи* $\{x : r > R, \varphi = \varphi_+ \pm \lambda_+\}$ *внутри* Ω, *а* n – *нормаль, внутренняя для области, отсекаемой от* Ω *дугой* Γ *и содержащей бесконечную часть угла* K_+.

3) *Если* $\alpha_\pm = \pi/2$ $(\alpha_\pm < \pi/2)$, *то подпространство* $\operatorname{coker}\mathfrak{S}$ *четырехмерно (двумерно) и дефектные функционалы могут быть выбраны в соответствии с леммой* 2, *т.е. условия разрешимости задачи* (1), (3) *в классе* $\mathfrak{D}$ *имеют вид*

$$\begin{split}\int\limits_{\Upsilon_\pm} G^\pm(\varphi)d\varphi + \sum_{\theta=\pm\alpha}\frac{\theta}{\alpha}\Big[H_2(\varphi_\pm+\theta)\cos(\varphi_\pm+\theta)-\\ -H_1^\pm(\varphi_\pm+\theta)\sin(\varphi_\pm+\theta)\Big] = 0,\end{split} \tag{33}$$

$$\int\limits_{(\pi\pm\pi)/2}^{(3\pi\pm\pi)/2} F_1^\pm(\varphi)\sin\varphi d\varphi + \nu\left[H_1^\pm\left(\frac{\pi\pm\pi}{2}\right) + H_1^\pm\left(\frac{3\pi\pm\pi}{2}\right)\right] = 0 \tag{34}$$

(условие (34) *не принимается во внимание, если* $\alpha_\pm < \pi/2$*).*

Доказательство. Сначала рассмотрим такой оператор задачи Стокса:

$$\mathfrak{S}^0 : \mathfrak{D} = \{(v,p) \in \mathfrak{D} : \pi_\pm(v,p) = 0\} \to \mathfrak{R}^0; \tag{35}$$

при этом в $\mathfrak{R}^0$ поместим те элементы $(f,g,h) \in \mathfrak{R}$, для которых выполнены условия ортогональности (33) (и (34) в случае $\alpha_\pm = \pi/2$). Ввиду замечания 2(2) и следствия 1 имеем $\ker\mathfrak{S}^0 = \{0\}$. Если $(f,g,h) \in \mathfrak{R}^0$, то в силу следствия 3 задачи (19) на дугах $\Upsilon_\pm$ разрешимы; обозначим их операторы через $\mathbb{A}_\pm$. Фиксируем каким-либо способом непрерывные линейные обратные $\mathbb{B}_\pm$ к эпиморфизмам

$$\mathbb{A}_\pm : H^{l+1}(\Upsilon_\pm)^2 \times H^l(\Upsilon_\pm) \to \operatorname{Im}\mathbb{A}_\pm$$

и, положив $(V^{0\pm}, P^{0\pm}) = \mathbb{B}_\pm(F^\pm, G^\pm, H^\pm)$, получим

$$\begin{gathered}\left\|(V^{0\pm}, P^{0\pm}); H^{l+1}(\Upsilon_\pm)^2 \times H^l(\Upsilon_\pm)\right\| \leqslant \\ \leqslant c\left\|(F^\pm, G^\pm, H^\pm); H^{l-1}(\Upsilon_\pm)^2 \times H^l(\Upsilon_\pm) \times \mathbb{C}^4\right\| \leqslant C\|(f,g,h);\mathfrak{R}\|\end{gathered} \tag{36}$$

(сравни с (28)). Заметим, что теперь

$$(f^0, g^0, h^0) \equiv (f,g,h) - \sum_\pm \mathfrak{S}\left(\chi_\pm(V^{0\pm}, P^{0\pm})\right) \in \mathcal{R}^l_\gamma(\Omega, \partial\Omega).$$

Согласно следствию 1 найдется (единственное) решение $(v^0, p^0) \in \mathcal{D}^l_\beta(\Omega)$ задачи (1), (3) с такой правой частью, причем в соответствии с предложением 3 $(v^0, p^0) \in \mathfrak{D}^0$ и при учете (31), (26) и (36), (28)

$$\left\|(v^0, p^0); \mathfrak{D}\right\| \leqslant c\left\|(f^0, g^0, h^0); \mathfrak{R}\right\| \leqslant C\left\|(f,g,h);\mathfrak{R}\right\|.$$

Итак, $(v^0, p) = (v^0, p^0) + \sum_\pm \chi_\pm(V^{0\pm}, P^{0\pm}) \in \mathfrak{D}^0$ – решение задачи (1), (3) и верна оценка $\|(v,p);\mathfrak{D}\| \leqslant c\|(f,g,h);\mathfrak{R}\|$, т.е. $\mathfrak{S}^0$ – изоморфизм (так как $\dim\ker\mathfrak{S}^0 = 0$ по доказанному ранее).

Фактопространство $\mathfrak{D}/\mathfrak{D}^0$ двумерно и потому индекс оператора $\mathfrak{S}^0 : \mathfrak{D} \to \mathfrak{R}^0$ также равен двум. Он – эпиморфизм, поскольку нетрудно предъявить два линейно независимых решения из $\mathfrak{D}$ однородной задачи (1), (3): во-первых, очевидное решение (0,0,1) (постоянное давление в покоящейся жидкости) и, во-вторых, вектор-функция

$$(\mathfrak{V}, \mathfrak{P}) = \sum_\pm \pm\frac{1}{2}\,\chi_\pm(0,0,1) + (\mathfrak{V}^0, \mathfrak{P}^0),$$

где $(\mathfrak{V}^0, \mathfrak{P}^0) \in \mathfrak{D}^0 \subset \mathcal{D}^l_\beta(\Omega)$ – решение задачи (1), (3) с правой частью

$$-\sum_\pm \pm\frac{1}{2}\,\mathfrak{S}\big[\chi_\pm(0,0,1)\big] \in C_0^\infty(\overline{\Omega})^3 \times C_0^\infty(\partial\Omega)^2.$$

Известно (см. [1] и леммы 3.5.11, 3.3.1 [4]), что при нарушении условий ортогональности (33), (34) решения $(v,p) \in \mathcal{D}^l_\beta(\Omega)$ задачи (1), (3) с правой частью $(f,g,h) \in \mathfrak{R}$ представляются как сумма элемента пространства $\mathfrak{D}$ и выражения

$$\begin{gathered}\log r \sum_\pm \chi_\pm\Big\{C_\pm\big(r^{-1}\mathcal{V}^{\pm(-1)}, r^{-2}\mathcal{P}^{\pm(-1)}\big) + \\ + \mathbf{C}_\pm\big(r^{-1}\mathbf{V}^{\pm(-1)}, r^{-2}\mathbf{P}^{\pm(-1)}\big)\Big\}\end{gathered}$$

($\mathbf{C}_\pm = 0$ в случае $\alpha_\pm < \pi/2$), причем постоянные $C_\pm$ и $\mathbf{C}_\pm$ пропорциональны интегралам слева в (33) и (34). Таким образом, упомянутое решение попадает в $\mathfrak{D}$ только при выполнении равенств $C_\pm = 0$ и $\mathbf{C}_\pm = 0$, эквивалентных (33) и (34).

Из приведенных фактов вытекают все утвержления теоремы 1, за исключением второго соотношения в (32) – проверим его. Сначала отметим, что благодаря уравнениям $\nabla\cdot\mathfrak{V} = 0$ в Ω и $\mathfrak{V} = 0$ на $\partial\Omega$ интеграл $J(\mathfrak{V};\Gamma)$ не зависит от выбора пути интегрирования Γ. Возьмем теперь $\Gamma = \partial B_\rho \cap K_+$, считая ρ сколь угодно большим, и воспользуемся формулой Грина в области $\Omega\cap B_\rho$ для векторов $(\mathfrak{V}, \mathfrak{P} - 1/2)$ и $(0,0,1)$:

$$0 = \big(-\nu\nabla\cdot\nabla\mathfrak{V} + \nabla\big[\mathfrak{P} - 1/2\big], \mathfrak{V}\big)_{\Omega\cap B_\rho} =$$
$$= \nu\sum_{j=1}^{2}\big(\nabla\mathfrak{V}_j, \nabla\mathfrak{V}_j\big)_{\Omega\cap B_\rho} - \sum_{\pm}\left(\nu\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial r} - \frac{x}{\rho}\left[\mathfrak{P} - \frac{1}{2}\right], \mathfrak{V}\right)_{\partial B_\rho\cap K_\pm}. \qquad (37)$$

По построению при любом $\sigma > 0$

$$\mathfrak{V} \in V^{l+1}_{l+1-\sigma}(\Omega)^2,\ \mathfrak{P} + \frac{1}{2} \in V^{l}_{l+1-\sigma}(\Omega\cap\mathbb{R}^2_+),\ \mathfrak{P} - \frac{1}{2} \in V^{l}_{l+1-\sigma}(\Omega\cap\mathbb{R}^2_-).$$

Поэтому правая часть (37) лишь суммой

$$\nu\sum_{j=1}^{2}\big(\nabla\mathfrak{V}_j, \nabla\mathfrak{V}_j\big)_{\Omega} - J(\mathfrak{V}; \partial B_\rho\cap K_+)$$

отличается от бесконечно малой (при $\rho\to\infty$). Ясно, что первый член положительный (равенства $\mathfrak{V}_j = c_j$ невозможны). Вспоминая независимость $J(\mathfrak{V};\Gamma)$ от пути интегрирования, выбираем ρ достаточно большим и заканчиваем доказательство формулы (32), а вместе с ней и всей теоремы. •

Указанный теоремой 1 (2) произвол в выборе аддитивной постоянной в давлении вполне естественен с физической точки зрения. Наличие еще одного решения однородной задачи Стокса принуждает вводить дополнительное ограничение на решение, добиваясь тем самым требуемой единственности. Традиционно в подобных задачах задается либо суммарный поток через сечение области Ω (через отверстие в перегородке; см. [8]), либо перепад давления (разность $\Pi^+ - \Pi^-$; см. [8, 5]). Для формализации таких условий рассмотрим непрерывный линейный функционал $\pi_\Omega : \mathfrak{D} \to \mathbb{R}$, определенный одной из двух формул

$$\begin{aligned} \pi_\Omega(v,p) &= \lim_{\rho\to\infty} J(v;\partial B_\rho \cap K_+), \\ \pi_\Omega(v,p) &= \lim_{K_+\ni x\to\infty} p(x) - \lim_{K_-\ni x\to\infty} p(x). \end{aligned} \tag{38}$$

Благодаря асимптотическим представлениям (25) все пределы справа в (38) действительно имеют смысл. Первый из них совпадает в реальной ситуации $g = 0$, $h = 0$ с потоком, вычисленным по любому сечению Γ, описанному в теореме 1 (2). Во втором случае π_Ω – разность уже обсуждавшихся проекций π_+ и π_-.

Следующее утверждение вытекает из теоремы 1 и, в частности, из провозглашенных ею свойств (32) специального решения $(\mathfrak{V}, \mathfrak{P}) \in \ker \mathfrak{S}$.

Теорема 2. *Задача* (1), (3), *дополненная уравнением*

$$\pi_\Omega(v,p) = j, \tag{39}$$

имеет решение $(v,p) \in \mathfrak{D}$ *при любой правой части*

$$(f,g,h,j) \in \mathfrak{R}^0 \times \mathbb{R}. \tag{40}$$

Это решение определено с точностью до аддитивной постоянной в давлении, а решение, нормированное условием

$$T(v,p) = 0, \tag{41}$$

где T – непрерывный линейный функционал на $\mathfrak{D}$, такой, что $T(0,0,1) \neq 0$, допускает оценку

$$\|(v,p);\mathfrak{D}\| \leqslant c\big(\|(f,g,h);\mathfrak{R}\| + |j|\big). \tag{42}$$

4. Задача Навье–Стокса при $\alpha_\pm < \pi/2$. Как и в случае уравнений Стокса, снабдим задачу (2), (3) асимптотическим условием (39).

Лемма 3. *Отвечающее нелинейному члену из* (2) *отображение*

$$\mathfrak{D} \ni (v,0) \mapsto \mathfrak{N}v = \big([v\cdot\nabla]\,v,0,0\big) \in \mathfrak{R}, \tag{43}$$

непрерывно; справедлива оценка $\|\mathfrak{N}v;\mathfrak{R}\| \leqslant c\|(v,0);\mathfrak{D}\|^2$.

Доказательство. Для краткости запишем первое из разложений (25) в виде $v = \widetilde{v} + \Sigma$. Имеем

$$f \equiv (v\cdot\nabla)v = (\Sigma\cdot\nabla)\Sigma + (\Sigma\cdot\nabla)\,\widetilde{v} + (\widetilde{v}\cdot\nabla)\Sigma + (\widetilde{v}\cdot\nabla)\,\widetilde{v}. \tag{44}$$

Представим f в форме, предложенной в (27), и установим соответствующие оценки составляющих $\widetilde{f}$ и $F^{\pm}$. Выполнив дифференцирование в полярных координатах, заметим, что

$$\big(\Sigma(x)\cdot\nabla\big)\Sigma(x) = \mathcal{F}^0(x) + \sum_{\pm} \chi_{\pm}\, r^{-3}\mathcal{F}^{\pm}(\varphi),$$

где $\mathcal{F}^{\pm} \in H^{l-1}\Upsilon_{\pm})^2$ в силу вложения $H^{l+1}(\Upsilon_{\pm}) \subset C^l(\Upsilon_{\pm})$ и $\mathcal{F}^0 \in H^{l-1}(\Omega)^2$ – вектор-функция с носителем в $\overline{\Omega\cap B_{2R}}$. Положим $F^{\pm} = \mathcal{F}^{\pm}$, а величину $\mathcal{F}^0$ отнесем к остатку $\widetilde{f}$ (она, конечно же, принадлежит $V^{l-1}_{\gamma}(\Omega)^2$). Так как $\widetilde{v} \in V^{l+1}_{\gamma}(\Omega)^2$ и $\gamma > l+1$, необходимая информация о $(\widetilde{v}\cdot\nabla)\,\widetilde{v}$ извлекается из леммы 1. Кроме того, согласно определению весовых классов

$$\big\|(\Sigma\cdot\nabla)\,\widetilde{v}; V^{l-1}_{\gamma}(\Omega)\big\| + \big\|(\,\widetilde{v}\cdot\nabla)\Sigma; V^{l-1}_{\gamma}(\Omega)\big\| \leqslant$$

$$\leqslant cM\Big(\big\|\,\widetilde{v}; V^{l}_{\gamma-1}(\Omega)\big\| + \big\|\,\widetilde{v}; V^{l-1}_{\gamma-2}(\Omega)\big\|\Big) \leqslant cM\big\|\,\widetilde{v}; V^{l+1}_{\gamma}(\Omega)\big\|,$$

причем благодаря структуре выражения Σ

$$M \equiv \sup\Big\{\,|\nabla^k\Sigma(x)|(1+r)^{1+k}\ \Big|\ x\in\Omega,\ k=0,1,\dots,l\Big\} \leqslant$$

$$\leqslant c\sup\Big\{\,|\partial^k_{\varphi}V^{\pm}(\varphi)|r^{-1-k}(1+r)^{1+k}\ \Big|\ \varphi\in\Upsilon_{\pm},\ r>R,\ k=0,1,\dots,l\Big\} \leqslant$$

$$\leqslant c\sum_{\pm}\big\|V^{\pm}; C^l(\Upsilon_{\pm})\big\| \leqslant c\sum_{\pm}\big\|V^{\pm}; H^{l+1}(\Upsilon_{\pm})\big\|.$$

Теперь доказываемое утверждлдение сомнений не вызывает. •

При $\alpha_{\pm} < \pi/2$ подпространство $\mathfrak{R}^0$ (см. (35)) получается из $\mathfrak{R}$ наложением условий (33), не затрагивающих $F^{\pm}$. Таким образом, оператор $\mathfrak{N}$, определенный в (43), действует на самом деле в подпространство $\mathfrak{R}^0$, т.е. принцип Банаха (принцип сжимающих отображений) вместе с теоремой 2 и леммой 3 доставляет очередное утверждение.

Теорема 3. *Пусть* $\alpha_{\pm} < \pi/2$. *Существует* $\delta = \delta(\nu,\Omega) > 0$, *такое, что задача* (2), (3), (39) *с правой частью* (40) *(т.е. выполнены условия* (33)*), подчиненной соотношению*

$$\|(f,g,h);\mathfrak{R}\| + |j| < \delta \tag{45}$$

имеет решение (v,p) *в шаре из* $\mathfrak{D}$ *с радиусом* $C\delta$. *Решение можно нормировать условием* (41) *– такое решение станет единственным и окажется верной оценка* (42).

5. Задача Навье–Стокса при $\alpha_\pm = \pi/2$**.** То обстоятельство, что в предыдущем разделе $\mathfrak{N}v \in \mathfrak{R}^0$ при всех $(v,p) \in \mathfrak{D}$, было решающим: условия ортогональности (33) обеспечивались требованиями к g и h. В следующей лемме мы покажем, что при $\alpha_\pm = \pi/2$ из-за появления нового условия ортогональности (34) ситуация в корне меняется и применение принципа Банаха становится проблематичным.

Вернемся к обозначениям из леммы 2 (не пишем "$\pm$").

Лемма 4. *Пусть* $\varphi^0 = \alpha = \pi/2$,

$$V = a\mathcal{V}^{(-1)} + \mathbf{a}\mathbf{V}^{(-1)} \tag{46}$$

и $r^{-3}\mathfrak{F}(\varphi) = (r^{(-1)}V(\varphi)\cdot\nabla)[r^{-1}V(\varphi)]$; *тогда*

$$\int\limits_0^\pi \mathfrak{F}_1(\varphi)\sin\varphi\, d\varphi = -\frac{\pi}{2}a\mathbf{a}.$$

Доказательство. Пользуясь равенствами (16), (17) и переходя к полярным координатам при дифференцировании, получаем, что

$$\mathfrak{F}_1(\varphi) = -\big[a(1-\cos 2\varphi) + \mathbf{a}\sin 2\varphi\big]^2\cos\varphi.$$

Остальные вычисления просты. $\bullet$

Итак, даже для решения (v,p) линейной задачи выражение $\mathfrak{N}v$ лежит вне $\mathfrak{R}^0$ в том случае, когда угловая часть (46) асимптотики (25) содержит оба собственных вектора $\mathcal{V}^{(-1)}$ и $\mathbf{V}^{(-1)}$. Иными словами, задачу Навье–Стокса нельзя рассматривать на $\mathfrak{D}$ как возмущение задачи Стокса. Нас спасает следующее наблюдение: если $H_1^{(+\alpha)} = -H_1^{(-\alpha)}$ и функция $(-\pi/2,\pi/2) \ni \theta \mapsto F_1(\theta+\pi/2)$ нечетная, то равенство (23) выполняется автоматически (пояснение к лемме 4: требуя нечетность функции $\theta \mapsto V_1(\theta+\pi/2)$, мы тем самым аннулируем $\mathbf{a}$ в (46) из-за отсутствия такого свойства у $\mathbf{V}_1^{(-1)}$; см. (17)). Таким образом, разумно попытаться добиться нужных ортогональностей, сузив постановку задачи за счет условий симметрии:

$$\Omega = \{x : (-x_1, x_2) \in \Omega\};$$

$$f_1(x) = -f(-x_1,x_2), \quad h_1(x) = -h(-x_1,x_2), \tag{47}$$

$$f_2(x) = f_2(-x_1, x_2), \quad h_2(x) = h_2(-x_1, x_2), \quad g_1(x) = g(-x_1, x_2),$$

В этом случае решение (v, p) также можно подчинить соотношениям

$$v_1(x) = -v_1(-x_1, x_2), \quad v_2(x) = v_2(-x_1, x_2), \quad p(x) = p(-x_1, x_2). \quad (48)$$

Ясно, что в силу (48) $(v \cdot \nabla)v_2$ и $(v \cdot \nabla)v_1$ – соответственно четная и нечетная функция переменной x_1. Поэтому следующее утверждение, дополняющее лемму 3 в случае $\alpha_\pm = \pi/2$, очевидно.

Лемма 5. *Если для* $(v, p) \in \mathfrak{D}$ *выполняется* (48), *то* $\mathfrak{N}v \in \mathfrak{R}^0$.

Обращая внимание на то, что решения уравнений Навье–Стокса, вообще говоря, могут терять свойства четности (48). Тем не менее, интерпретируя нелинейный член $\mathfrak{N}$ как малое возмущение оператора $\mathfrak{S}$, суженное на подпространство в $\mathfrak{D}$, которое выделено формулами (47), приходим к желанному результату при помощи леммы 5 вкупе с принципом Банаха.

Теорема 4. *Пусть* $\alpha_\pm = \pi/2$, *но область* Ω *симметрична относительно оси абсцисс. Тогда найдется* $\delta = \delta(\nu, \Omega) > 0$ *такое, что задача* (2), (3), (39) *с правой частью, подчиненной соотношениям* (40), (45), (47) *(при этом требования* (33), (34) *соблюдены), имеет решение* (v, p) *в шаре из* $\mathfrak{D}$ *с радиусом* $C\delta$. *Это решение удовлетворяет* (48) *и его можно нормировать условием* (41).

6. Несколько замечаний. 1) Приведем еще одно объяснение причин появления ограничений (48). Пусть $w(x) = r^{-1} W(\varphi)$ и w удовлетворяет соотношениям $\nabla \cdot w = 0$ в $\mathbb{R}^2_+$ и $w = 0$ на $\partial\mathbb{R}^2_+$ (физически естественные условия). Положим $r^{-3}F(\varphi) = f(x) = (w(x) \cdot \nabla)w(x)$; тогда

$$\int\limits_0^\pi F_1(\varphi) \sin\varphi \, d\varphi = \left(\ln\frac{b}{a}\right)^{-1} \int\limits_T f_1(x) x_2 \, dx,$$

где $T = \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 < a < r < b\}$ – полукольцо (с произвольными размерами a и b). Интегрируя по частям, находим

$$\int\limits_T x_2 f dx = \int\limits_T x_2 \left(w_1 \frac{\partial w_1}{\partial x_1} + w_2 \frac{\partial w_1}{\partial x_2} \right) dx =$$

$$-\int_T (x_2 w_1 \nabla \cdot w + w_1 w_2) dx + \int_{\partial T} x_2 w_1 (w \cdot n) ds_x.$$

Так как последнее подынтегральное выражение есть однородная функция степени -1, интегралы по внутреннему и внешнему обводам полукольца взаимно уничтожаются. Следовательно, в силу названных свойств вектора w обсуждаемому условию ортогональности можно придать вид

$$\int_T w_1(x) w_2(x) dx = 0. \tag{49}$$

Разумеется, (49) вытекает из аналогичных (48) соотношений

$$w_1(x) = -w_1(-x_1, x_2), \quad w_2(x) = w_2(-x_1, x_2). \tag{50}$$

Нетружно придумать другие примеры, в которых выполнение (49) обеспечивается какими-либо предположениями о симметрии. Так, если поменять в (47), (48) местами условия четности и нечетности (т.е. в результате (50) перейдет в

$$w_1(x) = w_1(-x_1, x_2), \quad w_2(x) = -w_2(-x_1, x_2)),$$

то справедлива формула (49), а значит, и утверждение типа теоремы 4. При этом ввиду назначенной симметрии условие (39) обязано быть однородным – оно удовлетворяется автоматически. Физическое истолкование поставленной задачи не столь прозрачно, как в случае (48).

2) Геометрически возможна ситуация, в которой, например, $\alpha_+ < \pi/2$, но $\alpha_- \geqslant \pi/2$ (отказываемся от (5)). При $\alpha_- > \pi/2$ в асимптотике решения задачи Стокса на K_- появляется степенное решение (7) с $\Lambda = -\Lambda_0$, где $\Lambda_0 \in (0,1)$ – первый положительный корень уравнения (10). Это приводит в следствии 1 к сужению интервала изменения параметра β до $(l - \Lambda_0, l + \Lambda_0)$, а лемма 3 вообще перестает быть верной. Как и в случае $\alpha_- = \pi/2$, положение дел исправляется введением ограничений (47) на симметрию данных задачи: нетрудно убедиться в том, что названное степенное решение не удовлетворяет требуемому условию четности, т.е. множитель при нем в асимптотике решения должен обратиться в нуль – теперь восстанавливается утверждение следствия и работает схема из разд. 5.

3) Общие результаты [3] (см. также §§3.6, 4.1 [4]) о задачах в областях с коническими или угловыми точками позволяют перенести теоремы 1–4, оперирующие с $V^l_\sigma(\Omega)$, на случай весовых пространств L_p или весовых классов Гельдера. Мы воздерживаемся от формулировок соответствующих утверждений, поскольку они сводятся к стандартным определениям норм и прямому пересказу самих теорем с очевидными изменениями границ для весовых показателей β и γ.

4) Как уже упоминалось, для решения $(v,p)\in\mathfrak{D}$ сходится интеграл Дирихле. Если данные задачи бесконечно дифференцируемы (включение (40) имеет место при любом $l=1,2,\dots$ и показателе γ, подчиненном (24)), то для всякого $k=0,1,\dots$

$$\big|\nabla^k v(x)\big| = O\big(r^{-1-k}\big),\ \big|\nabla^k\big(p(x)-\Pi^\pm\big)\big| = O\big(r^{-2-k}\big),\ K_\pm\ni x\mapsto\infty.$$

Эти соотношения можно получить либо при помощи теорем вложения (см. начало доказательства леммы 1), либо за счет приспособления теорем 3 и 4 к весовым классам Гельдера.

5) Геометрически простейшей является область $\Omega=\mathbb{R}^2\setminus\{x: x_2=0,\,|x|\geqslant L>0\}$ – плоскость с двумя полубесконечными разрезами (отметим, что условие симметрии соблюдено, и что именно эта задача [8] об отверстии в перегородке инициировала многочисленные исследования, упомянутые в разд. 1). Граница $\partial\Omega$ имеет две угловые точки с растворами 2π, вершины $\mathcal{O}^\pm$ разрезов. В них решения задач (1), (3) и (2), (3) теряют гладкость и потому не принадлежат $V^{l+1}_\beta(\Omega)$ с $l>0$. Эту неприятность легко устранить введением пространства $V^l_{\beta,\mu}(\Omega)$ с нормой

$$\Big(\sum_{k=0}^{l}\big\|(1+r)^{\beta-l+k}\min\{1,r_\pm\}^{\mu-l+k}\,\nabla^k z;L_2(\Omega)\big\|^2\Big)^{1/2}:$$

теоремы 1 и 2 сохраняются, если в их формулировках заменить $V^{l\pm1}_\beta(\Omega)$ и т.п. на $V^{l\pm1}_{\beta,\mu}(\Omega)$ и т.п., а также установить ограничение

$$|\mu-l|<1/2.$$

Отметим, что $1/2$ – первый положительный корень уравнения (10) при $\alpha_\pm=\pi$ (сравни с п. 2 данного раздела), а $r_\pm=\operatorname{dist}(x,\mathcal{O}^\pm)$. Несложно убедиться в том, что при соответствующих заменах остаются в силе леммы 1, 3, а значит, и теоремы 3, 4. Подчеркнем, что методы исследования в точности такие же, как и ранее, – общая теория (см. [1–4] и др.) линейных эллиптических задач в областях с кусочно гладкими границами не различает (в существенном) угловые точки и угловые выходы на бесконечность.

Литература

1. В. А. Кондратьев, *Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками.* — Труды Московск. матем. общества **16** (1967), 219–292.
2. В. Г. Мазья, Б. А. Пламеневский, *О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач в областях с коническими точками.* — Math. Nachr. **76** (1977), 29–60.
3. В. Г. Мазья, Б. А. Пламеневский, *Оценки в L_p и в классах Гельдера и принцип Миранда–Агмона для решений эллиптических краевых задач в областях с особыми точками на границе.* — Math. Nachr. **81** (1978), 25–82.
4. С. А. Назаров, Б. А. Пламеневский, *Эллиптические задачи в областях с кусочно гладкой границей.* Наука, М. (1991).
5. W. Borchers, K. Pileckas, *Existence, uniqueness and asymptotics of steady jets.* — Arch. Rat. Mech. Anal. **120** (1992), 1–49.
6. J. G. Heywood, *Open problems in the theory of the Navier–Stokes equations for viscous incompressible flow.* — Lecture Notes in Math. **1431** (1990), 1-22.
7. G. P. Galdi, *An introduction to the mathematical theory of the Navier–Stokes equations.* Berlin, Springer-Verlag (1994).
8. J. G. Heywood, *On uniqueness questions in the theory of viscous flow.* — Acta Math. **136** (1976), 61–102.
9. О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, *О разрешимости краевых и начально-краевых задач для уравнений Навье–Стокса в областях с некомпактными границами.* — Вестник ЛГУ **13** (1977), 39–47.
10. H. Chang, *The steady Navier–Stokes problem for low Reynolds number viscous jets.* — Lecture Notes in Math. **1530** (1992), 85–96.
11. V. Coscia, M. C. Patria, *Existence, uniqueness and asymptotic decay of steady flow of an incompressible fluid in a half space.* — Stability Appl. Anal. Cont. Media **2** (1992), 101–127.
12. W. Borchers, G. P. Galdi, K. Pileckas, *On the uniqueness of Leray–Hopf solutions for the flow through an aperture.* — Arch. Rat. Mech. Anal. **122** (1993), 19–33.
13. S. A. Nazarov, *On the two-dimensional aperture problem for Navier–Stokes equations.* — C. R. Acad. Sci. Paris. Sér.1 **323, No. 6** (1966), 699–703.
14. M. L. Williams, *Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension.* — J. Appl. Mech. **19, No. 4** (1952), 526–528.
15. V. A. Solonnikov, *On the Stokes equations in domains with nonsmooth boundaries and on a viscous incompressible flow with a free surface.* — Nonlinear partial diff. Eqs. and their Appl., Collège de France Semin. **3** (1980/81), 340–423.
16. В. З. Партон, П. И. Перлин, *Методы математической теории упругости.* Наука, М. (1981).

Nazarov S. A. The Navier–Stokes problem in a two-dimensional domain with angulate outlets to infinity.

The Navier–Stokes problem in a plane domain with two angulate outlets to infinity, as usual, is supplied either by the flux condition, or by the pressure drop one. It is proven for small data that there exists a solution with the velocity field decay $O(|x|^{-1})$ as $|x| \to \infty$ (if one of the angles equals or greater than π, the additional symmetry assumptions are needed). Since the nonlinear and linear terms are asymptotically of the same power, the results are based on the complete investigation of the linearized Stokes problem in weighted spaces with detached asymptotics (angular parts in the representations are not fixed).

Институт проблем
машиноведения РАН

Поступило 21 сентября 1998 г.