Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 257, 1999 г.

А. С. Старков

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ О ДВИЖУЩЕМСЯ С УСКОРЕНИЕМ ИСТОЧНИКЕ ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Рассмотрим задачу о построении асимптотического решения волнового уравнения

$$\Delta u - \frac{1}{c^2(x)}\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -A(t)\, e^{-i\omega t}\, \delta(x - x_0(t)), \tag{1}$$

$$x = (x^1, x^2, \dots, x^m), \quad x_0 = (x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^m), \quad c(x),\ A(t),\ x_0(t) \in C^\infty,$$

удовлетворяющего начальным условиям

$$u\big|_{t<-t_0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}\big|_{t<-t_0} = 0, \quad t_0 > 0, \tag{2}$$

в случае движущегося со скоростью $\overline{v} = dx_0/dt$ источника переменной интенсивности $A(t)$ и частоты ω. Здесь Δ – оператор Лапласа, $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака, $c(x)$ – скорость звука, а решение $u(t,x)$ ищется в классе обобщенных функций.

Мы будем предполагать, что абсолютная величина скорости $|\overline{v}| < c(x_0)$, $t < 0$, т.е. скорость источника меньще скорости звука при $t > 0$, и , наоборот, $|\overline{v}| > c(x_0)$, $t > 0$. Ускорение источника $d\overline{v}/dt$ в момент $t = 0$ предполагается отличным от $\overline{0}$. Основной целью работы является нахождение асимптотики волнового поля $u(t,x)$ вблизи источника при малых временах, т.е. получение функций, описывающих переход от дозвуковой скорости источника к сверхзвуковой скорости.

Ранее задача (1), (2) рассматривалась по отдельности для дозвуковой [1, 2] и сверхзвуковой [2, 3] скорости источника. Полученное в этих работах асимптотическое разложение поля точечного источника имеет вид

$$u(x,t) = \sum_{j=0}^{\infty} \left(a_j\, g_{j-\frac{m-2}{2}}(\omega,\tau) + i\omega b_j\, g_{j-\frac{m-4}{2}}(\omega,\tau) \right) e^{i\omega\varphi},$$

где a_j, b_j, φ, τ – искомые функции. Функции $g_p(\omega,\tau)$ при дозвуковой скорости источника имеют вид

$$g_p(\omega,\tau) = i\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,e^{ip\pi}\left(\frac{2\tau}{\omega}\right)H_p^{(1)}(\omega,\tau). \tag{3}$$

Для сверхзвуковой скорости источника функции Ханкеля в (3) следует заменить на функции Бесселя $J_p(\omega\tau)$.

Семейства волновых фронтов от источника, движущегося в однородной среде по прямой линии, изображены на Рис. 1 в случаях, когда а) скорость источника постоянна и меньше скорости звука; б) скорость источника больше скорости звука; в) ускорение источника постоянно. В случаях б) и в) у этих семейств имеются огибающие: знаменитый конус Маха и стреловидная поверхность, описанная еще в [4]. Из Рис. 1 видно, что для дозвуковой скорости источника в каждую точку приходит 1 луч, при сверхзвуковой – 2 или 0, а для ускоряющегося источника число лучей изменяется от 1 до 3.

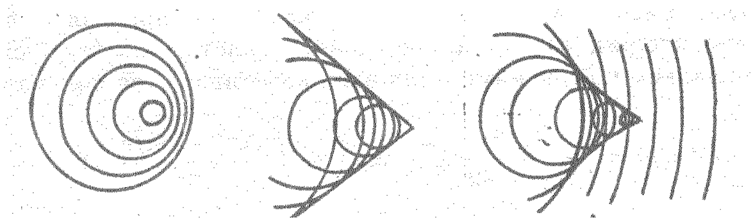

Рис. 1.

Обозначим через $h(t,x,y)$ решение задачи Коши

$$\Delta h - \frac{1}{c^2(x)}\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = -\delta(t, x-y), \quad h\big|_{t<0} = 0 \tag{4}$$

(фундаментальное или элементарное решение). Асимптотика $h(t,x,y)$ по гладкости была найдена Адамаром [5] и имеет вид разложения

$$h(x,t,y) = \sum_{j=0}^{\infty} v_j(x,y)\,S_{j-\frac{m-1}{2}}(\lambda), \tag{5}$$

где $S_p(\lambda)$ есть однородные обобщенные функции степени p [6]:

$$S_p(\lambda) = \frac{\lambda_+^p}{\Gamma(p+1)}, \quad \lambda(t,x,y) = t^2 - \tau^2(x,y);$$

$\lambda_+ = \lambda$ для $\lambda > 0$ и $t > 0$, $\lambda_+ = 0$, если $\lambda < 0$ или $t < 0$. Эйконал $\tau(x,y)$ отвечает лучам, исходящим из источника, и является решением уравнения эйконала

$$\nabla^2\tau = \frac{1}{c^2(x)}.$$

Также $\tau(x,y)$ является геодезическим расстоянием от точки y до точки x в римановой метрике $ds^2 = c^{-2}(x)\sum_{i=1}^m (dx_i)^2$, а $\lambda(t,x,y)$ – квадрат расстояния от точки $(0,y)$ до точки (t,x) в метрике Минковского $dT^2 = dt^2 - ds^2$, и в римановой окрестности точки y

$$\lambda(t,x,y) = t^2 - c^{-2}(y)\sum_{i=1}^m (x_i - y_i)^2 - \dots .$$

Поверхность $\lambda(t,x,y) = 0$ в малой окрестности y диффеоморфна круговому конусу и называется характеристическим коноидом.

Коэффициенты Адамара $v_j(x,y)$ однозначно определяются из условия, что ряд (5) формально удовлетворяет (4) и $v_j(x,y)$ являются гладкими функциями. Для этих коэффициентов получаем

$$v_0(x,y) = \frac{2}{(c(y))^{m-2}2\pi^{\frac{m-1}{2}}}\exp\left(-\int_0^\tau \frac{\Delta\tau^2 - 2m/c^2}{4\tau}d\tau\right),$$

$$v_j(x,y) = \tau^{-j}v_0(x,y)\left(\frac{1}{4}\int_0^\tau v_0^{-1}(x,y)\tau^{j-1}c^2\Delta v_{j-1}d\tau\right), \quad j \geqslant 1.$$

Для аналитической $c(x)$ разложение (5) не только дает асимтотику элементарного решения по гладкости, но и сходится в обычном смысле в некоторой окрестности источника [5].

Записывая решение задачи (1), (2) при помощи элементарного решения (5), получаем

$$u(t,x,y) = \\ = \int_{-t_0}^{\infty} e^{-i\omega\tau}A(\sigma)\sum_{j=0}^{\infty} v_j(x,x_0(\sigma))\,S_{j-\frac{m-1}{2}}(\lambda(t-\sigma,x,x_0(\sigma))d\sigma. \quad (7)$$

При $m = 3$ (m – нечетно, $m \neq 1$) первое слагаемое в (7) может быть вычислено явно, так как

$$S_{-1}(\lambda) = \delta(\lambda) \ \left(S_{-m-1/2}(\lambda) = \delta^{m-3/2}(\lambda)\right),$$

и результат содержит корни алгебраического уравнения

$$\lambda^{+}(t-\sigma, x, x_0(\tau)) = 0. \tag{8}$$

Поместим начало системы координат в точку 0 перехода на сверхзвуковую скорость и рассмотрим характеристический коноид $K : \lambda(t, x, 0) = 0$ с вершиной в 0 (Рис. 2). Будем предполагать, что $\lambda > 0$ внутри K при $t > 0$. Кривая $V : x = x_0(t)$, по которой движется источник, при $t > 0$ находится вне коноида. Множество коноидов $\lambda(t-\sigma, x, x_0(\sigma)) = 0$, $\sigma \geqslant 0$, $t \geqslant \sigma$ заполняет некоторую область, которую назовем L. Часть области L, ограниченную коноидом K, обозначим через D, а часть поверхности K, полученную при пересечении K и L, обозначим C (см. Рис. 2).

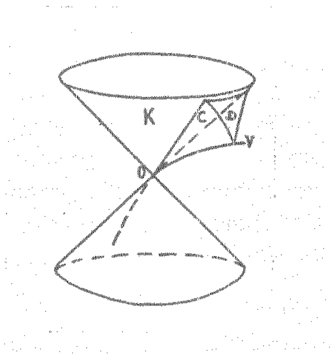

Рис. 2.

Нетрудно показать, что уравнение (8) имеет 3 действительных корня в области D и 1 – в дополнении к D. Наряду с уравнением (8) будем рассматривать более общее уравнение

$$\lambda(t-\sigma, x, x_0(\sigma)) = 0. \tag{9}$$

Обозначим корни уравнения (9) через σ_1, σ_2, σ_3.

Предложение. *Корни $\sigma_i(t,x)$, $i = 1,2,3$ обладают следующими свойствами*

1) $\sigma_i(t,x) \in C^\infty\left(R^{m+1} \setminus (VUC)\right)$

2) $\dfrac{d\lambda}{d\sigma}\Big|_{\sigma=\sigma_i} = 0 \quad x,t \in VUC;\ \ \dfrac{d\lambda}{d\sigma}\Big|_{\sigma=\sigma_i} \neq 0 \quad x,t\bar{\in}VUC;$

$\dfrac{d^2\lambda}{d\sigma^2}\Big|_{\sigma=\sigma_i} = 0$ *при* $x=0,\ t=0.$

3) $\nabla_\mu^2 \sigma_i = 0.$

Здесь ∇_μ *– это градиент в метрике Минковского*

$$(\nabla_\mu A, \nabla_\mu B) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial A}{\partial t}\frac{\partial B}{\partial t} - \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\partial A}{\partial x_i}\frac{\partial B}{\partial x_i}.$$

Доказательство. Свойства 1, 2 следуют из теоремы о неявной функции. Для доказательства третьего свойства достаточно заметить, что функция λ удовлетворяет уравнению ([4]) $\nabla_\mu^2\lambda = 4\lambda$, а производные от $\sigma_i(t,x)$ могут быть вычислены по правилу

$$\frac{\partial\sigma_i}{\partial t} = -\frac{\partial\lambda}{\partial t}\Big/\frac{\partial\lambda}{\partial\sigma},\quad \frac{\partial\sigma_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial\lambda}{\partial x_j}\Big/\frac{\partial\lambda}{\partial\sigma}.$$

Теперь вернемся к разложению (7). Введем новую переменную интегрирования $\Delta = \sigma - \alpha$, где $\alpha = \sigma_1+\sigma_2+\sigma_3$, и обозначим $\Delta_i = \sigma_i - \alpha$, $P(s) = (s-s_1)(s-s_2)(s-s_3)$. Тогда $s_1+s_2+s_3 = 0$, $P(s) = s^3+as+b$, где функции $a(t,x)$, $b(t,x) \in C^\infty(R^{m+1})$ и $P(s) < 0$ при $\lambda > 0$ (при переходе от сверхзвуковой к дозвуковой скорости движения источника знаки $P(s)$ и λ совпадают). Из подготовительной теоремы Вейерштрассе вытекает следующее разложение функции $\lambda(t,x,s)$ на множители

$$\lambda(t,x,s) = -P(s,t,x)\,d(s,t,x),\quad \text{где}\quad d(s,t,x) \in C^\infty(R^{m+2})$$

и $d(s,t,x) > 0$ по крайней мере в некоторой окрестности точки 0. Далее, из свойства однородности обобщенных функций S_p вытекает соотношение

$$S_{j-\frac{m-1}{2}}(\lambda) = d^{j-\frac{m-1}{2}}\, S_{j-\frac{m-1}{2}}(\lambda)(-P).$$

Обозначим $A(s)v_j(t,x,x_0(s))$ через $f_j(s,t,x)$. При сделанных предположениях $f_j(s,t,x) \in C^\infty(R^{m+2})$ и по подготовительной теореме Вейершрассе может быть представлена в виде

$$f_j(s,t,x) = f_{1j}(t,x,P) + sf_{2j}(t,x,P) + P_s\, f_{3j}(t,x,P),$$

где $P_s = dP/ds$, а функции $f_{ij}(t,x,P) \in C^\infty(R^{m+2})$ и могут быть разложены в абсолютно сходящиеся ряды по степеням многочлена P

$$f_{ij}(t,x,P) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{ij}(t,x)P^k, \quad i=1,2,3, \quad j=0,1,2,\dots . \tag{10}$$

В частности, для нахождения начального члена ряда (10) имеем систему

$$f_0(s_i) = f_{10} + f_{20}s_i + f_{30}(3s_i^2 + b), \quad i=1,2,3.$$

Учитывая, что по формулам Кардано

$$s_1 = \beta + \gamma, \quad s_2 = \varepsilon\beta + \varepsilon^2\gamma, \quad s_3 = \varepsilon^2\beta + \varepsilon\gamma,$$

где

$$\varepsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \varepsilon^2 = 1, \quad \beta = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}},$$

$$\gamma = -a/3\beta = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}},$$

в результате элементарных вычислений находим решение системы в виде

$$f_{20} = \frac{F_3\beta^2 - F_2\gamma^2}{\beta^3 - \gamma^3}, \quad f_{30} = \frac{F_2\beta - F_3\gamma}{\beta^3 - \gamma^3}, \quad f_{10} = F_1 - f_{30}\left(b - \frac{2}{3}a\right), \tag{11}$$

где

$$F_{i+1} = \frac{1}{3}\left(f(s_1) + \varepsilon^i f(s_2) + \varepsilon^{2i} f(s_3)\right), \quad i=0,1,2$$

и $\beta^3 - \gamma^3 \neq 0$. Если же $\beta^3 - \gamma^3 = 0$, т.е. дискриминант $b^2/4 + a^3/27$ кубического многочлена $P(s)$ обращается в 0, то тогда точка (x,t) находится либо на кривой источника V, либо на части C каноида K. Нетрудно показать, что и при $\beta^3 = \gamma^3$ можно использовать формулы (11), если в качестве значений коэффициентов f_{i0} $i=1,2,3$ выбрать пределы соответствующих выражений при трансверсальном стремлении точки (x,t) к точке на C или V.

Аналогичным образом могут быть найдены и последующие коэффициенты рядов (10).

Подставляя (10) в (7), получаем двойной абсолютно сходящийся ряд, который после замены порядков суммирования принимает вид

$$u(t,x)=e^{-it\alpha}\int\limits_{\alpha-t_0}^{\infty} e^{i\omega s}\sum_{j=0}^{\infty}(u_{1j}+u_{2j}s+u_{3j}P_s)\,S_{j-\frac{m-1}{2}}(-P(s))\,ds \quad (12)$$

и остается абсолютно сходящимся. Здесь

$$u_{ij}=\sum_{k=0}^{j} f_{ilj-k}\frac{\Gamma(j-\frac{m-1}{2}+1)}{\Gamma(k-\frac{m-1}{2}+1)}, \quad u_{i0}=f_{i0}.$$

Заметим, что интегрирование в (2) ведется по конечному промежутку в силу финитности функции S_p и асимптотика интеграла (12) по гладкости от нижнего предела не зависит: разность соответствующих интегралов с различными пределами является бесконечно дифференцируемой функцией. Следовательно, с точностью до слагаемого из $C^\infty(R^{m+1})$ нижний предел можно положить равным $-\infty$, если понимать полученный интеграл по бесконечному промежутку как осциллирующий [7]:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-its}F(s)ds \equiv \lim_{k\to+0}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-its-k|s|}F(s)ds.$$

Введем в рассмотрение новые обобщенные функции

$$Q_l(s_1,s_2,s_3)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} S_l(-P(s))\,ds,$$

$$R_l(s_1,s_2,s_3)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} s\,S_l(-P(s))\,ds,$$

$$T_l(s_1,s_2,s_3)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} P_s(s)\,S_l(-P(s))\,ds.$$

Интегралы в вышеприведенных формулах понимаются как осциллирующие. Для натуральных l эти функции являются линейной комбинацией многочленов от s_1, s_2, s_3, умноженных на $\exp(-i\omega s_i)$.

Следует отметить, что для дозвуковой скорости источника имеется 2 корня $\sigma_1 = \alpha + \tau$ и $\sigma_2 = \alpha - \tau$ и решение задачи (1), (2) раскладывается по специальным функциям

$$g_p(\omega, t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega s} \frac{(s^2 - \tau^2)^p}{\Gamma(p + \frac{1}{2})}\, ds,$$

совпадающим с (3).

Нетрудно проверить, что введенные функции Q_l, R_l, T_l удовлетворяют следующим соотношениям

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q_l}{\partial z} &= b_z\, Q_{l-1} + a_z\, R_{l-1},\\
\frac{\partial R_l}{\partial z} &= -\frac{a_z a}{3}\, Q_{l-1} + b_z\, R_{l-1} + a_z\, T_{l-1}, \qquad (13)\\
\frac{\partial T_l}{\partial z} &= -3 a_z b\, Q_{l-1} - 2a_2 a\, R_{l-1} + b_z\, T_{l-1} + a_z \left(1 + 3\left(l - \frac{m-1}{2}\right)\right) Q_l
\end{aligned}$$

при $z = t,\ x_1, x_2, \ldots, x_n$ и

$$\begin{aligned}
i\omega Q_l &= T_{l-1},\\
i\omega R_l &= -3b\, Q_{l-1} - 2a\, R_{l-1} + \left(1 + 3\left(l - \frac{m-1}{2}\right)\right) Q_l, \qquad (14)\\
i\omega T_l &= 2a^2\, Q_{l-1} - 9b\, R_{l-1} - a\, T_{l-1} + \left(9\left(l - \frac{m-1}{2}\right) + 6\right) R_l.
\end{aligned}$$

Кроме того, Q_l, R_l, $T_l \in C^j(R^{m+1})$ при $j = [l + 1/3]$, $l > -1/3$, где $[X]$ – это целая часть числа X.

Теперь поменяем порядок интегрирования и суммирования в (12). Это можно сделать, так как ряд является абсолютно сходящимся, а интеграл вычисляется по конечному промежутку. В результате получаем следующее разложение для решения задачи (1), (2)

$$\begin{aligned}
u(t, x) = e^{-i\omega\alpha(t,x)} \sum_{j=0}^{\infty} u_{1j}(t, x) Q_{j - \frac{m-1}{2}}(s_1, s_2, s_3) + \qquad (15)\\
+ u_{2j}(t, x) R_{j - \frac{m-1}{2}}(s_1, s_2, s_3) + u_{3j}(t, x) T_{j - \frac{m-1}{2}}(s_1, s_2, s_3).
\end{aligned}$$

Из приведенных выше вычислений вытекает следующая теорема.

Теорема. *Ряд* (15) *в некоторой окрестности начала координат сходится абсолютно, его сумма дает решение задачи* (1), (2) *с точностью до функции из класса* $C^\infty(R^{m+1})$, *коэффициенты* $u_{ij}(x)$ *ряда* (15) *определяются однозначно и*

$$u_{ij}(x) \in C^\infty(R^{m+1}) \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 0, 1, 2, \dots .$$

Таким образом, мы показали существование и единственность разложения (15) для решения задачи (1), (2). Заметим, что в силу соотношений (14) ряд (15) является асимптотическим по большому параметру ω.

В заключение опишем способ нахождения коэффициентов ряда (15), описанный не на преобразовании анзаца Адамара (5), а на прямых вычислениях. Подставим ряд (15) в уравнение (1), воспользуемся свойствами (13), (14) функций Q_l, R_l, T_l и "эйконалов" s_1, s_2, s_3, и приравняем коэффициенты при линейно-независимых функциях Q_l, R_l, T_l. В результате получим систему рекуррентных уравнений для определения $u_{ij}(x,t)$.

Литература

1. Н. С. Григорьева, *Коротковолновая асимптотика решения задачи о движущемся точечном источнике в неоднородной стационарной среде.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **165** (1987), 42–51.
2. В. М. Бабич, *Об асимптотическом решении задач о движущихся источниках и колебаний в неоднородной стационарной среде.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **179** (1989), 6–13.
3. В. М. Бабич, *Анзац Адамара, его аналоги, обобщения и приложения.* — Алгебра и Анализ **3**, **вып. 5** (1991), 3–32.
4. G. A. Schott, *Electromagnetic Radiation.* Cambridge Ubiversity Press (1912).
5. Ж. Адамар, *Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа.* Наука, М. (1978).
6. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, *Обобщенные функции. Т. 1.* Физматгиз, М. (1958).
7. Л. Хермандер, *Анализ линейных дифференциальныв операторов с частными производными.* Мир, М. (1988).

Starkov A. S. An asymptotic solution of the problem of the moving with acceleration source of high frequency oscillations in nonhomogeneous media.

The problem of the moving source wave field is considered in nonhomogeneous media. It is supposed that velocity of the source is less than the sound velocity for $t < 0$ and greater this one for $t > 0$ (subsonic

– supersonic transition). An asymptotic expansion for the wave field in an neighborhood of the source is constructed on the basis of well known Hadamard's Anzatz. The derived expansion is uniform with respect to the velocity of the source and contains new special functions. These functions are generalization of Hankel and Bessel functions and possess some remarkable properties.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 5 ноября 1998 г.