Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 257, 1999 г.

В. Н. Троян, Г. А. Рыжиков

ПРОБЛЕМЫ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ В ТРЕХМЕРНОЙ ЛУЧЕВОЙ ТОМОГРАФИИ

Традиционная томографическая интерпретация данных дистанционного зондирования опирается на лучевое представление распространения сигнала, при этом траектория луча в опорной среде предполагается известной [1]. Использование аналитического обращения Радона в случае заведомой неполноты данных ведет к грубым ошибкам [2]. Методы алгебраической реконструкции используют либо априорное разбиение среды на блоки [3], либо конечный базис пространственных функций [4].

Даже при обработке данных "полноракурсной" томографии необходимо применять методы регуляризации вследствие неизбежных ошибок наблюдений, а в реальном томографическом эксперименте к этим ошибкам добавляются ошибки, связанные с малой ракурсностью наблюдений. С математической точки зрения решение обратной задачи связано с обращением вполне непрерывного оператора и действием на функцию, заведомо не принадлежащую образу оператора, т.е. обратная задача является существенно некорректной.

В настоящей работе рассмотрим возможности метода регуляризации при решении задач трехмерной лучевой томографии и дадим физическую интерпретацию предложенных алгоритмов. При этом примем во внимание, что регуляризацию целесообразно осуществлять для уравнений, записанных в функциональных пространствах. Только в этом случае можно гарантировать, что алгебраизованные аналоги этих уравнений будут регуляризованы независимо от размерности соответствующих евклидовых пространств.

В качестве модели экспериментальных данных лучевой томографии u (в сейсмическом случае времен пробега сейсмических волн или их амплитуд) будем использовать операторное уравне-

Работа выполнена при поддержке гранта Российского фонда фундаментальных исследований 96-05-65904 и гранта Минобразования.

ние первого рода

$$P\nu + \varepsilon = u, \tag{1}$$

где u – поле, связанное с физическими параметрами среды, такими как скорость распространения упругой волны или коэффициент ослабления, включающий в себя поглощение и рассеяние; P – интегральный оператор с сингулярным ядром: $\delta(L_i(x))\,\mu_0(x)$; $L_i(x)$ – уравнение луча с номером i; $\mu_0(x)$ – поле параметров опорной среды; ε – невязка модельных и экспериментальных значений, которая предполагается случайной, распределенной по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и положительно определенной матрицей ковариации $K_\varepsilon = E\varepsilon\varepsilon^T$ и включает ошибку наблюдений и ошибку линеаризации.

Модель экспериментальных данных в форме (1) вводится в предположении, что $\nu(x)$ представляет собой малые плавные отклонения относительно μ_0-поля параметров опорной среды, т.е. $\nu = (\mu - \mu_0)/\mu_0$ нигде не обращаются в нуль, где μ – поле абсолютных значений физических параметров, которое предполагается плавным по отношению к характерным масштабам задачи, в данном случае – по отношению к характерной длине волны зондирующего сигнала. Следует заметить, что, во-первых, плавность является необходимым условием для лучевой интерпретации распространения упругой волны; во-вторых, малось $\mu(x)$ обусловливает допустимость линеаризации:

$$\begin{gathered}\mathcal{P}(\mu) = \mathcal{P}(\mu_0) + \mathcal{P}'\big|_{\mu_0}(\mu - \mu_0) = \mathcal{P}(\mu_0) + P\nu \\ P = \mathcal{P}'\big|_{\mu_0}\mu_0.\end{gathered} \tag{1}$$

В общем случае линеаризацию можно рассматривать как первый шаг итеративного решения нелинейной задачи, но при обработке данных лучевой сейсмической томографии последующие итерации, как правило информационно не обеспечены.

Физические требования к применимости модели (1) как раз и определяют способы регуляризации решения обратной задачи: найти

$$\widehat{\nu} = \arg\inf \|P\nu - u\|^2_{K_\varepsilon^{-1}}$$

при условии гладкости и ограниченности ν. Формализация этих условий сводится к регуляризации по Тихонову [5], которая с использованием параметра регуляризации α приводит к решению экстремальной задачи:

$$\widehat{\nu} = \arg\inf \|P\nu - u\|^2_{K_\varepsilon^{-1}} + \alpha\big(\nu, (I-\Delta)\nu\big), \tag{2}$$

$$\text{где} \quad \|f\|^2_{K_\varepsilon^{-1}} = \sum_i \sum_j [K_\varepsilon^{-1}]_{ij} f_i f_j$$

I – единичный оператор; Δ – оператор Лапласа; $(.,.)$ – символ скалярного произведения в гильбертовом пространстве $(\nu, (I - \Delta)\nu) \Longrightarrow (\nu, \nu) + (\nabla\nu, \nabla\nu)$ при условии исчезновения ν или $\nabla\nu$ на границах области интегрирования.

Решение задачи (2) можно записать в виде

$$\widehat{\nu} = D^{-1}(P^*(PD^{-1}P^* + K_\varepsilon)^{-1}u,$$

где P^* – оператор, сопряженный по Лагранжу оператору P, $D^{-1} = \alpha^{-1}(I - \Delta)^{-1}$ интегральный оператор с ядром, равным функции Грина для оператора $\Delta \triangleq \alpha(I - \Delta)$

$$D^{-1}(\mu(x)) = \int dx' \frac{1}{\alpha} \frac{\exp(-|x - x'|)}{|x - x'|} \mu(x') \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{\alpha} \frac{\exp(-|x|)}{|x|} * \mu(x), \tag{3}$$

где $\alpha^{-1}\exp(-|x|)/|x|$ – потенциал Юкавы, известный в квантовой механике и теории поля.

Упрощенная регуляризация по Тихонову соответствует решению экстремальной задачи в классе только гладких функций ν, т.е.

$$\widehat{\nu} = \arg\inf \left[\|P\nu - u\|^2_{K_\varepsilon^{-1}} + \alpha\|\nabla\nu\|^2 \right].$$

И дает оператор D_1^{-1}, такой, что

$$D_1^{-1}(\mu(x)) = \int dx' \frac{1}{\alpha|x - x'|} \mu(x') = \frac{1}{\alpha} \frac{1}{|x|} * \mu(x), \tag{4}$$

где $\alpha^{-1}|x|^{-1}$ – кулоновский потенциал.

Рассмотрим композицию операторов $PD^{-1}P^*$ и $D^{-1}P^*$. Учитывая действие оператора P, соответствующего интегрированию пространственной функции $\nu(x)$ по траекториям лучей, и действие операторов D^{-1} и D_1^{-1}, видим, что матричный элемент

$(PD^{-1}\,P^*)_{ij}$ получится в результате свертки δ-функций, локализованных на траекториях лучей i и j, с соответствующими потенциалами

$$(PD_1^{-1}\,P^*) = \frac{1}{\alpha}\iint \mu_0(x')\delta(L_i(x'))\delta(L_j(x''))\frac{\mu_0(x'')}{|x'-x''|}dx'dx'' = \\ = \mu_0\delta(L_i(x)) * \frac{1}{\alpha}\frac{1}{|x|} * \mu_0\delta(L_i(x)), \qquad (5)$$

$$(PD^{-1}P^*)_{ij} = \frac{1}{\alpha}\iint \delta(L_i(x'))\delta(L_i(x''))\frac{\exp(|x'-x''|)}{|x'-x''|}dx'dx'' = \\ = \delta(L_i(x)) * \frac{\exp(-|x|)}{\alpha|x|} * \delta(L_i(x)). \qquad (6)$$

Физический смысл матричного элемента $(PD_1^{-1}P^*)_{ij}$ формулы (5) – энергия кулоновского взаимодействия двух заряженных с плотностями $(4\pi/\alpha)^{1/2}\mu_0$ нитей, локализованных вдоль i-го и j-го лучей; матричный элемент (6) – энергия нитей i и j, взаимодействующих через потенциал Юкавы.

Результат действия оператора $D^{-1}P^*$ – набор m полей (по числу лучей), создаваемых в каждой точке пространства каждым из m лучей с кулоновским или юкавовским полем.

При статистической интерпретации алгоритма (2) оценка поля соответствует оптимальной статистической экстраполяции или регрессии

$$\widehat{\nu} = K_{\nu u}\,K_{uu}^{-1}u,$$

где $K_{\nu u} = D^{-1}P^*$, $K_{uu} = PD^{-1}P^* + K_\varepsilon$, т.е. соответствует априорным представлениям о поле ν как о случайном однородном и изотропном поле с корреляционными функциями, совпадающими в (3) с потенциалом Юкавы и в (4) – с кулоновским потенциалом.

Если воспользоваться концепцией локальной регуляризации [6], нетрудно записать регуляризационный алгоритм, адекватно включающий более полную априорную информацию. Такой априорной информацией может быть представление о поле ν как о случайном однородном анизотропном. Это может быть связано с геофизическими представлениями о пространственном распределении неоднородной среды: так, например, в случае слоистой модели опорной среды встречается ситуация, когда ориентация неоднородностей совпадает с пространственной ориентацией слоев, причем можно указать характерные размеры неоднородностей, т.е. величины осей априорного эллипсоида рассеяния случайного поля ν. Если существует априорная информация о преимущественной локализации неоднородностей, то метод локальной регуляризации позволяет интерпретировать поле ν как случайное изотропное неоднородное и адекватным образом включать эту информацию в вычислительную процедуру. При этом должно соблюдаться соответствие между априорными представлениями о характерных размерах неоднородностей, масштабах корреляции и принятой лучевой моделью распространения зондирующего сигнала: наименьший радиус должен быть не меньше характерной длины волны. Тем самым физические требования к лучевой интерпретации сейсмической томографии с необходимостью приводят к тому, что при решении этих задач должна применяться регуляризация по Тихонову не ниже первого порядка.

Применение локальной регуляризации основано на том, что в регуляризующем функционале $(\nu, (I-\Delta)\nu)$ вместо эллиптического оператора Δ используется оператор $K_{ij}\partial_i\partial_j$ с положительно определенной матрицей коэффициентов K, что в представлении корреляционных функций соответствует замене $|x| \to (x, K^{-1}x)$.

Следует отметить, что введение локальной регуляризации оставляет в силе все доказательства теорем тихоновской регуляризации вследствие эквивалентности норм соответствующих пространств Соболева.

При практической реализации алгоритмов матрица K^{-1} задается шестью параметрами: величинами трех осей корреляции и тремя углами Эйлера, определяющими ориентацию эллипсоида относительно системы координат, связанной со схемой наблюдений – матричные элементы рассчитываются путем преобразования подобия, индуцированного матрицей поворота от собственной системы координат эллипсоида к системе координат схемы наблюдения.

Литература

1. А. Л. Бухгейм, *Введение в теорию обратных задач.* Новосибирск (1988).
2. А. С. Алексеев, М. Н. Лаврентьев, Н. Г. Преображенский, *Вопросы реконструктивной томографии.* Новосибирск (1985).
3. Г. А. Рыжиков, В. Н. Троян, *Томография и обратные задачи дистанционного зондирования.* С.-Петербург (1994).

4. Г. И. Марчук, *Методы вычислительной математики.* М. (1989).
5. А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин, *Методы решения некорректных задач.* М. (1987).
6. Г. А. Рыжиков, В. Н. Троян, *Определение волнового поля и скорости в среде с использованием метода теории возмущений.* — Вестник ЛГУ **25** (1986), 23–31.

Troyan V. N., Ryzhikov G. A. Reqularization problems in three-dimensional ray tomography.

The connections between the Tikhonov's regularization, the statistical regularization and the potential theory are considered. It is demonstrated that the use of the Tikhonov's regularization leads to such a form of correlation operators that may be interpreted as potentials by Coulomb or Yukawa. It is given the physical interpretation of the ray interaction as "charged" strings with corresponding potentials.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 26 августа 1998 г.