Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 257, 1999 г.

В. Б. Филиппов, Н. Я. Кирпичникова

ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА МАЛЫХ НЕОДНОРОДНОСТЯХ

В настоящей статье исследуются *две задачи дифракции электромагнитной плоской волны:*

1) *рассеянной от малой неоднородности* Ω_3 *в слое* Ω_2*;*

2) *рассеянной от скачка импеданса на малом отрезке границы раздела двух сред.*

Задача рассеяния малой неоднородностью в слое рассматривается в трех первых параграфах работы, а дифракция электромагнитного поля от скачка импеданса – в четвертом и пятом.

При исследовании задач будем исходить из уравнений Максвелла для однородной изотропной среды. Рассмотрен случай гармонической зависимости от времени векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$. Пусть на идеально проводящую поверхность Γ_{12}, покрытую диэлектрическим слоем толщины h, падает из среды Ω_1 плоская волна $\mathbf{E}^{inc}$. Предположим, что в слое имеется включение Ω_3 с другими параметрами ε, μ, чем у слоя Ω_2 (см. Рис. 1). *Требуется найти волну, рассеянную неоднородностью* Ω_3.

Будем рассматривать случай, когда область Ω_3 является кругом радиуса a, ограниченным окружностью Γ_{23}, причем будем предполагать, что радиус значительно меньше длины волны падающего поля, т.е. $ka = \dfrac{\omega\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}}{c}a \ll 1$.

Выберем прямоугольную систему координат так, чтобы плоскость xz совпадала с границей раздела сред, а плоскость xy с плоскостью падения волны. Иначе, в качестве верхней поверхности слоя Γ_{12} выберем плоскость $y = 0$. Центр круга Ω_3 лежит на оси y-ов при $x = 0$. Нижняя граница слоя Γ_{20} находится на глубине h от верхней Γ_{12}.

Известно, что плоская электромагнитная волна может быть представлена в виде суперпозиции двух волн, у одной из кото-

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 96-01-00666, 99-01-00107.

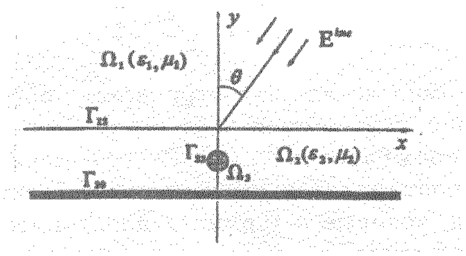

Рис. 1.

рых вектор $\mathbf{E}^{inc}$ перпендикулярен плоскости падения, а у другой лежит в этой плоскости. Рассмотрения в обоих случаях близки, поэтому ограничимся случаем перпендикулярного падения, т.е. будем предполагать, что падающее электрическое поле ориентировано так:

$$\mathbf{E}^{inc} = \mathbf{e}_z u^{inc}. \tag{0.1}$$

Математически задача определения полного поля $\mathbf{E}$ в областях Ω_j, $j = 1, 2, 3$, (см. Рис. 1) выражается следующим образом: в областях Ω_j, $j = 1, 2, 3$, найти решения уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}_j = -i\frac{\omega}{c}\varepsilon_j \mathbf{E}_j, \quad j = 1, 2, 3,$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}_j = \frac{\omega}{c}\mu_j \mathbf{H}_j, \tag{0.2}$$

которые удовлетворяют условиям непрерывности тангенциальных составляющих векторов $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ и условию излучения.

Из предположения, что падающее электрическое поле $\mathbf{E}^{inc}$ поляризовано перпендикулярно к плоскости падения будет следовать, что таким свойством обладает и полное поле $\mathbf{E}_j$, т.е. все сводится к нахождению скалярных функций u_j,

$$\mathbf{E}_j = \mathbf{e}_z u_j,$$

удовлетворяющих следующим условиям:

1. u_j являются решениями уравнений Гельмгольца в своих областях

$$\Delta u_j + k^2 u_j = 0, \tag{0.3}$$

где

$$k = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_j \mu_j},$$

здесь через

$$\varepsilon_j = \varepsilon'_j + \frac{4i\pi\sigma_j}{\omega}$$

обозначена комплексная диэлектрическая проницаемость среды, μ_j – магнитная проницаемость.

2. На границах раздела Γ_{ij} (см. Рис. 1) удовлетворяют условиям непрерывности касательных компонент электрического и магнитного поля, которые в терминах электрического поля можно выразить следующим образом:

$$\begin{cases} u_i = u_j, & \text{при} \quad i \neq j, \\ \dfrac{1}{\mu_i}\dfrac{\partial u_i}{\partial n} = \dfrac{1}{\mu_j}\dfrac{\partial u_j}{\partial n}, & \text{при} \quad i \neq j. \end{cases} \tag{0.4}$$

3. на границе металлической основы Γ_{20} удовлетворяют условию Дирихле

$$u_3 = 0. \tag{0.5}$$

§1. Решение невозмущенной задачи

Предположим, что неоднородность Ω_3 отсутствует. Решение задачи (0.3)–(0.5) в этом случае известно. Для задачи с условием Дирихле оно равно:

$$\begin{aligned} u_2 &= u^{inc} + \mathcal{R}u^{ref}, \\ u_3 &= \mathcal{T}\left(u^{+tr} - u^{-\,tr}\right), \end{aligned} \tag{1.1}$$

где

$$\begin{aligned} u^{inc} &= \exp\left\{ik_1\left(x\alpha_1 + \sqrt{1-\alpha_1^2}y\right)\right\}, \\ u^{ref} &= \exp\left\{ik_1\left(x\alpha_1 - \sqrt{1-\alpha_1^2}y\right)\right\}, \\ u^{+\,tr} &= \exp\left\{ik_2\left(x\alpha_2 + \sqrt{1-\alpha_2^2}y\right)\right\}, \\ u^{-\,tr} &= \exp\left\{ik_2\left(x\alpha_2 - \sqrt{1-\alpha_2^2}(y+2h)\right)\right\}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Здесь

$$\alpha_1 = -\cos\varphi_1, \quad \alpha_2 = -\cos\varphi_2,$$

φ_1 – угол падения плоской волны в области Ω_1, φ_2 – угол падения в слое Ω_2, который находится из закона Снеллиуса:

$$n_1 \cos\varphi_1 = n_2 \cos\varphi_2. \tag{1.3}$$

Коэффициенты отражения и преломления находятся из условий непрерывности касательных составляющих поля на границах раздела и равны

$$\mathcal{R} = \frac{(1-E_2^2)r_2 - \varkappa_{12}(1+E_2^2)r_1}{(1-E_2^2)r_2 + \varkappa_{12}(1+E_2^2)r_1}, \tag{1.4}$$

$$\mathcal{T} = \frac{2(1-E_2^2)r_2}{(1-E_2^2)r_2 + \varkappa_{12}(1+E_2^2)r_1}, \tag{1.5}$$

где

$$E_2 = \exp\left\{ik_2 h\sqrt{1-\alpha_2^2}\right\}, \quad r_{1,2} = \sqrt{1-\alpha_{1,2}^2},$$

$$\varkappa_{12} = \frac{W_1}{W_2}, \quad W_j = \sqrt{\frac{\mu_j}{\varepsilon_j}}, \quad j = 1, 2.$$

§2. Решение в слое (первичная дифракция)

Предположим теперь, что неоднородность Ω_3 присутствует. Тогда волны в слое, проходя через неоднородность, будут порождать поле, рассеянное на ней. Это первичное дифракционное поле затем будет переотражаться от границ слоя и снова дифрагировать на неоднородности. Оказывается, что в случае, когда размер неоднородности мал по сравнению с длиной волны (а именно такой случай мы и рассматриваем), дифракционное поле будет значительно меньше падающего и в первом приближении можно ограничится вычислением только первичного дифракционного поля.

Для вычисления первичного дифракционного поля воспользуемся методом разложения по цилиндрическим функциям.

Известно разложение плоской волны по цилиндрическим функциям

$$e^{ikr\cos\varphi} = J_0(kr) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_n(kr)\cos n\varphi. \tag{2.1}$$

Воспользуемся разложением для невозмущенной задачи (без неоднородности Ω_3). Согласно (1.1)–(1.5) поле представляет собой сумму двух плоских волн $u^{+\,tr}$ и $u^{-\,tr}$. Для каждой из них воспользуемся разложением (2.1). Тогда получим для решения невозмущенной задачи в слое Ω_2

$$\widetilde{u}_2 = J_0(k_2 r)(1+\mathcal{R}) + \sum_{n=1}^{\infty} i^{-n} J_n(k_2 r)[\cos n(\varphi-\varphi_0) + \mathcal{R}\cos n(\varphi+\varphi_0)].$$

Первичное дифракционное поле будем искать в виде

$$\left.\begin{aligned} \widehat{u}_2 &= \sum_{n\geqslant 0} a_n H_n^{(1)}(k_2 r)[\cos n(\varphi-\varphi_0) + \mathcal{R}\cos n(\varphi+\varphi_0)], \\ u_3 &= \sum_{n\geqslant 0} b_n J_n(k_3 r)[\cos n(\varphi-\varphi_0) + \mathcal{R}\cos n(\varphi+\varphi_0)]. \end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

Если обозначить через $\widetilde{u}_2$ – решение невозмущенной задачи, то из условия на границе Γ_{23} неоднородности Ω_3 при $r=a$ получим систему уравнений для нахождения коэффициентов a_n и b_n:

$$\left.\begin{aligned} d_n J_n(k_2 a) + a_n H_n^{(1)}(k_2 a) &= b_n J_n(k_3 a), \\ \mu_2^{-1}[d_n J_n'(k_2 a) + a_n H_n^{(1)'}(k_2 a)] &= \mu_3^{-1} b_n J_n'(k_3 a), \end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

где

$$d_n = \begin{cases} 1, & \text{при} \quad n=0, \\ 2i^{-n}, & \text{при} \quad n>0. \end{cases}$$

Из системы (2.2) находим:

$$a_n = -d_n \frac{\varkappa_{23} J_n'(k_3 a) J_n(k_2 a) - J_n(k_3 a) J_n'(k_2 a)}{\varkappa_{23} J_n'(k_3 a) H_n^{(1)}(k_2 a) - J_n(k_3 a) H_n^{(1)'}(k_2 a)}, \tag{2.4}$$

где

$$\varkappa_{23} = \frac{W_2}{W_3}, \quad W_j = \sqrt{\frac{\mu_j}{\varepsilon_j}}.$$

Учитывая, что $k_j\, a \ll 1$ воспользуемся разложениями цилиндрических функций в степенные ряды [2]. Используя их можно показать, что при малых z имеют место оценки:

$$J_n(z) =\sim \left(\frac{z}{2}\right)^n \frac{1}{n!}, \quad n \geqslant 0, \tag{2.5}$$

$$J_n'(z) \sim \begin{cases} \dfrac{-z}{2}, & \text{при} \quad n=0, \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{z}{2}\right)^{n-1} \dfrac{1}{(n-1)!}, & \text{при} \quad n>0, \end{cases} \tag{2.6}$$

$$H_n^{(1)}(z) \sim \begin{cases} \dfrac{2i}{\pi} \ln\left(\dfrac{\gamma z}{2}\right), & \text{при} \quad n = 0, \\ \dfrac{-i}{\pi}\left(\dfrac{z}{2}\right)^{-n}(n-1)!, & \text{при} \quad n > 0, \end{cases} \tag{2.7}$$

$$H_n^{(1)'}(z) =\sim \frac{2i}{\pi}\left(\frac{z}{2}\right)^{-n-1} n!, \quad n \geqslant 0. \tag{2.8}$$

Подставляя разложения (2.5)–(2.8) в формулу (2.4), получим следующее выражение для коэффициентов a_n в разложениях для первичного дифракционного поля:

$$a_0 = -d_0 i\mu_2(\varepsilon_3 - \varepsilon_2)(ka)^2 + \ldots, \tag{2.9_1}$$

$$a_1 = d_1 i\varepsilon_2\mu_2 \frac{\mu_3 - \mu_2}{\mu_3 + \mu_2}(ka)^2 + \ldots. \tag{2.9_2}$$

Для дальнейших коэффициентов имеем оценку:

$$a_n = O((ka)^{2n}), \quad n > 1 \tag{2.10}$$

которая показывает, что *в длинноволновом приближении, когда размеры включения Ω_3 малы по сравнению с длиной падающей волны ($ka \ll 1$, $k = \dfrac{\omega\sqrt{\varepsilon\mu}}{c}$), главными членами в разложении* (2.2) *будут первый и второй*, а все дальнейшие будут величинами более высокого порядка малости.

Таким образом мы видим, что *неоднородность будет излучать как точечный источник.*

§3. Диаграмма направленности поля, рассеянного малой неоднородностью в слое

В предыдущем параграфе мы показали, что *в длинноволновом приближении неоднородность является точечным источником, для которого мощность пропорциональна скачку параметров ε и μ и площади неоднородности.*

Определим теперь характеристики поля, рассеянного неоднородностью во всем пространстве.

Найдем сначала поле возбуждаемое точечным источником типа монополя, помещенного в слое. Предположим, что он помещен в точку с координатами $(0, -h_1)$. Будем искать решение в виде преобразования Фурье по координате x

$$u_j(x, y, k) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ik_j x\alpha_j} \widehat{U}_j(y, \alpha_j, k) d\alpha_j, \qquad (3.1)$$

где $j = 1, 2$, для $(x, y) \in \Omega_{1,2}$.

Функция $\widehat{U}_2$ удовлетворяет уравнению:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_2^2(1 - \alpha_2^2) \right) \widehat{U}_2 \ = \ k_2 \delta(y - y_0), \qquad (3.2)$$

граничному условию $\widehat{U}_2 = 0$ при $y = -h$ и контактному условию при $y = 0$.

Положим

$$\widehat{U}_2 = \frac{e^{ik_2\sqrt{1-\alpha_2^2}|y+h|}}{2ik_2\sqrt{1-\alpha_2^2}} + \widetilde{U}_2, \qquad (3.3)$$

тогда для функции $\widetilde{U}_2$ получим, что она удовлетворяет однородному уравнению (3.2) и неоднородному условию

$$\widetilde{U}_2 = -\widehat{U}_2, \quad \text{при} \quad y = -h.$$

Будем искать ее в виде разложения

$$\widetilde{U}_2 = a_2^+ \, \Psi^+ + a_2^- \, \Psi^-,$$

где

$$\Psi^{\pm} = e^{\pm ik_2\sqrt{1-\alpha_2^2}y}.$$

Из граничного условия Дирихле при $y = -h$ получаем

$$a_2^+ E_2^{-1} + a_2^- E_2 = -\frac{E_2 \, E_{21}^{-1}}{2ik_2\sqrt{1-\alpha_2^2}}, \qquad (3.4)$$

где

$$E_2 = \exp\left\{ ik_2\sqrt{1-\alpha_2^2}h \right\}, \quad E_{21} = \exp\left\{ ik_2\sqrt{1-\alpha_2^2}h_1 \right\}.$$

Возьмем

$$a_2^+ = -\frac{E_2^2 \, E_{21}^{-1}}{2ik_2\sqrt{1-\alpha_2^2}} + a_{21}^+,$$

тогда имеем вместо (3.4) условие

$$a_{21}^{+}E_2^{-1} + a_2^{-}E_2 = 0.$$

Заметим, что выделенному слагаемому соответствует волна от источника, отраженного границей Γ_{20} $y = -h$.

Поле в верхней среде Ω_1 соответствует уходящей волне и для того, чтобы решение удовлетворяло условию излучения, надо взять его в виде

$$\widehat{U}_1 = b_1^{+}e^{ik_1\sqrt{1-\alpha_1^2}y}.$$

Из условия на границе раздела Γ_{12}

$$\begin{cases} u_1 = u_2, & \text{при} \quad y = 0, \\ \dfrac{1}{\mu_i}\dfrac{\partial u_i}{\partial n} = \dfrac{1}{\mu_j}\dfrac{\partial u_j}{\partial n}, & \text{при} \quad y = 0 \end{cases}$$

можно найти коэффициенты b_1, a_{21}^{+} и a_2^{-}. Для этого надо решить систему из трех уравнений. Если предположить, что характеристики сред близки, т.е. отражение от границы раздела незначительно, то формулы упрощаются. Из формул (3.1)–(3.4) получим

$$\widehat{U}_1 = \frac{k_1(E_{12} - E_2^2E_{12}^{-1})e^{ik_1\sqrt{1-\alpha_1^2}y}}{ik_2\left(\sqrt{1-(\dfrac{k_1}{k_2})^2\alpha_1^2} + \dfrac{W_2}{W_1}\sqrt{1-\alpha_1^1}\right)}.$$

Напомним, что

$$k_j = \sqrt{\varepsilon_j\mu_j}, \quad W_j = \sqrt{\frac{\mu_j}{\varepsilon_j}}.$$

Обычно в слое Ω_2 скорость волн меньше, чем в верхнем полупространстве Ω_1, т.е. $k_2 > k_1$, разрезы располагаются как на Рис. 2.

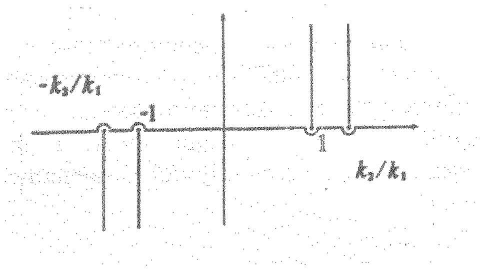

Рис. 2.

Аналогичным образом можно получить поле возбуждаемое диполем. Учитывая формулы (2.2), (2.3), (2.9) и (2.10) для поля, рассеянного неоднородностью Ω_3 в область Ω, и применяя метод перевала для интеграла u_1, получим *при* $kr \gg 1$ *в наиболее простом случае поглощающей подложки следующую формулу для электрического поля, рассеянного неоднородностью*:

$$u_1 \sim \frac{e^{i(kr-\pi/4)}}{i\sqrt{kr}} \mu_2(\varepsilon_3 - \varepsilon_2)(ka)^2 f(\varphi, \varphi_0), \tag{3.5}$$

$$f(\varphi, \varphi_0) = T_{12}(\varphi_0) T_{21}(\varphi_0) e^{ik_2 h(\sin\varphi_{21} - \sin\varphi_{20})},$$

где T_{12} и T_{21} – коэффициенты прохождения из первой среды во вторую и из второй в первую, φ_{20} φ_{21} – углы распространения волн в слое (находятся из закона Снеллиуса),

$$\left.\begin{aligned} \varphi_{20} &= \text{arc cos}\left(\frac{k_1}{k_2}\cos\varphi_0\right), \\ \varphi_{21} &= \text{arc cos}\left(\frac{k_1}{k_2}\cos\varphi\right). \end{aligned}\right\}$$

Напомним, что здесь φ_0 – угол падения, а φ – угол наблюдения.

Аналогичные, но более громоздкие формулы могут быть получены и в общем случае. Они будут отличаться видом функции $f(\varphi, \varphi_0)$.

§4. Дифракция от скачка импеданса. (Постановка задачи)

Рассматривается задача дифракции электромагнитной плоской волны от скачка постоянного импеданса на границе раздела двух сред. Импедансное условие имеет всюду в плоскоски раздела двух сред, кроме узкой полосы, определенное постоянное значение. На узкой полосе импеданс принимает другое постоянное значение, не сильно отличающееся от первого. Два условия непрерывности тангенциальных составляющих векторов **E** и **H** на границе раздела сред $y = 0$ можно заменить одним, если импеданс нижней среды $\mathcal{Z}_1$ приближенно считать не зависящим от угла преломления θ_1. Тогда для случая **E**, лежащего в плоскости падения, имеем

$$y = 0, \quad \frac{\partial H_z}{\partial y} + ikg_{0\|} H_z = 0, \quad g_{0\|} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\mathcal{Z}_1, \quad \mathcal{Z}_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}, \tag{4.1$_\|$}$$

а для случая **E**, перпендикулярного плоскости падения, получим

$$y = 0, \quad \frac{\partial E_z}{\partial y} + ikg_{0\perp} E_z = 0, \quad g_{0\perp} = \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon}\mathcal{Z}_1}. \qquad (4.1_\perp)$$

Здесь ε, μ, (ε_1, μ_1) – диэлектрическая и магнитная проницаемости верхней (нижней) среды, $k = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon\mu}$.

Приближенное граничное условие (4.1), впервые предложенное М. А. Леонтовичем, позволило поставить и решить ряд важных задач по распространению радиоволн над земной поверхностью [1].

Итак, пусть на границу раздела сред (плоскость xz, $y = 0$) в плоскости xy падает электромагнитная волна, которая может быть представлена в виде суперпозиции двух волн, у одной из которых вектор **E** перпендикулярен плоскости падения, а у другой лежит в этой плоскости (см. Рис. 3).

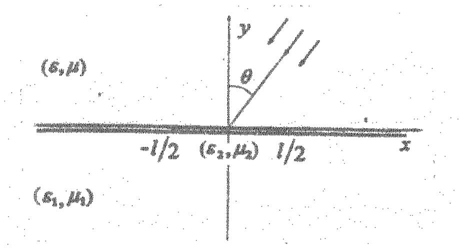

Рис. 3.

Составляющие электромагнитного поля E_z и H_z в верхней среде для двух поляризаций обозначим через u, причем функция u удовлетворяет уравнению Гельмгольца, стандартным условиям излучения при $r = \sqrt{x^2 + z^2} \to \infty$ и "импедансным условиям" на границе раздела двух сред:

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad k = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon\mu}. \qquad (4.2)$$

Условие излучения Зоммерфельда для поля u формулируется так

$$\lim_{r\to\infty} r\Big(\frac{\partial u}{\partial r} - iku\Big) = 0, \quad \mathrm{Im}\, k > 0, \qquad (4.3)$$

и, наконец, импедансное условие на границе раздела сред (см. (4.1)) запишется в виде

$$\frac{\partial u}{\partial y} + i\,kg_0\,u = 0, \quad y = 0. \qquad (4.4)$$

Здесь в импедансном условии функция g_0 определена выражениями (4.1).

Решение задачи (4.2)–(4.4) представим в виде падающей и отраженной волн с различными коэффициентами отражения для двух поляризаций (их будем отличать значками $\perp$ и $\|$ в коэффициентах отражения). В случае импедансного граничного условия (4.4) с постоянным импедансом g_0 такие решения имеют вид:

$$u_\perp^0 = E_0 \exp\{ik(x\sin\theta - y\cos\theta)\} + V_\perp E_0 \exp\{ik(x\sin\theta + y\cos\theta)\}, \quad (4.5)$$

где

$$V_\perp = \frac{\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} - \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{1}{\cos\theta}}{\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} + \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{1}{\cos\theta}} = \frac{\cos\theta - g_{0\perp}}{\cos\theta + g_{0\perp}}. \quad (4.6)$$

Другая поляризация определяется формулами:

$$u_\|^0 = H_0 \exp\{ik(x\sin\theta - y\cos\theta)\} + V_\| H_0 \exp\{ik(x\sin\theta + y\cos\theta)\}, \quad (4.7)$$

где

$$V_\| = -\frac{\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} - \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\cos\theta}{\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} + \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\cos\theta} = -\frac{g_{0\|} - \cos\theta}{g_{0\|} + \cos\theta}. \quad (4.8)$$

§5. Отражение от скачка импеданса

Рассмотрим задачу отражения падающей плоской электромагнитной волны от границы раздела двух сред, на которой заданы импедансные условия со скачком на полосе $|x| \leqslant l/2 \ll \lambda$, $|kl| \ll 1$ ($\lambda = \frac{2\pi}{k}$ – длина электромагнитной волны).

Пусть поле u при $y > 0$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad (5.1)$$

граничному условию ($y = 0$)

$$\frac{\partial u}{\partial y} + i\,kg\,u = 0, \quad y = 0, \quad (5.2)$$

и условию излучения Зоммерфельда (4.3).

Постоянный импеданс g определен следующим условием:

$$g = \begin{cases} g_0, & \text{при} \quad |x| > l/2, \\ g_0 + g_1, & \text{при} \quad |x| \leqslant l/2. \end{cases} \quad (5.3)$$

Решение этой задачи u представим в виде суммы неизвестного слагаемого U и известного решения задачи (4.2)–(4.4) с постоянным импедансом g_0:

$$u = U + u^0. \tag{5.4}$$

Здесь u^0 означает либо $u^0_{\perp}$, либо $u^0_{\|}$, (см. формулы (4.5)–(4.8)), в зависимости от направленности падающего поля.

Для функции U получим следующую задачу (условия излучения одни и те же):

$$\Delta U + k^2 U = 0, \quad y > 0, \tag{5.5}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} + i\,kg\,U = -iku^0 \begin{cases} 0, & \text{при} \quad |x| > l/2 \quad\; y = 0, \\ g_1, & \text{при} \quad |x| \leqslant l/2, \quad y = 0. \end{cases} \tag{5.6}$$

Решение задачи (5.5)–(5.6) найдем, используя функцию Грина для постоянного импеданса.

Функция Грина $G(M, M_0)$ удовлетворяет задаче

$$(\Delta + k^2) G(M, M_0) = -\delta(M - M_0), \quad y > 0, \tag{5.7}$$

$$\frac{\partial G}{\partial y} + i\,kg_0\,G = 0, \quad y = 0, \tag{5.8}$$

и условию излучения (4.3).

С помощью функции Грина решение исходной задачи (5.1)–(5.2) может быть представлено в виде

$$U(x, y) = -ikg_1 \int\limits_{-l/2}^{l/2} U(x_0, 0) G(x, y; x_0, 0) dx_0 -$$

$$-ikg_1 \int\limits_{-l/2}^{l/2} u^0(x_0, 0) G(x, y; x_0, 0) dx_0. \tag{5.9}$$

Формулу (5.9) будем рассматривать на границе раздела, т.е. при $y = 0$:

$$U(x, 0) = -ikg_1 \int\limits_{-l/2}^{l/2} U(x_0, 0) G(x, 0; x_0, 0) dx_0 -$$

$$-ikg_1 \int\limits_{-l/2}^{l/2} u^0(x_0,0)G(x,0;x_0,0)dx_0. \qquad (5.10)$$

Подставив в формулу (5.10) значение функции Грина $G(M, M_0)$ при $y_0 = 0$, получаем интегральное уравнение Фредгольма второго рода для нахождения решения задачи (5.5), (5.6) при $y = 0$.

Зная $U(x, 0)$, по формуле (5.9) найдем $U(x, y)$. Подставив $U(x, y)$ в равенство (5.4), окончательно отыщем решение искомой задачи (5.1), (5.2), если решение u^0 в случае двух поляризаций вектора электрического поля для постоянного импеданса g_0 определено выражениями (см. (4.5)–(4.8)).

Обратимся к нахождению функции Грина. Построение функции $G(M, M_0)$ проведем стандартным методом преобразования Фурье

$$G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-x_0)\xi} kG_1(y, y_0, \xi)d\xi. \qquad (5.11)$$

Функция $G_1(y, y_0, \xi)$ удовлетворяет следующей задаче

$$\frac{\partial^2 G_1}{\partial y^2} + k^2(1-\xi^2)G_1 = -\delta(y-y_0), \quad y > 0, \qquad (5.12)$$

$$\frac{\partial G_1}{\partial y} + i\,kg_0\,G_1 = 0, \quad y = 0. \qquad (5.13)$$

Фундаментальные решения уравнения (5.12) имеют вид

$$y_{1,2} = exp\left\{\pm iky\sqrt{1-\xi^2}\right\}.$$

Из них выбираем решение, удовлетворяющее условию излучения: при $y > 0$ и $\operatorname{Im} k > 0$. Функция Грина, кроме того, должна удовлетворять импедансному условию на границе раздела $y = 0$. Следовательно, функция Грина $G_1(y, y_0, \xi)$ представляется в сложном виде. Преобразуя это выражение в более простые слагаемые и подставляя их в (5.11), получим для функции Грина $G(M, M_0)$ формулу:

$$G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-x_0)\xi} \times \qquad (5.14)$$

$$\times\left(\frac{e^{\pm ik(y-y_0)\sqrt{1-\xi^2}}+e^{ik(y+y_0)\sqrt{1-\xi^2}}}{-2i\sqrt{1-\xi^2}}+\frac{g_0e^{ik(y+y_0)\sqrt{1-\xi^2}}}{i\sqrt{1-\xi^2}(\sqrt{1-\xi^2}+g_0)}\right)d\xi.$$

Функция Грина в формуле (5.14) имеет следующие знаки в первой экспоненте: знак "+" при $y>y_0$ и знак "−" при $y<y_0$.

Приведем здесь интегральное представление Ватсона для функции Ханкеля [2]:

$$H_0^{(1)}(k\sqrt{x^2+y^2})=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{ik(x\alpha+\sqrt{1-\alpha^2}y)}\frac{d\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}},$$

где путь интегрирования указан на Рис. 4.

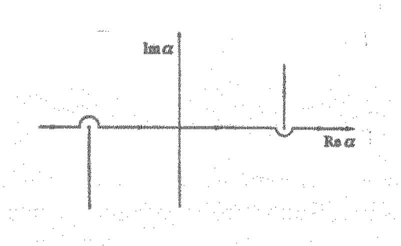

Рис. 4.

Тогда два первых слагаемых функции Грина, определенной формулой (5.14), могут быть представлены суммой двух функций Ханкеля от разных аргументов

$$G_1+G_2=\frac{i}{2}H_0^{(1)}\left(k\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right)+$$
$$+\frac{i}{2}H_0^{(1)}\left(k\sqrt{(x-x_0)^2+(y+y_0)^2}\right). \qquad (5.15)$$

Что касается третьего слагаемого в формуле (5.14), то оно превращается в следующее

$$G_3=-\frac{i}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{ik(x-x_0)\xi}\frac{g_0e^{ik(y+y_0)\sqrt{1-\xi^2}}}{\sqrt{1-\xi^2}(\sqrt{1-\xi^2}+g_0)}d\xi.$$

В главном приближении при $kr\ll 1$, $(|\xi|\gg 1)$, $r=\sqrt{(x-x_0)^2}+$ $+\sqrt{(y-y_0)^2}$, два слагаемых G_1+G_2 являются определяющими, а интеграл G_3 создает дополнительный "фон" по отношению к ним. Функция Грина при $y_0 = 0$ в области $kr \ll 1$ сводится к сумме функции Ханкеля и остатка

$$G(M, M_0) = iH_0^{(1)}\left(k\sqrt{(x-x_0)^2 + y^2}\right) + G_3.$$

Теперь необходимо функцию Грина найти *в волновой зоне* $kr \gg 1$ *и в зоне* $kr = O(1)$. Функция Грина при $y_0 = 0$ в этом случае сводится к следующему интегралу

$$G(M, M_0) = G_3 = \frac{i}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-x_0)\xi}\frac{e^{ik(y+y_0)\sqrt{1-\xi^2}}}{(\sqrt{1-\xi^2}+g_0)}d\xi. \qquad (5.16)$$

Вычислим интеграл (5.16) *в волновой зоне при* $kr \gg 1$ методом перевала. В результате получается цилиндрическая волна

$$G(M, M_0) = \frac{i\cos\theta}{2(\cos\theta + g_0)}\sqrt{\frac{2}{\pi kr}}e^{i(kr-\pi/4)}. \qquad (5.17)$$

Функция Грина *в волновой зоне* $kr = O(1)$ может быть найдена следующим образом. Делая подстановку в интеграле (5.16)

$$\xi = \sin\tau, \qquad \sqrt{1-\xi^2} = \cos\tau,$$

и вводя полярные координаты

$$x - x_0 = r\cos\vartheta, \qquad y = r\sin\vartheta, \qquad 0 < \vartheta < \frac{\pi}{2},$$

можно $G(M, M_0)$ привести к виду

$$G(M, M_0) = \frac{i}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_\tau} e^{ikr\sin(\tau-\vartheta)}\frac{\cos\tau}{\cos\tau + g_0}\,d\tau. \qquad (5.18)$$

Угол $\vartheta = \frac{\pi}{2} - \theta$ называется углом скольжения падающей волны, θ – угол падения, контур Γ_τ проведен через точку перевала $\tau = \frac{\pi}{2} - \vartheta$ под углом $-\pi/4$ к вещественной оси.

Итак, функция Грина для интегрального уравнения (5.9) (при $y_0 = 0$) имеет вид

I. *при* $kr \ll 1$

$$G(x, y; x_0, 0) = iH_0^{(1)}(kr) + G_3, \qquad (5.19_{\mathrm{I}})$$

так как у функций Ханкеля $G_{1,2}$ в данном случае одинаковый аргумент, $r = \sqrt{(x-x_0)^2+y^2}$.

II. *при* $kr = O(1)$

$$G(x,y;x_0,0) = \frac{i}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_\tau} e^{ikr\sin(\tau-\vartheta)}\frac{\cos\tau}{\cos\tau+g_0}\,d\tau, \qquad (5.19_{\mathrm{II}})$$

и, наконец,

III. *в области* $kr \gg 1$

$$G(x,y;x_0,0) = \frac{i}{2}\frac{\cos\theta}{(\cos\theta+g_0)}\sqrt{\frac{2}{\pi kr}}e^{i(kr-\frac{\pi}{4})}\left(1+O\left(\frac{1}{kr}\right)\right). \qquad (5.19_{\mathrm{III}})$$

В случае, когда обе точки (источника и наблюдателя) лежат на границе раздела (при $y=0$), функция Грина для интегрального уравнения (5.10) представляется также формулами (5.19), но для $r = \sqrt{(x-x_0)^2} = |x-x_0|$.

Решение интегрального уравнения (5.10) найдем приближенно, используя метод итераций. Выберем в качестве начального приближения известную правую часть:

$$U^{(0)}(x,0) = -ikg_1\int\limits_{-l/2}^{l/2} u^0(x_0,0)G(x,0;x_0,0)dx_0, \qquad (5.20)$$

где $G(x,0;x_0,0)$ определена выражениями (5.19).

Подинтегральную функцию Грина в (5.20) следует рассматривать в трех областях: в области $kr \ll 1$, где параметр x изменяется на отрезке $|x| \leqslant l/2$, в области $kr = O(1)$, (параметр x изменяется вне отрезка $[-l/2, l/2]$), и, наконец, при $kr \gg 1$, когда $|x| \to \infty$. Отметим, что во всех трех случаях расположения точки наблюдения на границе раздела, точка источника (точка интегрирования) $|x_0| \ll 1$.

В первой рассматримаемой области при $kr \ll 1$ функция Ханкеля имеет асимптотику

$$H_0^{(1)}(kr) \sim -\frac{2i}{\pi}\ln\frac{2i}{\gamma kr}, \quad (\gamma = 1.781\ldots), \quad \mathbf{C} = \ln\gamma = 0,577\ldots.$$

Из интеграла (5.17) можно увидеть, что в третьей области, при $kr \gg 1$, мы получим асимптотику функции Ханкеля (цилиндрическую волну):

$$H_0^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}e^{i(x-\frac{\pi}{4})}\left(1+O\left(\frac{1}{x}\right)\right), \quad \operatorname{Im} x \geqslant 0.$$

И, наконец, в области средних значений $z = k|x-x_0| = O(1)$ функция Грина представляется в виде некоторого интеграла (5.18), который вычисляется.

По условию задачи присутствует еще малый параметр $kl \ll 1$, следовательно, интервал интегрирования в уравнении (5.10) мал.

Кроме того, ядро интегрального уравнения (5.10) во всех трех случаях мало, так как по условию задачи скачок импеданса от g_0 до $g_0 + g_1$ мал, т.е.

$$g_{1\|} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\left(\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} - \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}\right), \quad g_{1\perp} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} - \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\right), \tag{5.21}$$

где ε, μ, ε_1, μ_1, ε_2, μ_2 – соответственно диэлектрическая и магнитная проницаемости верхней среды, нижней среды на подложке $y = 0$ с импедансом g_0 и $g_0 + g_1$, и, кроме того,

$$\varepsilon_1, \mu_1 \approx \varepsilon_2, \mu_2.$$

Исследуем первое приближение к решению интегрального уравнения (5.10) в трех областях изменения x.

1. *Пусть точка наблюдения* $x \in [-l/2, l/2]$.

Тогда подставляя асимптотику функции Грина при малом аргументе и выбирая одно из значений $u^0_{\perp(\|)}$, определяемое по формулам (4.7)–(4.10), получим следующее вместо (5.10) интегральное уравнение для первой итерации $U^0(x, 0)$:

$$U^0(x,0) = -\frac{2ikg_1}{\pi}\int\limits_{-l/2}^{l/2} u^0(x',0)[\ln\frac{2i}{\gamma k|x-x'|} + \frac{\pi}{2}G_3]\,dx'. \tag{5.22}$$

В формуле (5.22) параметр $|g_1|$ тоже мал по условию задачи.

Соответственно, для этих поляризаций значение амплитудного множителя у поля $u^0(x', 0)$ при экспоненте $\exp\{ikx'\sin\theta\}$ так же будет различным:

$$A^0_\perp = E_0[1 + V_\perp], \quad V_\perp = \frac{\cos\theta - g_{0\perp}}{\cos\theta + g_{0\perp}}, \tag{5.23}$$

$$A^0_\| = H_0[1 + V_\|], \quad V_\| = \frac{\cos\theta - g_{0\|}}{\cos\theta + g_{0\|}}. \tag{5.24}$$

Здесь следует считать, что параметр интегрирования $|kx'| \ll 1$ – мал, так как интегрирование в (5.22) проводится по малому промежутку $|kl| \ll 1$.

Заменяя приближенно экспоненту рядом по степеням kx' и проводя интегрирование, получаем, что максимальное значение слагаемых с логарифмическими множителями равно $kl \ln(kl/2)$, а предел при $x \to 0$ произведения любой степени x на $\ln x$ стремится к нулю. При $kl \ll 1$ первая итерация U^0 для $|x| \leqslant l/2$ имеет порядок $O(A^0\, kl\, g_1)$.

2. *Пусть точка наблюдения* $|x| > l/2$.

Исследуем теперь случай $|kx| \sim O(1)$, $kl \ll 1$, когда функция Грина представлена формулой (5.19_{II}). Однако, при $|kx'| \ll 1$ можно заменить аргумент функции Грина, а экспонента $\exp\{ikx' \sin\theta\}$ близка единице. Тогда

$$U^0(x,0) \sim O(A^0 g_1\, kl),$$

т.е. первая итерация содержит малые множители kl и g_1.

3. *Найдем рассеяние от скачка импеданса* $(x \to \infty)$.

Случай асимптотического поведения функции $H_0^{(1)}(k|x - x'|)$ при $k|x - x'| \gg 1$ приводит к следующему выражению для итерации $U^0(x,0)$:

$$U^0(x,0) \sim A^0 \frac{i\cos\theta}{2(\cos\theta + g_0)} \sqrt{\frac{2}{\pi k|x|}}\, e^{i(k|x| - \frac{\pi}{4})} g_1\, kl,$$

Если не исследовать значения импеданса g_0, близкие к $\cos\theta$, где θ – угол падения заданной плоской волны, то решение u задачи (5.1)–(5.3) может быть сформулировано следующим образом.

Решение u этой задачи имеет вид суммы (5.4), одно слагаемое $U(x,y)$ которого удовлетворяет интегральному уравнению (5.9), а другое есть известное решение задачи (4.2)–(4.4) с постоянным импедансом g_0 и определено формулами (4.5)–(4.8). Параметры $g_{0\perp}$, $g_{0\|}$ в рассматриваемом случае удовлетворяют формулам (4.1).

Используя первую итерацию $U^0(x,0)$ в трех областях расположения точки наблюдения $(x,0)$, запишем первую итерацию к неизвестному слагаемому $U^1(x,y)$ в формуле (2.4) для поля u искомой задачи с малым (g_1) скачком импеданса на малом интервале $kl \ll 1$:

$$U^1(x,y) = -ikg_1 \int_{-l/2}^{l/2} (U^0(x',0) + u^0(x',0))G(x,y;x',0)dx'. \qquad (5.25)$$

Здесь функция Грина $G(x,y;x',0)$ определена тремя различными приближенными формулами, в зависимости от расположения точки наблюдения и с различными скачками g_1 для разных поляризаций. Окончательно, из формулы (5.25) мы получим во всех трех случаях расположения наблюдателя и источника добавочное к падающей волне u^0 слагаемое порядка $O((kl)^2)g_1^2)$, но с различным характером направленности рассеиваемого поля. Этот вывод полностью согласуется с рассмотренной в первых параграфах задачей дифракции от малой неоднородности в слое, см. формулы (2.9), (3.5).

Литература

1. В. А. Фок, *Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн.* Изд-во "Советское радио," М. (1970).
2. Э. Т. Уиттекер, Дж. И. Ватсон, *Курс современного анализа. Ч. 2.* Физматгиз, М. (1963).
3. Л. А. Вайнштейн, *Теория дифракции и метод факторизации.* М. (1966).

Phillipov V. B. and Kirpichnikova N. Ya. Diffraction of electromagnetic waves on small nonhomogeneities.

Two problems of the diffraction of the electromagnetic flat waves, scattered from a small nonhomogeneity in a stratum and from a saltus of an impedance on small segment of the boundary of the interface between two media, are investigated.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 5 ноября 1998 г.