Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 257, 1999 г.

З. А. Янсон

ВЫСШИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ АСИМПТОТИКИ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН ЛЯВА SH В ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ УПРУГИХ СРЕДАХ

Введение.

Настоящая статья дополняет полученные ранее, [1], результаты в части построения следующих (высших) приближений асимптотики поверхностных волн Лява для упругих сред со специальным типом анизотропии – трансверсальной изотропией. Рассматриваемый тип симметрии упругих сред относится, однако, к практически важному (для сейсмики и сейсмологии) классу анизотропных упругих сред.

В качестве математического аппарата при построении асимптотики изучаемых поверхностных волн используется, так же как в [2, 3], нестационарный аналог лучевого метода – пространственно-временной (ПВ) лучевой метод, [4]. Отдельные моды волн Лява представлены суммой каустического разложения (собственно волн Лява с каустикой, близкой к границе среды) и двух ПВ лучевых рядов, имеющих порядок $O(p^{-2/3})$, p-частота, и являющихся по сути неоднородными волнами с комплексными эйконалами. Отметим, что поперечной SH волной – волной сдвига – непосредственно является главный член (нулевое приближение) асимптотического разложения. Существенный момент как в предлагаемых построениях, так и при решении подобных задач в скалярном и векторном (для изотропной теории упругости) случаях, состоит в замене коэффициентов и эйконалов лучевых решений степенными рядами по малому параметру γ (содержащими также и отрицательные степени γ), физически означающему близость каустики поля лучей к границе среды. В рассмотренном частном случае анизотропии именно в следующем приближении асимптотики проявляется вклад лучевых решений с комплексными эйконалами.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 96-01-00666.

Ввиду того, что тензор упругих постоянных среды в случае поперечной изотропии (гексагональная система) в декартовой системе координат имеет наиболее простой вид, [5, 6], мы считаем поверхность Σ упругого тела плоскостью, а нормаль к ней – сонаправленной оси симметрии среды. Тем не менее, построенные в данной работе асимптотические формулы можно рассматривать как обобщение результатов [2] хотя и на частный, но практически важный тип анизотропии, если граница упругой среды – плоскость. Причем, именно формулы для следующих приближений асимптотики позволяют проследить переход ПВ лучевых разложений в соответствующие решения, когда среда становится изотропной.

Обоснованием предлагаемого асимптотического представления волн Лява являются полученные в [1] соотношения для упругих (материальных) параметров среды, которые, с одной стороны, согласуются с исходной постановкой задачи, а с другой, – обеспечивают возникновение поверхностных волн типа SH в поперечно-изотропных средах.

§1. Рекуррентные уравнения для коэффициентов асимптотических разложений поверхностных волн

В настоящем параграфе мы приведем результаты, полученные в [1] и касающиеся построения главных членов асимптотики волн Лява. Причем, уже при постановке решаемой задачи мы будем учитывать специфику формирования поверхностных волн, которая была выявлена в [1].

1. Вектор смещений поверхностной волны, сосредоточенной вблизи границы Σ упругой среды (в нашем случае – плоскости), ищется в виде суммы каустического разложения $\widehat{\vec{u}}$ и двух лучевых рядов $\vec{u}_{1,2}$ с комплексными эйконалами $\theta_{1,2}$, так что

$$\vec{u}(\vec{q},t) = \widehat{\vec{u}}(\vec{q},t) + \vec{u}_1(\vec{q},t) + \vec{u}_2(\vec{q},t), \tag{1.1}$$

$$\widehat{\vec{u}} = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\vec{A}^k}{(ip)^k} v(-p^{2/3}m) + ip^{-1/3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\vec{B}^k}{(ip)^k} v'(-p^{2/3}m) \right\} e^{ip\ell(\vec{q},t)}, \tag{1.2}$$

$$\vec{u}_{1,2} = \gamma \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\vec{C^k}_{1,2}}{(ip)^k} e^{ip\theta_{1,2}(\vec{q},t)}, \quad i = \sqrt{-1} \tag{1.2a}$$

где $\vec{q} = (q^1, q^2, q^3)$ – координаты точки $\mathcal{M}$; v и v' – функция Эйри и ее производная, $p \gg 1$ – большой параметр (частота). Систему координат q^1, q^2, $q^3 = n$ считаем декартовой, так что $q^3 = n = 0$ – уравнение плоскости Σ. Нормаль $\vec{n}$ к Σ считаем направленной внутрь полупространства.

Функции ℓ, m, $\theta_{1,2}$ подчинены на Σ, т.е. при $q^3 = n = 0$, условиям

$$m\big|_\Sigma = \gamma > 0, \quad \theta_{1,2}\big|_\Sigma = \ell\big|_\Sigma, \quad \operatorname{Im} \frac{\partial \theta_{1,2}}{\partial n}\bigg|_\Sigma > 0. \tag{1.3}$$

Представляя слагаемые суммы (1.1) в виде лучевых разложений (1.2), (1.2a), мы предполагаем, что каждый из векторов $\widehat{\vec{u}}$, $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ удовлетворяет нестационарному уравнению теории упругости

$$(L\vec{U})_j \equiv \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial q^i} - \rho \frac{\partial^2 U_j}{\partial t^2} = 0, \qquad i, j = 1, 2, 3. \tag{1.4}$$

Краевое условие (отсутствие напряжений на Σ) сводится к равенствам

$$\sigma_{3j}(\vec{u})\big|_{n=0} = \big[\sigma_{3j}(\widehat{\vec{u}}) + \sigma_{3j}(\vec{u}_1) + \sigma_{3j}(\vec{u}_2)\big]_{n=0} = 0. \tag{1.5}$$

В (1.4), (1.5) $\rho(\vec{q})$ – плотность упругой среды, $\sigma_{ij}(\vec{U}) = a_{ij\alpha\beta} \frac{\partial U^\alpha}{\partial q^\beta}$ – тензор напряжений, где $a_{ij\alpha\beta}$ – тензор упругих постоянных среды, компоненты которого зависят от точки $\mathcal{M}$ и предполагаются гладкими дифференцируемыми функциями координат; U_j, U^j – компоненты $\vec{U}$ (символика верхних индексов для обозначения компонент векторов здесь и ниже яляется условной, так как в ортогональной системе координат $U_i = U^i$). В (1.4) и в приводимых далее формулах по повторяющимся индексам предполагается суммирование.

Параметр γ принимает дискретные значения

$$\gamma = \gamma_\nu = \frac{\varkappa_\nu}{p^{2/3}}, \quad \nu = 1, 2, \dots, \tag{1.6}$$

которые определяются корнями $-\varkappa_\nu$ уравнения $v'(\tau) = 0$. Индекс ν – номер собственной волны Лява – мы в дальнейшем опускаем и считаем γ малым параметром задачи, что означает, имея в виду (1.1) и (1.3), близость каустики поля лучей к границе Σ.

В соответствии с результатами [1, 2], введем коэффициенты

$$\vec{\mathcal{A}}^k = \gamma^k \vec{A}^k, \quad \vec{\mathcal{B}}^k = \gamma^k \vec{B}^k, \quad \vec{\mathcal{C}}^k{}_{1,2} = \gamma^k \vec{C}^k{}_{1,2}, \tag{1.6a}$$

при этом $\vec{\mathcal{A}}^0 = \vec{A}^0$, $\vec{\mathcal{B}}^0 = \vec{B}^0$, $\vec{\mathcal{C}}^0{}_{1,2} = \vec{C}^0{}_{1,2}$. Подстановка разложений (1.2), (1.2a) в (1.4) и (1.5) приводит к реккурентным уравнениям для $\vec{\mathcal{A}}^k$, $\vec{\mathcal{B}}^k$, $\vec{\mathcal{C}}^k_{1,2}$ вида

$$\begin{cases} (N_\ell + mN_m)\vec{\mathcal{A}}^k + 2mN_{\ell m}\vec{\mathcal{B}}^k = \gamma\vec{\mathcal{F}}_1^{k-1}, \\ \quad 2N_{\ell m}\vec{\mathcal{A}}^k + (N_\ell + mN_m)\vec{\mathcal{B}}^k = \gamma\vec{\mathcal{F}}_2^{k-1}, \end{cases} \tag{1.7}$$

$$\begin{gathered} N_{\theta_{1,2}}\vec{\mathcal{C}}^k{}_{1,2} + \gamma M_{\theta_{1,2}}\vec{\mathcal{C}}^{k-1}_{1,2} + \gamma^2 L\vec{\mathcal{C}}^{k-2}_{1,2} = 0 \\ k = 0, 1, 2, \dots; \quad \vec{\mathcal{A}}^{-r} = \vec{\mathcal{B}}^{-r} = \vec{\mathcal{C}}^{-r}_{1,2} = 0, \quad r = 1, 2, \end{gathered} \tag{1.8}$$

$$\sigma^k_{3j}\big|_{n=0} = \big\{\widehat{\sigma}^k_{3j}(\widehat{\vec{u}}) + \gamma\big[\sigma^k_{3j}(\vec{u}_1) + \sigma^k_{3j}(\vec{u}_2)\big]\big\}_{n=0} = 0, \;\; j = 1, 2, 3. \tag{1.9}$$

Здесь $\widehat{\sigma}^k_{3j}(\vec{u})$, $\sigma^k_{3j}(\vec{u}_{1,2})$ – коэффициенты разложений соответствующих слагаемых из левой части равенства (1.5) по степеням $1/(ip)^k$. В (1.7)–(1.9) использованы следующие обозначения:

$$\begin{cases} -\vec{\mathcal{F}}^k{}_1 \equiv M_\ell\vec{\mathcal{A}}^k + (N_m + mM_m)\vec{\mathcal{B}}^k + \gamma L\vec{\mathcal{A}}^{k-1}, \\ -\vec{\mathcal{F}}^k{}_2 \equiv M_m\vec{\mathcal{A}}^k + M_\ell\vec{\mathcal{B}}^k + \gamma L\vec{\mathcal{B}}^{k-1}, \end{cases} \tag{1.10}$$

$$\begin{cases} \widehat{\sigma}^k_{3j}(\widehat{\vec{u}})\big|_{n=0} \equiv \big[a_{3j\alpha\beta}\ell^\alpha(\mathcal{A}^k)^\beta + \gamma a_{3j\alpha\beta}m^\alpha(\mathcal{B}^k)^\beta + \\ \qquad + \gamma\sigma_{3j}(\vec{\mathcal{A}^{k-1}})\big]_{n=0} v(-p^{2/3}\gamma)\exp[ip\ell_0(\vec{q}, t)], \\ \sigma^k_{3j}(\vec{u}_{1,2})\big|_{n=0} \equiv \big[a_{3j\alpha\beta}\theta^\alpha_{1,2}(\mathcal{C}^k_{1,2})^\beta + \gamma\sigma_{3j}(\vec{\mathcal{C}^{k-1}}_{1,2})\big] \times \\ \qquad \times \exp[ip\ell_0(\vec{q}, t)], \quad j = 1, 2, 3, \\ \qquad \ell_0(q^1, q^2, t) \equiv \ell(\vec{q}, t)\big|_{n=0}. \end{cases} \tag{1.11}$$

$$\begin{cases} (N_\xi\vec{D})_j \equiv a_{ij\alpha\beta}\xi^i\xi^\alpha D^\beta - \rho\Big(\dfrac{\partial\xi}{\partial t}\Big)^2 D_j, \\ 2(N_{\xi\eta}\vec{D})_j \equiv a_{ij\alpha\beta}(\xi^i\eta^\alpha + \xi^\alpha\eta^i)D^\beta - 2\rho\Big(\dfrac{\partial\xi}{\partial t}\Big)\Big(\dfrac{\partial\eta}{\partial t}\Big)D_j. \end{cases} \tag{1.12}$$

$$\begin{cases} (M_\xi\vec{D})_j \equiv \dfrac{\partial}{\partial q^i}\Big(a_{ij\alpha\beta}\xi^\alpha\Big)D^\beta + a_{ij\alpha\beta}\xi^i\dfrac{\partial}{\partial q^\alpha}D^\beta + \\ \qquad + a_{ij\alpha\beta}\xi^\alpha\dfrac{\partial}{\partial q^i}D^\beta - 2\rho\dfrac{\partial\xi}{\partial t}\dfrac{\partial D_j}{\partial t} - \rho\dfrac{\partial^2\xi}{\partial t^2}D_j. \end{cases} \tag{1.12a}$$

Представим вблизи границы Σ коэффициенты $\vec{\mathcal{A}}^k$, $\vec{\mathcal{B}}^k$, $\vec{\mathcal{C}}^k{}_{1,2}$, а также функции ℓ, m, $\theta_{1,2}$ в виде рядов (двухмасштабных разложений)

$$\vec{\mathcal{A}}^k = \sum_{s,j=0}^{\infty} \vec{\mathcal{A}}^k{}_{sj}\, n^s\, \gamma^j, \quad \vec{\mathcal{B}}^k = \sum_{s,j=0}^{\infty} \vec{\mathcal{B}}^k{}_{sj}\, n^s\, \gamma^j,$$

$$\vec{\mathcal{C}}^k{}_{1,2} = \sum_{s,j=0}^{\infty} (\vec{\mathcal{C}}^k{}_{1,2})_{sj}\, n^s\, \gamma^j, \tag{1.13}$$

$$\ell = \sum_{s,j=0}^{\infty} \ell_{sr}\, n^s\, \gamma^j, \quad m = \sum_{s,j=0}^{\infty} m_{sr}\, n^s\, \gamma^j,$$

$$\theta_{1,2} = \sum_{s,j=0}^{\infty} (\theta_{1,2})_{sr}\, n^s\, \gamma^j. \tag{1.13a}$$

Соответствующие разложения для коэффициентов $\vec{A}^k$, $\vec{B}^k$, $\vec{C}^k{}_{1,2}$, $k \geqslant 1$, из (1.2), (1.2a) (высшие приближения) будут содержать, наряду со степенями $n^s\,\gamma^j$, $s,\ j \geqslant 0$, также и отрицательные степени γ^{-r}, $r = 1, 2, \ldots, k$. Несмотря на это обстоятельство, окончательные выражения для волн Лява будут иметь вид разложений по степеням $(p^{-1/3})^j\, n^s$, $s,\ j = 0, 1, 2, \ldots$. Полученные асимптотические представления носят равномерный характер и применимы в пограничной полосе $0 \leqslant n < n_0$, $n_0 = O(p^{-\varepsilon})$, $\varepsilon > 0$ – любое.

2. Приведем результаты вычислений нулевого приближения асимптотики, т.е. главных членов ПВ лучевых разложений (1.2), (1.2a) ($k = 0$).

Из системы (1.7) при $k = 0$ и $q^3 = n = 0$ (т.е. на Σ), полагая $\gamma = 0$, получим

$$\begin{cases} N_\ell \vec{A}^0\Big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = 0, \\ \left(2N_{\ell m}\vec{A}^0 + N_\ell \vec{B}^0\right)_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = 0. \end{cases} \tag{1.14}$$

Первое уравнение полученной системы для $\vec{A}^0$, $\vec{B}^0$ определяет $\vec{A}^0\big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}}$ как собственную функцию симметричной матрицы $\mathbb{A} = (a_{ij\alpha\beta}\ell^i\ell^\alpha)$ (с собственными числами $\lambda = \rho\ell_t^2$). Второе уравнение системы (1.14) определяет $\vec{B}^0$, причем условием разрешимости этого неоднородного уравнения является равенство

$$\left(2N_{\ell m}\vec{A}^0, \vec{A}^0\right)_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = 0. \tag{1.15}$$

Условие разрешимости первого уравнения системы (1.14), т.е. характеристическое уравнение матрицы $\mathbb{A}$, мы здесь не выписываем, а поступаем иначе: находим корень этого уравнения – собственное число $\lambda = \rho\ell_t^2$ матрицы $\mathbb{A}$, так что при этом оказываются выполненными как краевые условия, так и равенство (1.15).

Краевые условия (1.9), (1.11) при $\gamma = 0$ приводят также к линейной системе для $\vec{A}^0|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}}$

$$(\vec{\xi}_j, \vec{A}^0) = 0, \quad \vec{\xi}_j = (a_{3j\alpha 1}\ell^\alpha, a_{3j\alpha 2}\ell^\alpha, a_{3j\alpha 3}\ell^\alpha), \quad j = 1, 2, 3, \tag{1.16}$$

определитель которой должен равняться нулю. При этом, во-первых, из (1.14) (конкретно из $(N_\ell\vec{A}^0, \vec{n})_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = 0$) следует

$$A_n^0|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = \left(\vec{A}^0, \vec{n}\right)_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = 0 \tag{1.17}$$

и, во-вторых, будет выполнено условие (1.15), так как в силу (1.3) и симметрии оператора $N_{\ell m}$ левая часть равенства (1.15) преобразуется при $n = 0$ к виду

$$a_{3j\alpha\beta}\,\ell^\alpha (A^0)^\beta\,(A^0)^j = (\vec{\xi}_j, \vec{A}^0)(A^0)^j\,.$$

Подчеркнем, что равенство (1.17) является важной физической характеристикой волны Лява SH в изотропном случае. В анизотропной упругой среде поляризация волны зависит от направления ее распространения, поэтому равенство $A_n^0 = 0$ реализуется либо на определенном направлении распространения волны, либо (если это множество направлений) накладывает определенные ограничения на тип симметрии упругой среды. В рассматриваемом нами случае трансверсальной изотропии мы имеем дело со средами, в которых существует единственная оси симметрии [5, 6], принимаемая обычно за одну из координатных осей. В нашем случае эта ось симметрии совмещена с осью Oq^3 декартовой системы координат q^1, q^2, q^3.

Симметричная матрица (c_{rs}), r, $s=1,2,\dots,6$, к которой сводится тензор $a_{ij\alpha\beta}$, в трансверсально-изотропной среде определяется 5 независимыми упругими (материальными) параметрами. Структурно эта матрица подобна матрице (c_{rs}) изотропной среды, [5], и отличными от нуля являются следующие элементы c_{rs}:

$$c_{11}=c_{22}>0, \quad c_{12}=c_{21}, \quad c_{13}=c_{31}=c_{23}=c_{32}, \quad c_{33}>0,$$

$$c_{44}=c_{55}>0, \quad c_{66}=\frac{c_{11}-c_{12}}{2}>0. \tag{1.18}$$

В изотропном случае независимых параметров всего два (λ и μ), при этом

$$c_{11}=c_{22}=c_{33}=\lambda+2\mu, \quad c_{12}=c_{13}=\lambda, \quad c_{44}=c_{55}=c_{66}=\mu. \tag{1.18a}$$

Равенство (1.15) для матрицы (1.18) в силу (1.17) приводится к виду (заметим, что $a_{3j'\alpha'\beta'}\equiv 0$, $j',\alpha',\beta'=1,2$, см. [5])

$$\frac{\partial\ell}{\partial n}\left(c_{44}|\vec{A^0}_s|^2+c_{33}|A_n^0|^2\right)\Big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}}=0, \quad \vec{A^0}=\vec{A^0}_s+\vec{n}\,A_n^0, \tag{1.15a}$$

откуда при $|A^0|\not\equiv 0$ следует

$$\ell_3\big|_\Sigma=\frac{\partial\ell}{\partial n}\big|_\Sigma=0, \quad \gamma=0. \tag{1.19}$$

Для векторов $\vec{\xi_j}$ из (1.16) при $n=0$, $\gamma=0$ получим

$$\vec{\xi_1}=\left(0,0,c_{44}\frac{\partial\ell}{\partial q^1}\right), \ \vec{\xi_2}=\left(0,0,c_{44}\frac{\partial\ell}{\partial q^2}\right), \ \vec{\xi_3}=c_{13}\nabla_s\,\ell,$$

где $\nabla\ell=\nabla_s\,\ell+\vec{n}\partial\ell/\partial n$. Определитель системы (1.16) оказывается равным нулю, и при $j=3$ из (1.16) также следует

$$(\vec{A^0}\nabla_s\,\ell)_{\substack{n=0\\ \gamma=0}}=0. \tag{1.20}$$

Итак, $\vec{A^0}$ при $\gamma=0$ на поверхности Σ является амплитудой поперечной волны сдвига (волной SH), так что

$$\vec{A^0}\Big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}}=\varphi^0(q^1,q^2,t)\vec{\zeta}, \tag{1.21}$$

где φ^0 – произвольная функция, а $\vec{n}$, $\nabla_s l$, $\vec{\zeta} = \vec{n} \times \nabla_s \ell$ – тройка ортогональных на Σ векторов.

Теперь из первого уравнения системы (1.14), где в рассматриваемом частном случае анизотропии (см. Приложение)

$$N_\ell \vec{A}^0 \equiv (c_{12} + c_{66})(\vec{A}^0 \nabla \ell)\nabla \ell + (c_{66}(\nabla \ell)^2 - \rho \ell_t^2)\vec{A}^0{}_s +$$
$$+(c_{44}(\nabla \ell)^2 - \rho \ell_t^2)A_n^0 + \ell_3 \vec{a}\left(q^j, \frac{\partial \ell}{\partial q^j}\right), \quad |\, \vec{a}\,| < \mathrm{const},$$

при $n = 0$, $\gamma = 0$ немедленно следует равенство

$$c_{66}(\nabla_s \ell)^2 - \rho \ell_t^2 = 0, \quad \ell_t = \frac{\partial \ell}{\partial t}. \tag{1.22}$$

Это равенство, с одной стороны, определяет собственное число матричного оператора $\mathbb{A}$, а с другой стороны, (1.22) есть уравнение эйконала для функции $\ell_{00}(q^1, q^2, t) = \ell\big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}}$ поля ПВ лучей, которая находится методом характеристик, если задана $l_{00}\big|_{t=0}$. Заметим, что уравнение (1.22) совпадает с соответствующим уравнением эйконала в изотропном случае. С целью удобства изложения, пользуясь (1.18), приведем выражения для компонент $\widehat{\sigma}_{3j}(\widehat{\vec{u}})\big|_{n=0}$ из (1.11):

$$\begin{cases} \widehat{\sigma}_{33}^k\big|_{n=0} = \Big[c_{13}(\vec{\mathcal{A}}^k \nabla_s \ell) + c_{33}\mathcal{A}_n^k \ell_3 + \gamma \dfrac{\partial m}{\partial n} c_{33} \mathcal{B}_n^k + \\ \qquad + \gamma \sigma_{33}(\vec{\mathcal{A}}^{k-1})\Big] \exp[ip\ell_0(\vec{q}, t)]\Big|_{n=0} \cdot v(-p^{2/3}\gamma), \\ \widehat{\sigma}_{3j'}^k\big|_{n=0} = \Big\{c_{44}\Big[\dfrac{\partial \ell}{\partial q^{j'}} \mathcal{A}_n^k + \ell_3 \mathcal{A}_{j'}^k + \gamma \dfrac{\partial m}{\partial n}(\mathcal{B}^k)_{j'}\Big] + \\ \qquad + \gamma \sigma_{3j'}(\vec{\mathcal{A}}^{k-1})\Big\} \exp[ip\ell_0(\vec{q}, t)]\Big|_{n=0} \cdot v(-p^{2/3}\gamma), \\ \qquad j' = 1, 2, \end{cases} \tag{1.23}$$

3. Проекции вектора $\vec{B}^0$ на $\nabla_s \ell$ и $\vec{n}$ находятся из (1.14), так что при $n = 0$, $\gamma = 0$

$$(\vec{B}^0 \nabla_s \ell) = 0, \quad B_n^0 = 0. \tag{1.24}$$

Для вычисления компоненты $(\vec{B}^0, \vec{\zeta})$ используем краевое условие (1.9) при $k = 0$. Требуя, чтобы проекция $\sigma_{3j}^0(\vec{u})\big|_{n=0}$ на направление $\vec{\zeta}$ (или, что то же, на $\vec{A}^0$) обращалась в ноль с точностью до $O(\gamma^2)$, получим

$$\left(\vec{B}^0, \vec{\zeta}\right)_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = 0. \tag{1.25}$$

Проекции векторов $\sigma^0_{3j}(\vec{u}_{1,2})$ в (1.9) на найденное значение $(\vec{B}^0,\vec{\zeta})$ не влияют в силу равенства (см. Приложение, п. 3)

$$a_{3j\alpha\beta}(A^0)^j\theta^\alpha(C^0)^\beta = -(\vec{\xi}_j,\vec{A}^0)(C^0)^j, \tag{1.25a}$$

где $(\vec{\xi}_j,\vec{A}^0)_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = 0$, см. (1.16), и $\vec{A}^0\big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}}$ сонаправлен с $\vec{\zeta}$. Под θ, $\vec{C}^0$ понимаем $\theta_{1,2}$, $\vec{C}^0_{1,2}$.

Итак, из (1.24) и (1.25) следует, что $\vec{B}^0\big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = 0$.

Коэффициенты разложений (1.13), (1.13a) находятся последовательным дифференцированием по n и γ системы (1.7) при $k=0$. Проецируя полученные выражения на $\vec{\zeta}$, получим коэффициенты m_{10}, ℓ_{01} и ℓ_{20}, [1], которые мы приводим в конце §2, и проецируя те же выражения на $\nabla_s\ell$ и $\vec{n}$ (при $\widetilde{m}\equiv c_{66}-c_{44}\neq 0$) при $n=0$, $\gamma=0$ находим

$$\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial\gamma}(\vec{A}^0\nabla_s\ell)\big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = 0 \quad\text{или}\quad \Big(\frac{\partial\vec{A}^0}{\partial\gamma},\nabla_s\ell\Big) = -\big(\vec{A}^0\nabla_s\ell_{01}\big),\\
\frac{\partial A^0_n}{\partial\gamma} = 0,\quad \frac{\partial^2}{\partial\gamma^2}\big(\vec{A}^0\nabla_s\ell\big) = 0,\quad \Big(\frac{\partial\vec{B}^0}{\partial\gamma},\nabla_s\ell\Big) = 0,\\
\frac{\partial {B^0}_n}{\partial\gamma} = 0,\quad \frac{\partial {A^0}_n}{\partial n} = 0,\quad \Big(\frac{\partial\vec{B}^0}{\partial n},\nabla_s\ell\Big) = -\big(\vec{A}^0\nabla_s m_{10}\big).
\end{gathered}\tag{1.26}$$

Компонента $(\vec{A}^0,\vec{\zeta})$ (т.е. функция φ^0 из (1.21)), входящая в выражения $(\vec{A}^0\nabla_s\ell_{01})$ и $(\vec{A}^0\nabla_s m_{10})$, см. (1.26), определяется из условия разрешимости 1-го уравнения системы (1.7) при $k=1$, см. §2, а также [1].

При получении формул (1.26) мы учли, что

$$\frac{\partial\ell_3}{\partial\gamma}\bigg|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = 0. \tag{1.27a}$$

Левая часть этого равенства есть коэффициент $\ell_{11} = \frac{\partial^2\ell}{\partial n\partial\gamma}$ из (1.13a), и его вычисление (см. Приложение, п. 1) сводится к дифференцированию по γ равенства

$$\Big(2N_{\ell m}\vec{A}^0,\vec{A}^0\Big) = m(2N_{\ell m}\vec{B}^0,\vec{B}^0), \tag{1.27}$$

которое является следствием системы (1.7) при $k=0$. Равенство (1.27) при $n=0$, $\gamma=0$ совпадает с (1.15), и может трактоваться как необходимое условие разрешимости решаемой задачи.

Из формул (1.26) и (1.27a) следует, что вектор $\hat{\sigma}^0_{3j}(\widehat{\vec{u}})\big|_{n=0}$ из (1.9) есть во всяком случае величина $O(\gamma^3)$, см. также Приложение, п. 2. И как легко видеть из (1.2a), (1.9), вклад лучевых решений $\vec{u}_{1,2}$ в поле волны Лява при $k=0$ может проявляться лишь в приближении $O(\gamma^3)$. В этой связи особый интерес представляет оценка вклада, вносимого решениями $\vec{u}_{1,2}$ в следующие приближения асимптотики волн Лява при $k \geqslant 1$.

§2. Условия разрешимости рекуррентной системы уравнений. Высшие приближения асимптотики

1. Рассмотрим систему (1.7) при $k \geqslant 0$. Вводя эйконалы $\tau_{1,2} = \ell \mp \frac{2}{3}\, m^{3/2}$ и соответственно – амплитуды $\vec{U}^k_{1,2} = m^{-1/4}\vec{\mathcal{A}}^k \mp m^{1/4}\vec{\mathcal{B}}^k$ для волн, распространяющихся вблизи поверхности Σ, приведем (1.7) к рекуррентной системе уравнений

$$N_{\tau_{1,2}}\vec{U}^k_{1,2} = \gamma\left[m^{-1/4}\vec{\mathcal{F}}^{k-1}_1 \mp m^{1/4}\vec{\mathcal{F}}^{k-1}_2\right], \quad k=0,1,2,\ldots, \tag{2.1}$$

где $\vec{U}^0_{1,2}$ – решения соответствующих однородных векторных уравнений, определитель которых предполагается равным нулю.

Условие разрешимости системы (2.1) при $k \geqslant 1$ имеет вид

$$\Big((m^{-1/4}\vec{\mathcal{F}}^k_1 \mp m^{1/4}\vec{\mathcal{F}}^k_2), \vec{U}^0_{1,2}\Big) = 0, \quad k=0,1,2,\ldots.$$

Умножая это равенство на $m^{1/2}$ и полагая $n=0$ (т.е. на Σ) в пределе при $\gamma \to 0$, получим

$$\big(\vec{\mathcal{F}}^k_1, \vec{A}^0\big)_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = 0 \quad \text{или} \quad \big(M_\ell\vec{\mathcal{A}}^k + N_m\vec{\mathcal{B}}^k, \vec{A}^0\big)_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = 0. \tag{2.2}$$

Для трансверсально-изотропной среды в силу (1.25) имеем равенство $(\vec{M}_\ell\,\vec{A}^0, \vec{A}^0)_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = 0$, которое приводится к виду (уравнению переноса), см. [1],

$$\operatorname{div}_s\Big(\vec{g}\,\frac{|\vec{A}^0|^2\rho}{|m_{10}|}\Big) + \frac{\partial}{\partial t}\frac{|\vec{A}^0|^2\rho}{|m_{10}|} = 0, \tag{2.3}$$

где $\vec{g}$ – групповая скорость с компонентами

$$q^{j'} = \frac{c_{66}}{\rho} \frac{\partial \ell_{00}}{\partial q^{j'}} / (-\ell_{00})_t, \quad (-\ell_{00})_t > 0, \quad j' = 1, 2$$

и где обозначено $\operatorname{div}_s \vec{C} \equiv \frac{\partial}{\partial q^{j'}} C^{j'}$, $j' = 1, 2$.

Интегрируя (2.3) вдоль произвольного ПВ луча, находим $\vec{A}^0\big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}}$ (то-есть определяем функцию φ^0 из (1.21))

$$\vec{A}^0\Big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = \chi^0(\alpha_1, \alpha_2)\Big(\frac{|m_{10}|}{\rho J}\Big)^{1/2} \vec{\zeta}_0, \quad \vec{\zeta}_0 = \frac{\vec{\zeta}}{|\vec{\zeta}|}, \tag{2.3a}$$

где $J \equiv D(t, q^1, q^2) \big/ D(s, \alpha_1, \alpha_2)$ – геометрическое расхождение вдоль лучевой трубки; s, α_1, α_2 – лучевые координаты; $\chi^0(\alpha_1, \alpha_2) = \text{const}$. вдоль ПВ луча.

Пусть в (1.7) $k = 1$. При $n = 0$, $\gamma = 0$ для коэффициентов $\vec{\mathcal{A}}^1$ и $\vec{\mathcal{B}}^1$ имеем однородную систему, аналогичную (1.14). Поскольку краевые условия при $k = 1$ и $\gamma = 0$ сводятся к равенствам $(\vec{\xi}_j, \vec{\mathcal{A}}^1)_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = 0$, см. (1.16), то вектор $\vec{\mathcal{A}}^1\big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}}$, имеет, как и $\vec{A}^0$, поляризацию SH волны, т.е.

$$\vec{\mathcal{A}}^1\Big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = \varphi^1(q^1, q^2, t)\vec{\zeta}, \quad \vec{\zeta} = \vec{n} \times \nabla_s \ell, \tag{2.4}$$

где φ^1 – произвольная и пока неизвестная функция.

Из системы (1.14) (для $\vec{\mathcal{A}}^1$, $\vec{\mathcal{B}}^1$) аналогично случаю $k = 0$ получаем

$$\mathcal{B}^1_n\big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = \Big(\vec{\mathcal{B}}^1, \vec{n}\Big)_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = 0, \quad \Big(\vec{\mathcal{B}}^1, \nabla_s \ell\Big)_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = 0. \tag{2.5}$$

Для нахождения компоненты $(\vec{\mathcal{B}}^1, \vec{\zeta})$ рассмотрим краевые условия (1.9) при $k = 1$, а точнее, проекцию вектора $\widehat{\sigma}^1_{kj'}\big|_{n=0}$ из (1.23) на направление $\vec{\zeta}$ (или, что то же, на $\vec{A}^0$). Потребуем, чтобы коэффициент при γ^1 у этой проекции обращался в нуль. В отличие от приближения $k = 0$, теперь в этом коэффициенте надо учесть слагаемое $\sigma_{3j'}(\vec{A}^0)\big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}}$, которое, см. (1.23), равно $c_{44} \frac{\partial}{\partial n} \vec{A}^0{}_{j'}\big|_{n=0}$. Итак, при $n = 0$, $\gamma = 0$ находим

$$m_{10}(\vec{\mathcal{B}}^1, \vec{\zeta}) = -\Big(\frac{\partial \vec{A}^0}{\partial n}, \vec{\zeta}\Big). \tag{2.5a}$$

О вычислении проекции $(\frac{\partial \vec{A}^0}{\partial n}, \vec{\zeta})_{\substack{n=0\\ \gamma=0}}$ см. ниже.

Проекции векторов $\sigma^{(1)}_{3j}(\vec{u}_{1,2})\big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}}$ в (1.9) на найденное значение $(\vec{\mathcal{B}}^1, \vec{\zeta})$ не влияют. Действительно, это следует из (1.11) и (1.25a), т.к. из (1.8) очевидно, что $\vec{\mathcal{C}}^k{}_{1,2}\big|_{\gamma=0} = a^k_{1,2}\ \vec{C}^0{}_{1,2}\big|_{\gamma=0}$, где $a^k_{1,2}$ – скалярные функции.

Функцию $\varphi^1(q^1, q^2, t)$ мы определяем, интегрируя неоднородное, в отличие от (2.3), дифференциальное уравнение вдоль произвольного ПВ луча на Σ. В результате получаем формулу первого приближения лучевого метода, а именно

$$\varphi^1(q^1, q^2, t) = \Bigg\{ \chi^1(\alpha_1, \alpha_2) \left(\frac{|m_{10}|}{\rho J} \right)^{1/2} +$$

$$+ \frac{1}{2(-\ell)_t} \sqrt{\frac{|m_{10}|}{\rho J}} \int\limits_{\mathcal{M}_0}^{\mathcal{M}} \sqrt{\frac{|m_{10}| J}{\rho}} (N_m \vec{\mathcal{B}}^1, \vec{\zeta})\, ds \Bigg\}_{\substack{n=0\\ \gamma=0}}, \quad ds = dt, \qquad (2.6)$$

где $\chi^1(\alpha_1, \alpha_2) = \mathrm{const}.$ вдоль ПВ луча и где проекция $N_m \vec{\mathcal{B}}^1\big|_{\vec{\zeta}}$ выражается через правую часть равенства (2.5a)

$$(N_m \vec{\mathcal{B}}^1, \vec{\zeta})_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = m^2_{10} c_{44} (\vec{\mathcal{B}}^1, \vec{\zeta})_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = -m_{10}\, c_{44} \left(\frac{\partial \vec{A}^0}{\partial n}, \vec{\zeta} \right)_{\substack{n=0\\ \gamma=0}}. \qquad (2.6a)$$

2. Следующие приближения по γ для коэффициентов $\vec{\mathcal{A}}^1$ и $\vec{\mathcal{B}}^1$ находим, поступая по аналогии со случаем $k = 0$. Дифференцируя по γ систему (1.7) ($k = 1$), проецируя полученные уравнения на $\nabla_s\, \ell$ и $\vec{n}$ и обозначая $\widetilde{m} \equiv c_{66} - c_{44}$, будем иметь:

$$(c_{12} + c_{66}) \frac{\partial (\vec{\mathcal{A}}^1 \nabla_s\, \ell)}{\partial \gamma} \Bigg|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = \frac{(\vec{\mathcal{F}}^0{}_1, \nabla_s\, \ell)}{(\nabla_s\, \ell)^2} \Bigg|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}};$$

$$(-\widetilde{m}) \frac{\partial \mathcal{A}^1_n}{\partial \gamma} \Bigg|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = \frac{(\vec{\mathcal{F}}^0{}_1, \vec{n})}{(\nabla_s\, \ell)^2} \Bigg|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}},$$

$$(c_{12} + c_{66}) \frac{\partial (\vec{\mathcal{B}}^1\, \nabla_s\, \ell)}{\partial \gamma} \Bigg|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = \Bigg\{ -(c_{13} + c_{44}) m_{10} \frac{\partial \mathcal{A}^1_n}{\partial \gamma} + \frac{(\vec{\mathcal{F}}^0{}_2, \nabla_s\, \ell)}{(\nabla_s\, \ell)^2} \Bigg\}_{\substack{n=0\\ \gamma=0}},$$

$$(-\widetilde{m}) (\nabla_s\, \ell)^2 \frac{\partial \mathcal{B}^1_n}{\partial \gamma} \Bigg|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} =$$

$$= -\left\{\frac{c_{13}+c_{44}}{c_{12}+c_{66}}\, m_{10}\, \frac{(\vec{\mathcal{F}}^0{}_1, \nabla_s\,\ell)}{(\nabla_s\,\ell)^2} - (\vec{\mathcal{F}}^0{}_2, \vec{n})\right\}_{\substack{n=0\\ \gamma=0}}. \qquad (2.7)$$

При $\widetilde{m} = 0$ ($c_{44} = c_{66}$), т.е. в случае кратного собственного числа матрицы $\mathbb{A} = (a_{ij\alpha\beta}\ell^i\,\ell^\alpha)$, схема определения проекций $\vec{\mathcal{A}}^1$ и $\vec{\mathcal{B}}^1$ на $\nabla_s\ell$ и $\vec{n}$, как следует из (2.7), видоизменяется. В частности, если упругая среда изотропна, так что $c_{12} = c_{13}$, $c_{33} = 2c_{12} + c_{66}$, см. (1.18а), то из (2.7) следуют равенства

$$\left(\vec{\mathcal{F}}^0{}_1, \vec{n}\right)_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = 0, \quad \left(\vec{\mathcal{F}}^0{}_2\big|_{\nabla m} - \vec{\mathcal{F}}^0{}_1\big|_{\nabla_s \ell}\right)_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = 0, \qquad (2.7\text{а})$$

которые были получены в [2] как условия разрешимости системы (1.7) при $k = 1$. Эти равенства определяют соответственно B^0_n и $\frac{\partial A^0 n}{\partial n}$ при $n = 0$, $\gamma = 0$. Равенства, аналогичные (2.7а), имеют место при $k \geqslant 1$ и позволяют проследить переход последовательно получаемых (при $\widetilde{m} \neq 0$) выражений для $\vec{\mathcal{A}}^k{}_{ij}$, $\vec{\mathcal{B}}^k{}_{ij}$ из (1.13) в соответствующие коэффициенты лучевых решений для изотропной среды, см. [2], а также ниже, п. 3.

Вычисление проекции $\frac{\partial \vec{\mathcal{A}}^1}{\partial \gamma}\big|_{\vec{\zeta}}$, так же как и не найденной пока проекции $\frac{\partial \vec{A}^0}{\partial \gamma}\big|_{\vec{\zeta}}$, предполагает двукратное дифференцирование по γ первого уравнения системы (1.7) соответственно при $k = 2$ и $k = 1$. Условия разрешимости полученных векторных линейных уравнений (для $\frac{\partial^2 \vec{\mathcal{A}}^2}{\partial \gamma^2}$ и $\frac{\partial^2 \vec{\mathcal{A}}^1}{\partial \gamma^2}$) приводят на Σ ($\gamma = 0$) к неоднородным дифференциальным уравнениям для $\big(\frac{\partial \vec{\mathcal{A}}^1}{\partial \gamma}, \vec{\zeta}\big)_{\substack{n=0\\ \gamma=0}}$ и $\big(\frac{\partial \vec{A}^0}{\partial \gamma}, \vec{\zeta}\big)_{\substack{n=0\\ \gamma=0}}$, интегрируемым вдоль ПВ лучей. Соответствующие выкладки мы здесь не приводим.

Вернемся к краевым условиям (1.9), (1.23) при $k = 1$, используя в качестве базиса уже введенную выше тройку ортогональных на Σ векторов $\vec{n}$, $\nabla_s\,\ell$, $\vec{n} \times \nabla_s\,\ell$. Как было показано выше, проекция вектора $\widehat{\sigma}^{(1)}_{3j}\big|_{n=0}$ на $\vec{\zeta}$ есть величина порядка $O(\gamma^2)$, если выполнено (2.5а). Коэффициенты при γ^1 как у компоненты $\widehat{\sigma}^1_{33}$ (проекции $\widehat{\sigma}^1_{3j}\big|_{n=0}$ на $\vec{n}$), так и у проекции $\widehat{\sigma}^1_{3j}\big|_{n=0}$ на $\nabla_s\,\ell$ при этом оказываются отличными от нуля и соответственно равными

$$\left[c_{13}\frac{\partial(\vec{\mathcal{A}}^1\nabla_s\,\ell)}{\partial\gamma} + c_{13}\,\mathrm{div}_s\,\vec{A}^0\right]_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} \cdot v(-p^{2/3}\gamma)\exp[ip\ell_0(q^1,q^2,t)], \quad (2.8\text{а})$$

$$\left[c_{44}(\nabla_s\ell)^2\,\frac{\partial A^1_n}{\partial\gamma}\right]_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} \cdot v(-p^{2/3}\gamma)\exp[ip\ell_0(q^1,q^2,t)]. \qquad (2.8\text{б})$$

Преодолеть возникшую трудность и удовлетворить краевым условиям (1.9) с любой точностью $O(\gamma^N)$, $N \geqslant 2$, удается, учитывая в (1.9) слагаемые $\gamma\sigma^k_{3j}(\vec{u}_{1,2})\Big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}}$, $k \geqslant 1$. Покажем это для $k = 1$. С этой целью проецируем $\sigma^1_{3j}(\vec{u})\big|_{n=0}$ (т.е. сумму трех векторов из (1.9)) на $\nabla_s\,\ell$ и затем приравниваем нулю коэффициент при γ^1 как в полученном выражении, так и в компоненте $\sigma^1_{33}(\vec{u})\big|_{n=0}$.

Таким образом, при $n = 0$, $\gamma = 0$ получаем линейную неоднородную систему двух уравнений для компонент векторов $\vec{\mathcal{C}^k}_{1,2}\big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}}$ из (1.8) с известными свободными членами (2.8а), (2.8б). Вводя векторы $\vec{\varkappa}_{1,2}$, $|\vec{\varkappa}_{1,2}|^2 = 1/\rho$, $\vec{\varkappa}_{1,2}$ – решения однородных уравнений $N_{\theta_{1,2}}\vec{\varkappa}_{1,2} = 0$, (см. ниже), так что $\vec{\mathcal{C}^1}_{1,2} = \Phi^1_{1,2}\vec{\varkappa}_{1,2} + \vec{U^1}_{1,2}$, где $\vec{U^1}_{1,2}\big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = 0$, мы однозначно находим $\Phi^1_{1,2}\big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}}$, а следовательно, и $\vec{\mathcal{C}^1}_{1,2}\big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}}$, при условии, что определитель вышеупомянутой системы отличен от нуля. Подробности соответствующих вычислений приведены в следующем пункте.

3. Остановимся на процедуре построения коэффициентов лучевых разложений (1.2а), см. также [1]. Согласно [4], коэффициенты $\vec{\mathcal{C}^k}_{1,2}$ имеют вид

$$\vec{\mathcal{C}}^k_{1,2} = \Phi^k_{1,2}\vec{\varkappa}_{1,2} + \vec{U}^{k0}_{1,2}, \quad \vec{U}^{00}_{1,2} = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{2.8}$$

где векторы $\vec{\varkappa}_{1,2}$ – решения однородных уравнений

$$N_{\theta_r}\vec{\varkappa}_r \equiv a_{ij\alpha\beta}\,\theta^i_r\,\theta^\alpha_r\,\varkappa^\beta_r - \rho\left(\frac{\partial\theta_r}{\partial t}\right)^2(\varkappa_r)_j = 0, \quad r = 1, 2. \tag{2.9}$$

Пусть выполнено условие нормировки $\rho|\vec{\varkappa}_{1,2}|^2 = 1$, а эйконалы $\theta_{1,2}$ на поверхности Σ (плоскости) подчинены условиям (1.3), обеспечивающим экспоненциальное затухание волн $\vec{u}_{1,2}$ с удалением от Σ.

Проецируя (2.9) на $\nabla_s\,\ell$ и $\vec{n}$ и учитывая уравнение (1.22), получим однородную систему для $(\vec{\varkappa}\nabla_s\,\ell)$ и $\theta_n\varkappa_n$, см. [1], где $\theta_n = \frac{\partial\theta}{\partial n}$, а под $\vec{\varkappa}$ и θ имеются в виду $\vec{\varkappa}_{1,2}$ и $\theta_{1,2}$. Условие разрешимости этой системы (равенство нулю ее определителя) сводится к биквадратному уравнению для величин θ^2_n

$$\mathcal{D} \equiv \left\{c_{33}c_{44}\lambda^2 + \left[f - \widetilde{m}c_{44}\right](\nabla_s\,\ell)^2\lambda - \widetilde{m}(c_{12} + c_{66})(\nabla_s\,\ell)^4\right\}_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = 0,$$

$$f \equiv \big(c_{12}+c_{66}\big)c_{33} - \big(c_{13}+c_{44}\big)^2, \quad \lambda \equiv \theta_n^2, \tag{2.10}$$

корни которого при $n=0$, $\gamma=0$ соответственно равны

$$\lambda_{1,2} \equiv (\theta_n^2)_{1,2} = \frac{-f \mp \sqrt{F}}{2c_{33}c_{44}} (\nabla_s \ell)^2, \tag{2.11}$$

где $F \equiv f^2 + 4\widetilde{m}(c_{12}+c_{66})c_{33}c_{44}$, $\widetilde{m} = c_{66} - c_{44}$.

Условия (1.3), очевидно, будут выполнены, если $\lambda_{1,2} < 0$ (при этом $(\theta_{1,2})_n \equiv \frac{\partial \theta_{1,2}}{\partial n} = i|\lambda_{1,2}|^{1/2}$).

При $\widetilde{m} = 0$ ($c_{44} = c_{66}$) из (2.11) получим

$$\lambda_1 = -\frac{f(\nabla_s \ell)^2}{c_{33}c_{44}}, \quad \lambda_2 = 0,$$

т.е. один из корней уравнения (2.10) равен нулю, в то время как второй корень должен быть отрицательным. Это тот вырожденный случай, когда матричный оператор $\mathbb{A}$ имеет кратное собственное число, что всегда имеет место в изотропной упругой среде. В этом случае $c_{44} = c_{66} = \mu$, $c_{12} = c_{13} = \lambda$, см. (1.18a), так что при $n = 0$, $\gamma = 0$ имеем $f = \mu(\lambda+\mu) > 0$, $\lambda_1 = -(\lambda+\mu)(\nabla_s \ell)^2/\lambda + 2\mu$, что согласуется с [2].

Из (2.11) очевидно, что если одновременно выполнены неравенства

$$f > 0, \quad F > 0, \quad \widetilde{m} < 0, \tag{2.12a}$$

то $(\theta_n)^2_{1,2} < 0$. Соответствующие оценки проделаны в [1], где получены соотношения между элементами матрицы (c_{rs}), обеспечивающие выполнение неравенств (2.12a). Приведем доказанный в [1] результат.

Утверждение. Если выполнены неравенства

$$\widehat{f} \equiv (c_{12}+c_{66})c_{33} - (c_{13}+c_{66})^2 > 0, \quad c_{13} > 0, \tag{2.12}$$

то при изменении $\widetilde{m} = c_{66} - c_{44} < 0$ в интервале $(-|\widetilde{m}_1|, 0)$, где $|\widetilde{m}_1| = \alpha\widehat{f}$, $\alpha = \mathrm{const}.$, корни $\lambda_{1,2}$ уравнения (2.10) различны и отрицательны.

Итак, если выполнены (2.12), то

$$\theta_{1,2} = \ell_{00} + i|\lambda_{1,2}|^{1/2} n + \ell_{01}\gamma + O(n^2+\gamma^2) + O(n\gamma), \tag{2.13}$$

где $\theta_{1,2}$ – комплексные эйконалы лучевых рядов (1.2a).

Замечание. Если $\widehat{f} > 0$, $c_{13} > 0$ (т.е. выполнены (2.12)), то справедливо $(c_{12}+c_{66})c_{33} > c_{13}^2$. Это неравенство, а также неравенства $c_{11} > 0$, $c_{11} > |c_{12}|$, $c_{33} > 0$, $c_{44} = c_{55} > 0$ являются условиями (необходимыми и достаточными) положительности упругой энергии деформации в трансверсально-изотропной среде, [6].

Вернемся к неоднородной линейной системе, о которой шла речь в конце пункта 2. Как следует из (1.8), для $\vec{U}^{k\,0}_{1,2}$ из (2.8) имеем $\vec{U}^{k\,0}_{1,2}\big|_{\gamma=0} = 0$, так что коэффициенты вышеупомянутой системы выражаются через компоненты векторов поляризации $\vec{\varkappa}_{1,2}$, а неизвестными при $k = 1$ являются скалярные функции $\Phi^1_{1,2}\big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}}$. Линейную систему мы здесь не выписываем, а приводим выражение для ее определителя Δ

$$\Delta \equiv c_{44}\left\{[c_{13}(\vec{\varkappa}_1\,\nabla_s\,\ell) + c_{33}(\theta_n)_1(\varkappa_n)_1]\left[(\varkappa_n)_2(\nabla_s\,\ell)^2 + (\theta_n)_2(\vec{\varkappa}_2\,\nabla_s\,\ell)\right]\right. \tag{2.14}$$

$$\left. - [c_{13}(\vec{\varkappa}_2\,\nabla_s\,\ell) + c_{33}(\theta_n)_2(\varkappa_n)_2]\left[(\varkappa_1)_n(\nabla_s\,\ell)^2 + (\theta_n)_1(\vec{\varkappa}_1\,\nabla_s\,\ell)\right]\right\},$$

где следует полагать $n = 0$, $\gamma = 0$ и где $(\theta_n)_1$, $(\theta_n)_2$ – корни уравнения (2.10). Будем считать, что выполнены неравенства (2.12) и (2.12a).

Используя уравнения (2.9) и выражение

$$(\theta_n)_1(\theta_n)_2 = -\left(\frac{(-\widetilde{m})(c_{12}+c_{66})}{c_{33}c_{44}}\right)^{1/2}(\nabla_s\,\ell)^2$$

для произведения корней квадратного уравнения (2.10), преобразуем (2.14) к виду

$$\frac{\Delta}{(\theta_n)_1 - (\theta_n)_2} = \frac{c_{33}(\nabla_s\,\ell)^2(\vec{\varkappa}_n)_1(\vec{\varkappa}_n)_2}{(c_{13}+c_{44})}\times$$

$$\times\left[-\left(\frac{(-\widetilde{m})}{c_{66}-\widetilde{m}}\right)^{1/2}\frac{(c_{12}+c_{66})c_{33}-c_{13}^2}{\sqrt{(c_{12}+c_{66})c_{33}}} + c_{66}\right]. \tag{2.14a}$$

Здесь $(\theta_n)_1 - (\theta_n)_2 \neq 0$, и очевидно, что Δ равен нулю, если $m = m_0$ – корень выражения в квадратных скобках.

Из (2.14a) находим

$$-\widetilde{m}_0 = c_{66}\frac{Q^2}{1-Q^2}, \quad Q \equiv \frac{\widetilde{q}_1}{1-\widetilde{q}_2}, \tag{2.15a}$$

где

$$\widetilde{q}_1 \equiv \frac{c_{66}}{\sqrt{(c_{12}+c_{66})c_{33}}}, \quad \widetilde{q}_2 \equiv \frac{c_{13}^2}{(c_{12}+c_{66})c_{33}}.$$

Легко видеть, что,

$$Q < 1, \quad \text{т.к.} \quad \widetilde{q}_1 + \widetilde{q}_2 < \frac{c_{13}+c_{66}}{\sqrt{(c_{12}+c_{66})c_{33}}} < 1, \quad \text{см.} \quad (2.12).$$

Следовательно, определитель Δ линейной системы отличен от нуля при $0 < -\widetilde{m} < |\widetilde{m}_0|$, где, согласно (2.15a), $-\widetilde{m}_0 = \alpha_0 c_{66}$, $\alpha_0 = 0(1)$.

Итак, пусть выполнены неравенства (2.12), т.е. $\widetilde{m} \in (-|\widetilde{m}_1|, 0)$, см. выше. Тогда функции $\Phi^1_{1,2}\big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}}$, а следовательно, и $\vec{\mathcal{C}}^1{}_{1,2}\big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}}$ определяются однозначно, если параметр $\widetilde{m}$ принадлежит пересечению интервалов $(-|\widetilde{m}_1|, 0) \cap (-|\widetilde{m}_0|, 0)$.

Коэффициенты $\vec{\mathcal{C}}^1{}_{1,2}$ при $k \geqslant 1$, как очевидно, должны удовлетворять условиям разрешимости неоднородных уравнений (1.8). Так, полагая в (1.8) $k = 2$, мы получим (при любом γ) условие разрешимости этого уравнения

$$\Big(\Big[M_{\theta_{1,2}}(\Phi^1_{1,2}\vec{\varkappa}_{1,2}) + M_{\theta_{1,2}}\vec{U}^{10}_{1,2} + \gamma L(\Phi^0_{1,2}\vec{\varkappa}_{1,2}\Big], \vec{\varkappa}_{1,2}\Big) = 0, \qquad (2.15)$$

которое при $n = 0$, $\gamma = 0$ (в силу $\vec{U}^{10}_{1,2}\big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = 0$) имеет вид

$$\big(M_{\theta_{1,2}}(\Phi^1_{1,2}\vec{\varkappa}_{1,2}), \vec{\varkappa}_{1,2}\big) = 0. \qquad (2.15a)$$

Равенство (2.15a) определяет $\frac{\partial \Phi^1_{1,2}}{\partial n}\big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}}$, т.к. $\Phi^1_{1,2}\big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}}$ и $\vec{\varkappa}_{1,2}\big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}}$ уже известны, а векторы $\frac{\partial \vec{\varkappa}_{1,2}}{\partial n}\Big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}}$ могут быть найдены из (2.9).

Следующие приближения для $\Phi^1_{1,2}$, т.е. коэффициенты разложений этих функций по степеням $n^i\gamma^j$ при $i \geqslant 2$, $j \geqslant 1$, могут быть вычислены рекуррентным образом в результате последовательного дифференцирования по γ равенств (краевых условий) (1.9) и соответственно – по n и γ уравнений (1.8) и (2.9). При этом на каждом шаге по γ при $n = 0$ для $\frac{\partial^{r_0}\Phi^1_{1,2}}{\partial \gamma^{r_0}}\Big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}}$, $r_0 \geqslant 1$, возникает линейная неоднородная система с определителем Δ, см. (2.14), свободные члены которой выражаются через уже найденные на этом шаге значения $\frac{\partial^r \vec{\mathcal{A}}^1}{\partial\gamma^r}$ и $\frac{\partial^r \vec{\mathcal{B}}^1}{\partial\gamma^r}$, $r = 0, 1, \ldots, r_0 + 1$, при $n = 0$, $\gamma = 0$.

Что касается коэффициентов $(\vec{\mathcal{C}}^1{}_{1,2})_{ij}$ из (1.13а), $i,\ j \geqslant 1$, то они в силу (2.8) определяются (на каждом шаге по n и γ) коэффициентами разложений векторов поляризации $\vec{\varkappa}_{1,2}$ и функций $\Phi^1_{1,2}$ по целым степеням n и γ.

3а. Приведем результаты вычислений проекции $\frac{\partial \vec{A}^0}{\partial n}\Big|_{\vec{\zeta}}$, входящей в равенства (2.5а), (2.6а), так же как не найденной пока компоненты $(\frac{\partial \vec{B}^0}{\partial n}, \vec{\zeta})_{\substack{n=0\\ \gamma=0}}$. Дифференцируя по γ 2-е уравнение системы (1.7) при $k = 1$, получим неоднородное линейное уравнение для $\frac{\partial \vec{\mathcal{B}}^1}{\partial\gamma}$, условие разрешимости которого при $n = 0$, $\gamma = 0$ приводится к равенству

$$\big(M_m \vec{A}^0 + M_\ell \vec{B}^0, \vec{\zeta}\big)_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = 0. \tag{2.16}$$

Нетрудно убедиться (ввиду $\vec{B}^0\big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = 0$), что $\big(M_\ell \vec{B}^0, \vec{\zeta}\big)_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = 0$, и из (2.16) находим

$$\Big(\frac{\partial \vec{A}^0}{\partial n}, \vec{\zeta}\Big)_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = \frac{-1}{2m_{10}}\Big[m_{20} + m_{10}\frac{\partial \ln c_{44}}{\partial n}\Big](\vec{A}^0, \vec{\zeta})\Big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}},$$

где $m_{20} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 m}{\partial n^2}\big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}}$, причем вычисление коэффициента m_{20} не представляет труда.

Отметим, что равенство (2.16) определяет $(\frac{\partial \vec{A}^0}{\partial n}, \vec{\zeta})_{\substack{n=0\\ \gamma=0}}$ и в случае изотропной среды.

Для нахождения компоненты $(\frac{\partial \vec{B}^0}{\partial n}, \vec{\zeta})_{\substack{n=0\\ \gamma=0}}$ дифференцируем дважды (по n и γ) первое уравнение системы (1.7) при $k = 1$, что приводит к неоднородному линейному уравнению для $\frac{\partial^2 \vec{\mathcal{A}}^1}{\partial n\partial\gamma}$. Условие разрешимости этого уравнения при $n = 0$, $\gamma = 0$ записывается в виде

$$\Big(\frac{\partial}{\partial n}\vec{\mathcal{F}}^0{}_1 + \vec{R}, \vec{A}^0\Big) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial n}\vec{\mathcal{F}}^0_1 = \frac{\partial}{\partial n}(M_l\, \vec{A}^0) + \Big[\frac{\partial}{\partial n}(N_m\, \vec{B}^0) + \frac{\partial m}{\partial n} M_m\, \vec{B}^0\Big], \tag{2.17}$$

где функция $\vec{R}$ (в силу приведенных выше формул) уже известна. Равенство (2.17) и определяет искомую проекцию $(\frac{\partial \vec{B}^0}{\partial n}, \vec{\zeta})_{\substack{n=0\\ \gamma=0}}$.

Действительно, из (1.12), (1.12a), (2.3a) и равенства $(\vec{B}^0, \vec{\zeta})_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = 0$, во-первых, следует

$$\left(\left[\frac{\partial}{\partial n}(N_m\,\vec{B}^0) + \frac{\partial m}{\partial n}M_m\,\vec{B}^0\right], \vec{A}^0\right)_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = 3m_{10}^2\,c_{44}\varphi^0\left(\frac{\partial \vec{B}^0}{\partial n}, \vec{\zeta}\right)_{\substack{n=0\\ \gamma=0}},$$

а, во-вторых, выражение $\left(\frac{\partial}{\partial n}(M_\ell\,\vec{A}^0), A^0\right)_{\substack{n=0\\ \gamma=0}}$ содержит отличные от нуля слагаемые

$$\left\{2\left[\frac{\partial}{\partial n}\Big(\mu(\nabla_s\ell, \nabla)A^0_{j'}\right](A^0)^{j'} + 2\mu\ell_{20}\varphi^0\left(\frac{\partial \vec{A}^0}{\partial n}, \vec{\zeta}\right)\right\}_{\substack{n=0\\ \gamma=0}}, \quad j' = 1, 2.$$

В заключение приведем выражения для коэффициентов m_{10}, ℓ_{01}, ℓ_{20}, см. [1], входящих в полученные выше (§§1, 2) формулы и равенства:

$$m_{10} = \frac{\partial m}{\partial n}\bigg|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = -\left(\frac{2(\ell_{00})_t^2}{c_{44}/\rho R_э}\right)^{1/3}_{n=0},$$

$$l_{01} = \frac{\partial \ell}{\partial \gamma}\bigg|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = \frac{-1}{(-l_{00})_t}\int\limits_{\mathcal{M}_0}^{\mathcal{M}}\left(\frac{c_{44}}{\rho}\right)_{n=0}\frac{m_{10}^2}{2}\,ds, \quad ds = dt,$$

$$2\ell_{20} = \frac{\partial^2 \ell}{\partial n^2}\bigg|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = -\left[\frac{1}{c_{44}m_{10}}\rho(-\ell_{00})_t\right]_{n=0}\cdot\frac{dm_{10}}{dt},$$

где $\frac{2}{R_э} = \left(\frac{\partial}{\partial n}\ln\frac{c_{66}}{\rho}\right)_{n=0} > 0$, $R_э$ – эффективный радиус кривизны в том случае, когда граница среды – плоскость, ср. [2]; $\frac{dm_{10}}{dt}$ – производная, так же как и интеграл, вычисляется вдоль ПВ луча.

Приложение.

1. Обратимся к равенству, см. (1.27)

$$\left(2N_{\ell m}\vec{A}^0, \vec{A}^0\right) = m\left(2N_{\ell m}\vec{B}^0, \vec{B}^0\right)$$

и тем выводам, которые из него следуют. Пусть точка $M \in \Sigma$, т.е. $n = 0$. Используя (1.18), преобразуем это выражение к виду

$$(\ell_3)_{n=0}\left[\left(c_{44}|\vec{A}^0{}_s|^2 + c_{33}(A_n^0)^2\right) + \gamma\left(c_{44}|\vec{B}^0|^2 + c_{33}(B_n^0)^2\right)\right]_{n=0} =$$

$$= \left\{(c_{13} + c_{44})\left[A_n^0(\vec{A}^0\nabla_s\,\ell) + \gamma B_n^0(\vec{B}^0\nabla_s\,\ell)\right]\right\}_{n=0}. \qquad (1)$$

Дифференцируя это выражение j раз по γ, в силу специфики его правой части, получим

$$\frac{\partial^j \ell_3}{\partial \gamma^j} = \sum_{r=0}^{j-1} b^j_{sr}\, X^r_s, \quad s = 1, 2, 3, 4, \tag{2}$$

где обозначено

$$X^j_1 \equiv \frac{\partial^j (\vec{A}^0 \nabla_s \ell)}{\partial \gamma^j}, \quad X^j_2 \equiv \frac{\partial^j A^0_n}{\partial \gamma^j},$$

$$X^j_3 \equiv \frac{\partial^j (\vec{B}^0 \nabla_s \ell)}{\partial \gamma^j}, \quad X^j_4 \equiv \frac{\partial^j B^0_n}{\partial \gamma^j}.$$

Коэффициенты b^j_{sr} в (2), зависящие от $\vec{A}^0$, $\vec{B}^0$, X^r_s, $r = 1, 2, \ldots, j$, являются гладкими функциями, так как согласно (1.13) коэффициенты $\vec{A}^0$, $\vec{B}^0$ ($\vec{A}^0 \not\equiv 0$) предполагаются гладкими и, вообще говоря, бесконечно дифференцируемыми функциями параметра γ. Из (1), (2), в силу полученных в §1 равенств (1.17), (1.20), (1.24), сразу следует, что $\frac{\partial \ell_3}{\partial \gamma}\Big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = 0$.

С целью пояснения полученных результатов приведем здесь конкретный вид оператора N_ξ из (1.12) для трансверсально-изотропной среды. Имеем, см. [1]

$$\begin{aligned} N_\xi \vec{D} \equiv{}& (c_{12} + c_{66})(\vec{D}\nabla\xi)\nabla\xi + (c_{66}(\nabla\xi)^2 - \rho\xi_t^2)\vec{D}_s + \\ &+ \bigl(c_{44}(\nabla\xi)^2 - \rho\xi_t^2\bigr) D_n \vec{n} - \Big\{ \Big[\xi_3(\tilde{m} + \tilde{\ell}) D_n \nabla_s \xi + \xi_3^2 \tilde{m} \vec{D}_s\Big] + \\ &+ \Big[\xi_3(\tilde{m} + \tilde{\ell})(\vec{D}_s \nabla\xi) + \xi_3^2(\tilde{p} - \tilde{m}) D_n\Big]\, \vec{n} \Big\}. \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь обозначено, см. [5]

$$\tilde{m} = c_{66} - c_{44}, \quad \tilde{\ell} = c_{12} - c_{13}, \quad -\tilde{p} = c_{33} - (c_{12} + 2c_{66})$$

и кроме того, $\vec{D} = \vec{D}_s + \vec{n}\, D_n$, $\nabla\xi = \nabla_s \xi + \vec{n}\, \xi_3$, $\xi_3 = \frac{\partial \xi}{\partial n}$.

2. Рассмотрим однородную систему для $\vec{A}^0$, $\vec{B}^0$, которая следует из (1.7) при $k = 0$. Полагая $n = 0$, дифференцируем уравнения этой системы последовательно j раз по γ и затем проецируем полученные равенства на $\nabla_s \ell$ и $\vec{n}$. На каждом шаге этой процедуры получим систему 4-х (нелинейных) уравнений для введенных выше переменных X^j_r, $r = 1, 2, 3, 4$.

Итак, учитывая (3), (1.12), будем иметь

$$a_{sr}\, X_r^j = f_s^{j-1}, \quad r, s = 1, 2, 3, 4, \tag{4}$$

причем правым частям этих равенств вследствие (2) можно придать вид

$$f_s^{j-1} = \sum_{i=0}^{j-1} d_{sr}\, X_r^i, \quad |d_{sr}| < \mathrm{const}\,. \tag{5}$$

Отличные от нуля элементы матрицы (a_{rs}) при $n = 0, \gamma = 0$ имеют следующие значения:

$$a_{11} = a_{33} = (c_{12} + 2c_{66})(\nabla_s\, \ell)^2 - \rho\ell_t^2,$$
$$a_{22} = a_{44} = c_{44}(\nabla_s\, \ell)^2 - \rho\ell_t^2,$$
$$a_{32} = m_{10}(\nabla_s\, \ell)^2(c_{13} + c_{44}), \quad a_{41} = m_{10}^2(c_{13} + c_{44}).$$

Определитель системы (4) при $n = 0$, $\gamma = 0$ равен

$$\widetilde{D} = \left\{\left[(c_{12} + 2c_{66})(\nabla_s\, \ell)^2 - \rho\ell_t^2\right]\left(c_{44}(\nabla_s\, \ell)^2) - \rho\ell_t^2\right)\right\}^2_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} =$$
$$= \left[\tilde{m}(c_{12} + c_{66})(\nabla_s\, \ell)^4)\right]^2_{\substack{n=0\\ \gamma=0}},$$

где учтено уравнение (1.22). Следовательно, $\widetilde{D}\big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}}$ отличен от нуля, если $\tilde{m} \neq 0$ ($c_{44} \neq c_{66}$), что и будем предполагать.

Итак, при $j = 1$ имеем $\frac{\partial \ell_3}{\partial \gamma}\big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = 0$ (см. выше), и из (4) сразу следует, что $X_r^1\big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = 0$. Далее, на каждом шаге $j = j_0$, $j_0 \geqslant 2$, рекуррентного процесса по уже найденным значениям $X_r^i\big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = 0$, $i = 1, 2, \ldots, j_0 - 1$, определяется $\frac{\partial^{j_0} \ell_3}{\partial \gamma^{j_0}}\big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = 0$, и из однородной системы – таковой при $n = 0$, $\gamma = 0$ оказывается (4), находим $X_r^{j_0}\big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = 0$. Таким образом, получаем равенства*)

$$\left(\vec{A}^0 \nabla_s\, \ell\right)_{n=0} = 0, \quad \left(\vec{B}^0 \nabla_s\, \ell\right)_{n=0} = 0,$$
$$A_n^0\big|_{n=0} = 0, \quad B_n^0\big|_{n=0} = 0, \quad \ell_3\big|_{n=0} = 0, \tag{5}$$

справедливые при любом γ.

*) К равенствам (5) можно придти, рассматривая вместо (4) при $n = 0$ и $\gamma \neq 0$ однородную систему $\widetilde{a}_{rs}\, X_s^0 = 0$ для проекций векторов $\vec{A}^0$, $\vec{B}^0$ на $\nabla_s \ell$ и $\vec{n}$, где элементы матрицы $(\widetilde{a}_{rs})$ совпадают с элементами a_{rs} из (4) с точностью до величины $O(\gamma + |\ell_3|)$.

3. Докажем справедливость приведенного в статье равенства (1.25а), которое обеспечивает выполнение краевых условий (1.9).

Рассмотрим первое уравнение системы (1.7) совместно с уравнением (2.9). При $n = 0$, $\gamma = 0$ в соответствии с исходной постановкой задачи (1.3) имеем

$$a_{ij\alpha\beta}\ell^i\ell^\alpha(A^0)^\beta = \rho\ell_t^2(A^0)_j, \tag{6}$$

$$a_{ij\alpha\beta}\theta^i\theta^\alpha\varkappa^\beta = \rho\ell_t^2\varkappa_j, \tag{7}$$

где под $\vec{\varkappa}$ и θ подразумеваем $\varkappa_{1,2}$, $\theta_{1,2}$.

Выбирая в качестве исходного, например, уравнение (7), умножим его (скалярно) на $\vec{A}^0$ и учтем свойства симметрии тензора $a_{ij\alpha\beta}$

$$a_{ij\alpha\beta} = a_{\alpha\beta ij} = a_{ji\alpha\beta}. \tag{8}$$

Соответствующе выкладки дают:

$$a_{ij\alpha\beta}(A^0)^j\theta^i\theta^\alpha\varkappa^\beta = \theta_3 a_{3j\alpha\beta}(A^0)^j\theta^\alpha\varkappa^\beta + a_{i'j\alpha\beta}(A^0)^j\theta^\alpha\ell^{i'}\varkappa^\beta =$$

$$= (\theta_3 - \ell_3)a_{3j\alpha\beta}(A^0)^j\theta^\alpha\varkappa^\beta + (\theta_3 - \ell_3)a_{ij3\beta}(A^0)^j\ell^i\varkappa^\beta + \rho\ell_t^2(\vec{A}^0, \vec{\varkappa}),$$

$$\theta_3 = \frac{\partial\theta}{\partial n}, \quad \ell_3 = \frac{\partial\ell}{\partial n}, \quad i' = 1, 2, \tag{9}$$

При выводе (9) мы использовали уравнение (6). Окончательно в силу (8) при $\frac{\partial\theta_{1,2}}{\partial n} \neq \frac{\partial\ell}{\partial n}$, см. §2, получаем

$$(a_{3j\alpha\beta}\theta_{1,2}^\alpha\varkappa_{1,2}^\beta)(A^0)^j = -\left(a_{3j\alpha\beta}\ell^\alpha(A^0)^\beta\right)\varkappa_{1,2}^j,$$

что и требовалось доказать.

Литература

1. З. А. Янсон, *Волны Лява типа SH в неоднородной трансверсально-изотропной упругой среде.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **239** (1997), 243–262.
2. В. М. Бабич, З. А. Янсон, *О распространении волн Лява вдоль поверхности упругого тела произвольной формы.* — Изв. АН СССР. Сер. Физика Земли **No. 5** (1985), 17–27.
3. Н. Я. Кирпичникова, *Равномерная асимптотика собственных функций типа шепчущей галереи.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **89** (1979), 112–119.
4. В. М. Бабич, *О пространственно-временном лучевом методе в теории упругих волн.* — Изв. АН СССР. Сер. Физика Земли **No. 2** (1979), 3–13.
5. Г. И. Петрашень, *Распространение волн в анизотропных упругих средах.* Наука, Л. (1980).
6. Ф. И. Федоров, *Теория упругих волн в кристаллах.* Наука, М. (1965).

Yanson Z. A. High order asymptotic approximations for surface Love waves of SH type in transversely isotropic media.

Uniform asymptotics of the surface Love waves for the case of transverse isotropy of an elastic medium (being a special type of anisotropy) is obtained. The waves under investigation are similar to the SH Love waves well known from the isotropic theory of elasticity. The separate Love mode is represented as a sum of a space time (ST) caustic expansion (for a surface wave with a real eikonal), and two correction terms being the ST ray solutions with complex eikonals (inhomogeneous waves). Due to the specific structure of the elasticity tensor in a transversely isotropic medium, the boundary surface is necessarily a plane. The recursion process involved in the computation of higher terms of the asymptotic expansion allows one to see the transition of the relations obtained into the known ray solutions for isotropic media. Two inhomogeneous waves manifest itself in high-order terms of the asymptotics of the surface waves. The validity of the asymptotic formulas obtained is justified by the relations found for the elasticity parameters of the transversely isotropic medium, which ensure the existence of SH Love waves in the medium.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 15 ноября 1998 г.