Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 259, 1999 г.

А. А. Архипова, О. А. Ладыженская

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ЛЕММЫ ГЕРИНГА

Лемма Геринга [1] и ее многочисленные варианты нашли важное применение в теории нелинейных уравнений и систем (см., например, [2–5]). Различные варианты этой леммы позволяют доказать повышение степени интегрируемости производных обобщенных решений нелинейных краевых задач. Так, например, оказалось, что производные решений начально-краевых задач для параболических систем уравнений удовлетворяют обратным неравенствам Гельдера в параболических цилиндрах, причем в качестве дополнительных слагаемых в эти неравенства могут входить интегралы от функций из анизотропных пространств и интегралы по многообразиям меньших размерностей (по части боковой поверхности или основания параболического цилиндра). В работе [6] доказан вариант леммы Геринга, позволяющий включать в обратные неравенства описанные выше дополнительные слагаемые.

В то же время при изучении нестационарной задачи о неоднородной несжимаемой жидкости [7] полезным оказался новый вариант леммы Геринга, не рассмотренный ранее в литературе. Соответствующий результат сформулирован в работе [7] и к нему даны краткие пояснения. В данной заметке мы приводим подробное доказательство этого результата (лемма 1), используя обозначения и метод рассуждения близкий работе [6].

Предлагаемая модификация леммы Геринга доказывается здесь для функций, удовлетворяющих обратным неравенствам Гельдера в *параболических* цилиндрах. Аналогичный результат верен и для случая, когда интегрирование проводится не по параболическим цилиндрам, а по шарам в $\mathbb{R}^n$. В конце работы мы формулируем соответствующий результат (лемма 2), он доказывается фактически так же, как лемма 1 и более просто. Такое

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (РФФИ, гранты No. 96-01-00087 и No. 99-01-00108) и Федеральной программой "Научные школы" (грант No. 96-15-96121).

утверждение полезно для исследования эллиптических краевых задач.

Введем следующие обозначения:

$B_R(x^0)$ – шар в $\mathbb{R}^n$ радиуса R с центром в точке x^0,

$z=(x,t)$, $x\in\mathbb{R}^n$, $t\in\mathbb{R}^1$,

$Q_R(z^0)=\{z\in\mathbb{R}^{n+1}: x\in B_R(x^0), t\in(t^0-R^2,t^0+R^2)\}$ – параболический цилиндр радиуса R с центром в точке z^0,

$Q_R^-(z^0)=\{z\in\mathbb{R}^{n+1}: x\in B_R(x^0), t\in(t^0-R^2,t^0)\}$, $\delta(z^1,z^2)=\max\{|x^1-x^2|,|t^1-t^2|^{\frac{1}{2}}\}$ – параболическое расстояние в R^{n+1},

$\mathbb{P}_a^-=\{z\in\mathbb{R}^{n+1}: |x_i|<a,\ i=1,\dots,n, t\in(-a^2,0)\}$ – параболический полукуб с параболической границей $\partial'\mathbb{P}_a^-$,

$|A|_k=\operatorname{meas}_k A$ – мера Лебега множества A размерности k,

$|Q_R|=\operatorname{meas}_{n+1}Q_R=2\omega_n R^{n+2}$, $\omega_n=|B_1(0)|_n$,

$$\fint_{Q_R} v dz=\frac{1}{|Q_R|}\int_{Q_R} v\,dz,$$

пишем $\|\cdot\|_{m,Q}$ вместо $\|\cdot\|_{L_m(Q)}$.

В работе [7] сформулирован следующий результат.

Лемма 1 (лемма 2.2 [7]). *Пусть $\mathbb{P}=\mathbb{P}_a^-$ с каким-либо $a>1$ и для неотрицательных функций $\in L_l(\mathbb{P})$, $l>1$, $f\in L_m(\mathbb{P})$, $m>l$, и $\psi\in L_1(\mathbb{P})$, для почти всех $z^0\in\mathbb{P}$ верны неравенства*

$$\fint_{Q_R^-(z^0)} g^l\,dz\leqslant\theta\fint_{Q_{bR}^-(z^0)} g^l\,dz+\mathbb{B}\Big(\fint_{Q_{bR}^-(z^0)} g\,dz\Big)^l+\fint_{Q_{bR}^-(z^0)} f^l\,dz+ \tag{1}$$

$$+(bR)^\beta\fint_{Q_{bR}^-(z^0)}\psi\,dz,\quad\forall\,R<\frac{1}{b}\min\left\{\delta(z^0,\partial'\mathbb{P}),R_1\right\},$$

с некоторыми параметрами $R_1>0$, $\theta\geqslant0$, $\mathbb{B}>1$, $b\geqslant2$, $\beta>0$. Существуют числа ε и $\theta_0=\theta_0(l,b)\in(0,1)$ такие, что если в неравенствах (1) $\theta\leqslant\theta_0$, тогда

$$g\in L_s(\widetilde{\mathbb{P}}),\quad\forall\,\widetilde{\mathbb{P}}\subset\mathbb{P},\quad\delta(\widetilde{\mathbb{P}},\partial'\mathbb{P})>0,\quad s\in[\,l,l+\varepsilon\,),$$

и
$$\|g\|_{s,\widetilde{\mathbb{P}}} \leqslant c\left\{ \|g\|_{l,\mathbb{P}} + \|f\|_{s,\mathbb{P}} + \|\psi\|_{1,\mathbb{P}}^{\frac{1}{l}} \right\}. \qquad (2)$$

Постоянные c и ε зависят от n, l, m, a, b, $\mathbb{B}$, β, постоянная c также зависит от $\delta(\widetilde{\mathbb{P}}, \partial'\,\mathbb{P})^{-1}$, $\varepsilon \leqslant \min\left\{m - l, \dfrac{\beta l}{n+2}\right\}$.

В случае, когда $\psi \equiv 0$, эта лемма представляет хорошо известный результат (см. [6, 9], подробное доказательство в [10]). Существенно новым моментом является тот факт, что относительно функции ψ известна только принадлежность пространству $L_1(\mathbb{P})$. Согласно известным результатам, этого предположения недостаточно, чтобы утверждать о повышении степени интегрируемости исследуемой функции g, но оказалось, что наличие перед интегралом $\displaystyle\fint_{Q_{bR}} \psi\, dz$ в неравенстве (1) множителя R^β с показателем $\beta > 0$ гарантирует справедливость утверждения леммы 1.

Чтобы не загромождать доказательство леммы 1, проведем его для случая $\theta = 0$, $f = 0$, $\psi \neq 0$. Кроме того, удобно считать, что функции g и ψ определены не в $\mathbb{P}_a^-$, а в “стандартном” параллелепипеде
$$Q^- = \left\{ z \in \mathbb{R}^{n+1} : |x_i| < \frac{3}{2},\ i = 1, \ldots, n,\ -\frac{5}{4} < t < 0 \right\}.$$

Ясно, что такой переход элементарно осуществляется, если в $\mathbb{R}^{n+1}$ ввести координаты $(x_1', \ldots x_n', t')$, где $x_i' = x_i \dfrac{3}{2a}$, $t' = t\dfrac{5}{4a^2}$.

Таким образом, будем считать, что для функций $g \in L_l(Q^-)$ и $\psi \in L_1(Q^-)$ имеют место неравенства
$$\fint_{Q_R^-(z^0)} g^l\, dz \leqslant \mathbb{B}\Bigg(\fint_{Q_{bR}^-(z^0)} g\, dz \Bigg)^l + (bR)^\beta \fint_{Q_{bR}^-(z^0)} \psi\, dz,$$
$$\forall\, R < \frac{1}{b} \min\left\{ \delta(z^0, \partial' Q), R_1 \right\}. \qquad (3)$$

Покажем, что тогда $g \in L_s(\widetilde{Q})$, $\forall\, \widetilde{Q} \subset Q^-$, $\delta(\widetilde{Q}, \partial' Q^-) > 0$, $s \in [\,l, l + \varepsilon\,)$, $\varepsilon \leqslant \dfrac{\beta l}{n+2}$, и верна оценка
$$\|g\|_{s,\widetilde{Q}} \leqslant c\left\{ \|g\|_{l,Q^-} + \|\psi\|_{1,Q^-}^{\frac{1}{l}} \right\}. \qquad (4)$$

Прежде всего, продолжим функции g и ψ как четные функции из Q^- на множество

$$Q = \left\{ z \in \mathbb{R}^{n+1} : |x_i| < \frac{3}{2},\ i = 1, \ldots, n,\ |t| < \frac{5}{4} \right\}.$$

Продолженные функции, за которыми сохранены обозначения g и ψ, удовлетворяют неравенствам вида (3) в полных цилиндрах $Q_R(z^0)$. Точнее, существуют числа $b_1 > b$ и $c_1 = c_1(l, b) > 1$ такие, что для почти всех $z^0 \in Q$ справедливы неравенства

$$\fint\limits_{Q_R(z^0)} g^l\, dz \leqslant \mathbb{B}_1 \Bigg(\fint\limits_{Q_{b_1 R}(z^0)} g\, dz \Bigg)^l + (b_1 R)^\beta \fint\limits_{Q_{b_1 R}(z^0)} \psi_1\, dz,$$

$$\forall\, R < \frac{1}{b_1} \min \left\{ \delta(z^0, \partial Q), R_1 \right\}, \tag{5}$$

где $\mathbb{B}_1 = c_1 \mathbb{B},\ \psi_1(z) = c_1 \psi(z)$.

Неравенства (5) нормируем следующим образом:

для $M = \|g\|_{l,Q} + \|\psi_1\|_{1,Q}^{\frac{1}{l}}$ положим

$$G = \frac{g}{M}, \quad \Psi = \frac{\psi_1}{M^l}.$$

Для функций G и Ψ

$$\max \{ \|G\|_{l,Q},\ \|\Psi\|_{1,Q} \} \leqslant 1,$$

и справедливы неравенства

$$\fint\limits_{Q_R(z^0)} G^l\, dz \leqslant \mathbb{B}_1 \Bigg(\fint\limits_{Q_{b_1 R}(z^0)} G\, dz \Bigg)^l + (b_1 R)^\beta \fint\limits_{Q_{b_1 R}(z^0)} \Psi\, dz \tag{6}$$

для почти всех $z^0 \in Q$ и $R < \frac{1}{b_1} \min \left\{ \delta(z^0, \partial Q), R_1 \right\}$.

Определим функцию $G_0 = G \zeta^{\frac{1}{l}}$, где $\zeta(z) = \delta(z, \partial Q)^{n+2}$, и положим

$$h(\tau) = \int\limits_{E(G_0, \tau)} G_0(z)\, dz,$$

где

$$E(\Phi, \tau) = \{ z \in Q : \Phi(z) > \tau \}.$$

Для $h(\tau)$ несколько ниже мы выведем неравенства

$$-\int\limits_{\tau}^{\infty} \zeta^{l-1} dh(\zeta) \leqslant c_0 \left[\tau^{l-1} h(\tau) + H(\tau) \right], \quad \forall \tau \geqslant \tau_0 > 0, \tag{7}$$

где $l > 1$, $H(\tau) = \|\Psi\|_{1,Q} \cdot \tau^{-\frac{\beta l}{n+2}}$, c_0 и τ_0 определяются параметрами неравенства (6).

Заметим, что функции $h(\tau)$ и $H(\tau) : [\tau_0, \infty) \to [0, \infty)$ не убывают и стремятся к нулю при $\tau \to +\infty$.

Согласно лемме об интеграле Стильтьеса ([1], см. также [8], гл. V, лемма 1.2), из неравенств (7) с $l = \alpha + 1$ следует, что

$$\begin{gathered} -\int\limits_{\tau_0}^{\infty} \tau^{\gamma} dh(\tau) \leqslant \frac{\alpha}{c_0 \alpha - (c_0 - 1)\gamma} \left(-\int\limits_{\tau_0}^{\infty} \tau^{\alpha} dh(\tau) \right) - \\ - \frac{c_0 \gamma}{c_0 \alpha - (c_0 - 1)\gamma} \int\limits_{\tau_0}^{\infty} \tau^{\gamma - \alpha} dH(\tau), \quad \gamma \in \left[\alpha, \frac{c_0 \alpha}{c_0 - 1} \right). \end{gathered} \tag{8}$$

Принимая во внимание равенство

$$\int\limits_{E(G_0,\tau)} G_0^s(z)\, dz = -\int\limits_{\tau}^{\infty} \zeta^{s-1} dh(\zeta), \quad \forall s > 1, \tag{9}$$

из (8) выводим, что $G_0 \in L_s(Q)$ для некоторого $s > l$ ($s = \gamma + 1, l = \alpha + 1$), и верна оценка

$$\left\| G_0 \right\|_{s,Q}^{s} \leqslant c_1 \left\{ \left\| G_0 \right\|_{l,Q}^{l} + \|\Psi\|_{1,Q} \right\} \tag{10}$$

с постоянной c_1, зависящей от l, s, c_0, τ_0.

Заметим, что из ограничения $\gamma < \frac{c_0 \alpha}{c_0 - 1}$ в неравенстве (8) следует, что $s < l + \frac{l-1}{c_0 - 1}$. Кроме того, для сходимости интеграла с $H(\tau)$ в неравенстве (8) нужно потребовать, чтобы $s < l + \frac{\beta l}{n+2}$.

Вспоминая теперь, что $G_0 = G \zeta^{\frac{1}{l}}$, где $\zeta(z) = \delta^{n+2}(z, \partial Q)$, а также определение функций G и Ψ, из (10) выводим оценку (4) с постоянной c, зависящей как от параметров задачи, так и от расстояния $\delta(\widetilde{Q}, \partial' Q^-)$.

Таким образом, осталось доказать справедливость неравенства (7).

Далее нам понадобится следующее утверждение.

Утверждение. *Пусть* $v \in L_1(Q_0)$, $v \geqslant 0$ *в* Q_0, Q_0 *– какой-либо параболический куб в* $\mathbb{R}^{n+1}$,

$$\fint_{Q_0} v\,dz \leqslant \alpha,$$

где $\alpha > 0$ *– фиксированное число. Существует последовательность параболических кубов* $\{Q_i\}$, $i \geqslant 1$, *со сторонами, параллельными осям координат и непересекающимися внутренностями, такие, что*

$$\alpha < \fint_{Q_j} v\,dz \leqslant 2^{n+2}\alpha,$$

$v(z) \leqslant \alpha$ *почти везде в* $Q_0 \setminus \bigcup\limits_{j\geqslant 1} Q_j$.

Это утверждение является вариантом леммы Кальдерона–Зигмунда с заменой евклидовых кубов Q_i параболическими кубами (см., например, [10], утверждение 3.1).

Положим далее

$$\mathbb{C}_0 = \left\{ z \in Q : |x_i| < \frac{1}{2},\ i = 1, \dots, n,\ |t| < \frac{1}{4} \right\},$$

$$\mathbb{C}_k = \left\{ z \in Q : 2^{-k} < \delta(z, \partial Q) \leqslant 2^{-k+1} \right\}, \quad k \in N.$$

Очевидно, что $\bigcup\limits_{k\geqslant 0} \mathbb{C}_k = Q$.

Множество $\mathbb{C}_k$ есть объединение конечного числа параболических кубов $\mathbb{P}^{(k)}$ со стороной $a_k = \delta(\mathbb{C}_k, \partial Q) = 2^{-k}$, $|\mathbb{P}^{(k)}| = 2^{-k(n+2)}$.

Зафиксируем $m_0 \in N$ такое, что $\frac{b_1\sqrt{n}}{2^{m_0}} < \min\left\{\frac{1}{2}, R_1\right\}$, b_1 и R_1 – из неравенства (6). Рассмотрим все параболические кубы $D^{(k)}$ со стороной $d^{(k)} = \frac{a_k}{2^{m_0}}$, полученные дроблением кубов $\mathbb{P}^{(k)}$, $|D^{(k)}| = 2^{-(m_0+k)(n+2)}$.

При фиксированном m_0 на множестве $\mathbb{C}_{k-1} \cup \mathbb{C}_k \cup \mathbb{C}_{k+1}$ функция $\zeta(z) = \delta^{n+2}(z, \partial Q)$ эквивалентна $|D^{(k)}|$. Для функции $G_0 = G\zeta^{\frac{1}{l}}$

имеем оценку

$$\Bigg(\fint_{D^{(k)}} G_0^l\,dz\Bigg)^{\frac{1}{l}} \leqslant c(n,m_0)\big\|G\big\|_{l,Q} \leqslant c(n,m_0) \equiv \tau_0, \quad \tau_0 \geqslant 1.$$

Таким образом, для любого параболического куба $D^{(k)} \subset \mathbb{C}_k$ выполняется оценка

$$\fint_{D^{(k)}} G_0^l\,dz \leqslant \tau_0^l.$$

Зафиксируем $\tau > \tau_0$ и $\sigma = \lambda\tau$, параметр $\lambda > 1$ будет выбран далее. Полагая в условиях утверждения $Q_0 = D^{(k)}$, $v = G_0^l$, $\alpha = \sigma^l$, получаем, что существует последовательность параболических кубов $\{Q_j^k\}_{j\in N}$ в $D^{(k)}$ таких, что

$$G_0(z) \leqslant \sigma \quad \text{почти везде в} \quad D^{(k)} \setminus \bigcup_j Q_j^k, \tag{11}$$

$$\sigma^l < \fint_{Q_j^k} G_0^l(z)\,dz \leqslant 2^{n+2}\,\sigma^l. \tag{12}$$

Так как $\mathbb{C}_k$ есть объединение конечного числа кубов $D^{(k)}$, то существует последовательность параболических кубов, которую будем попрежнему обозначать $\{Q_j^k\}_{j\in N}$, такая, что $G_0(z) \leqslant \sigma$ почти везде в $\mathbb{C}_k \setminus \bigcup\limits_j Q_j^k$, и справедлива оценка (12).

Теперь можно утверждать, что

$$\int\limits_{E(G_0,\sigma)} G_0^l\,dz \leqslant \sum_{k,j}\int\limits_{Q_j^k} G_0^l(z)\,dz \overset{(12)}{\leqslant} 2^{n+2}\,\sigma^l \sum_{k,j}|Q_j^k|. \tag{13}$$

Чтобы оценить $\sum_{k,j}|Q_j^k|$, зафиксируем произвольную точку $z^0 \in Q_j^k$ и рассмотрим параболический цилиндр $Q_{r_0} \supset Q_j^k$, $r_0 \leqslant \sqrt{n}\,a_j^k \leqslant \frac{\sqrt{n}}{2^{k+m_0}}$, где a_j^k – сторона куба Q_j^k. Число m_0 ранее выбрано так, чтобы

$$b_1\,r_0 \leqslant \tfrac{b_1\sqrt{n}}{2^{k+m_0}} < \min\Big\{\tfrac{1}{2^{k+1}}, R_1\Big\}. \tag{14}$$

Цилиндр $Q_{b_1 r_0}(z^0)$ может пересекаться только с множествами $\mathbb{C}_{k-1}$, $\mathbb{C}_k$, $\mathbb{C}_{k+1}$. Кроме того, в $Q_{b_1 r_0}(z^0)$ функция $\zeta(z)$ эквивалентна $|D^{(k)}|$.

С помощью левого неравенства (12) выводим

$$\sigma^l < \fint_{Q_j^k} G_0^l(z)\,dz \leqslant c(n) \fint_{Q_{r_0}(z^0)} G_0^l(z)\,dz \leqslant$$

$$\leqslant c_1(n)|D^{(k)}| \fint_{Q_{r_0}(z^0)} G^l\,dz. \tag{15}$$

Считая, что для рассматриваемой точки z^0 верна оценка (6), из (15) и (6) с $R = r_0$ получаем неравенство

$$\sigma^l < c_2|D^{(k)}|\left\{\mathbb{B}_1\left(\fint_{Q_{b_1 R}(z^0)} G\,dz\right)^l + (b_1\,r_0)^\beta \fint_{Q_{b_1 r_0}(z^0)} \Psi\,dz\right\},$$

откуда следует, что при

$$r = b_1 r_0 < \min\left\{\frac{1}{2^{k+1}}, R_1\right\}$$

$$\sigma < c_3\left\{\fint_{Q_r(z^0)} G_0\,dz + r^{\frac{\beta}{l}}\left(\fint_{Q_r(z^0)} \Psi_0\,dz\right)^{\frac{1}{l}}\right\}, \tag{16}$$

где $\Psi_0(z) = \Psi(z)\zeta(z)$.

Пусть

$$E_r(\tau) = \left\{z \in Q_r(z^0) : G_0(z) > \tau\right\},$$

тогда из (16) следует, что

$$\sigma|Q_r| < c_3\left\{\int_{E_r(\tau)} G_0\,dz + \tau|Q_r| + r^{\frac{\beta}{l}}|Q_r|^{1-\frac{1}{l}}\left(\int_{Q_r(z^0)} \Psi_0\,dz\right)^{\frac{1}{l}}\right\}. \tag{17}$$

Слагаемое с функцией Ψ_0 в неравенстве (17) оценим с помощью неравенства Коши следующим образом:

$$r^{\frac{\beta}{l}}|Q_r|^{\frac{l-1}{l}}\left(\int_{Q_r} \Psi_0\,dz\right)^{\frac{1}{l}} = (|Q_r|\tau)^{\frac{l-1}{l}} \cdot r^{\frac{\beta}{l}}\tau^{-\frac{l-1}{l}}\left(\int_{Q_r)} \Psi_0\,dz\right)^{\frac{1}{l}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{l-1}{l}|Q_r|\tau + \frac{r^\beta}{l\tau^{l-1}} \int\limits_{Q_r} \Psi_0\, dz.$$

Далее будем считать, что $\lambda > 2c_3$. Тогда из оценки (17) выводится неравенство

$$(\lambda - 2c_3)\tau|Q_r| < c_3\Bigg\{ \int\limits_{E_r(\tau)} G_0\, dz + \frac{r^\beta}{\tau^{l-1}} \int\limits_{Q_r(z^0)} \Psi_0\, dz \Bigg\}. \qquad (18)$$

Кроме того, из неравенства (16) можно вывести оценку

$$r \leqslant \frac{c_5}{\tau^{\frac{l}{n+2}}}. \qquad (19)$$

Действительно, неравенство (16) можно переписать следующим образом:

$$\lambda\tau|Q_r| \leqslant c_3\Bigg\{ \int\limits_{Q_r(z^0)} G_0\, dz + r^{\frac{\beta}{l}}|Q_r|^{1-\frac{1}{l}} \Bigg(\int\limits_{Q_r(z^0)} \Psi_0\, dz \Bigg)^{\frac{1}{l}} \Bigg\}.$$

Так как

$$\max\{\, \|G\|_{l,Q},\ \|\Psi\|_{1,Q}\} \leqslant 1, \quad \max_{z\in Q} \delta(z, \partial Q) = \frac{3}{2},$$

то из последнего неравенства получаем, что

$$\tau|Q_r|^{\frac{1}{l}} \leqslant c \left\{ \|G\|_{l,Q} + \|\Psi\|_{1,Q}^{\frac{1}{l}} \right\} = c, \qquad (20)$$

где постоянная c зависит от λ и c_3.

Из (20) очевидно следует оценка (19) с постоянной c_5, не зависящей от расположения цилиндра $Q_r(z^0)$ в Q.

Оценивая r^β в неравенстве (18) согласно соотношению (19), выводим, что

$$|Q_r| \leqslant c_6\Bigg\{ \frac{1}{\tau} \int\limits_{E_r(\tau)} G_0(z)\, dz + \frac{1}{\tau^{l+\frac{\beta l}{n+2}}} \int\limits_{Q_r(z^0)} \Psi_0(z)\, dz \Bigg\}. \qquad (21)$$

Обозначим множество всех $z^0 \in Q_j^k$, для которых верна оценка (7), а значит и (21), через $\widehat{Q_j^k}$. Очевидно, что $|Q_j^k| = |\widehat{Q_j^k}|$. Положим $A = \bigcup\limits_{k,j} \widehat{Q_j^k}$ и $T = \bigcup\limits_{z^0\in A} Q_r(z^0)$, где $Q_r(z^0)$ – параболический цилиндр, для которого верна оценка (21). Согласно теореме о покрытиях типа Безиковича–Гусмана (см. [11], гл. I, §1, теорема 1.1 и замечание 5, или [10], лемма 4.1), из $\{Q_r(z)\}_{z\in A}$ можно выбрать последовательность *непересекающихся* параболических цилиндров $\{Q_{r_i}(z^i)\}_{i\geqslant 1}$ такую, что

$$|A|_{n+1}\leqslant c(n)\sum_i |Q_{r_i}(z^i)|.$$

Следовательно,

$$\sum_{k,j}|Q_j^k|\leqslant c(n)\sum_i |Q_{r_i}(z^i)|.$$

Так как для каждого $Q_{r_i}(z^i)$ верна оценка (21), то

$$\sum_i |Q_{r_i}(z^i)|\leqslant c_6\biggl\{\frac{1}{\tau}\int\limits_{E(G_0,\tau)} G_0(z)\,dz+\frac{1}{\tau^{l+\frac{\beta l}{n+2}}}\int\limits_Q \Psi_0(z)\,dz\biggr\}.$$

Возвращаясь к оценке (13), получаем, что

$$\int\limits_{E(G_0,\tau)} G_0^l(z)\,dz\leqslant c_7\biggl\{\tau^{l-1}\int\limits_{E(G_0,\tau)} G_0(z)\,dz+\frac{1}{\tau^{\frac{\beta l}{n+2}}}\int\limits_Q \Psi_0(z)\,dz\biggr\}. \quad (22)$$

Очевидно неравенство

$$\int\limits_{E(G_0,\tau)} G_0^l(z)\,dz\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{E(G_0,\sigma)} G_0^l(z)\,dz+\sigma^{l-1}\int\limits_{E(G_0,\tau)} G_0(z)\,dz,\qquad \sigma=\lambda\tau. \quad (23)$$

Из (23) и (22) следует, что

$$\int\limits_{E(G_0,\tau)} G_0^l(z)\,dz\leqslant c_8\biggl\{\tau^{l-1}\int\limits_{E(G_0,\tau)} G_0(z)\,dz+\frac{\|\Psi_0\|_{1,Q}}{\tau^{\frac{\beta l}{n+2}}}\biggr\}. \quad (24)$$

Так как по определению $h(\tau)=\int\limits_{E(G_0,\tau)} G_0(z)\,dz$ и справедливо равенство (9), неравенство (24) принимает форму неравенства (7).

Таким образом, лемма 1 полностью доказана.

Как мы уже отмечали, рассматриваемый вариант леммы Геринга остается верным, если считать, что функции g, f и ψ определены в $\mathbb{R}^n$ и интегралы по параболическим цилиндрам в неравенстве (1) заменены на интегралы по шарам в $\mathbb{R}^n$.

Положим $Q_a = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_i| < a, i = 1, \dots, n\}$.

Лемма 2. *Пусть $Q = Q_a$ с каким-либо $a > 1$ и для неотрицательных функций $g \in L_l(Q)$, $l > 1$, $f \in L_m(Q)$, $m > l$, $\psi \in L_1(Q)$, при почти всех $x^0 \in Q$ верны неравенства*

$$\fint\limits_{B_R(x^0)} g^l(x)\,dx \leqslant \theta \fint\limits_{B_{bR}(x^0)} g^l(x)\,dx + \mathbb{B}\Bigg(\fint\limits_{B_{bR}(x^0)} g(x)\,dx\Bigg)^l +$$

$$+ \fint\limits_{B_{bR}(x^0)} f^l(x)\,dx + (bR)^\beta \fint\limits_{B_{bR}(x^0)} \psi(z)\,dz, \quad \forall\, R < \frac{1}{b}\min\{d(x^0, \partial Q), R_1\},$$

с некоторыми параметрами $R_1 > 0$, $\theta \in [0,1)$, $\mathbb{B} > 1$, $b \geqslant 2$, $\beta > 0$. Существует $\varepsilon > 0$ такое, что $g \in L_s(Q')$, $\forall\, Q' \Subset Q$, и

$$\|g\|_{s,Q'} \leqslant c\left\{ \|g\|_{l,Q} + \|f\|_{s,Q} + \|\psi\|_{1,Q}^{\frac{1}{l}} \right\}.$$

Постоянные c и ε зависят от n, l, m, a, b, $\mathbb{B}$, β, постоянная c также зависит от $d(Q', \partial Q)^{-1}$; $\varepsilon \leqslant \min\big(m - l, \frac{\beta l}{n}\big)$.

Литература

1. F. W. Gehring, *The L^p integrability of partial derivatives of a quasiconformal mapping.* — Acta Math. **130** (1973), 265–277.
2. M. Giaquinta, G. Modica, *Regularity results for some classes of higher order nonlinear elliptic systems.* — J. Reine Angew. Math. **311/312** (1979), 145–169.
3. S. Campanato, *L_p regularity and partial Hölder continuity for solutions of second order parabolic systems with strictly controlled growth.* — Ann. Mat. Pura Appl. **128, No. 4** (1981), 287–316.
4. J. Naumann, M. Wolf, *A global L_p gradient estimate on weak solutions of nonlinear parabolic systems under mixed boundary conditions.* Berlin, Humb. Univ., Preprint 95-2 (1995).
5. A. Arkhipova, *Reverse Hölder inequalities with boundary integrals and L_p-estimates for solutions of elliptic and parabolic nonlinear boundary-value problems.* — Am. Math. Soc. Transl. **164** (1995), 15–42.

6. А. Архипова, *О модификациях леммы Геринга, возникающих при изучении параболических начально-краевых задач.* — В кн.: Проблемы матем. анализа, вып. 17. Изд-во С.-Петерб. университет, 1997, с. 20–45.
7. O. Ladyzhenskaya, A. Arkhipova, *On inhomogeneous incompressible fluids and reverse Hölder inequalities.* to appear in the book dedicated to De-Giorgi E., Pisa (1999).
8. M. Giaquinta, *Multiple intagrals in the calculus of variations and nonlinear elliptic systems.* Princeton (1983).
9. M. Giaquinta, M. Struwe, *On the partial regularity of weak solutions of nonlinear parabolic systems.* — Math. Z. **179** (1982), 437–451.
10. P. A. Ivert, J. Naumann, *Higher integrability by reverse Hölder inequalities.* Univ. Catania, Italy, Preprint (1988).
11. М. Гусман, *Дифффеpенциpование интегралов в* $\mathbb{R}^n$. Мир, М. (1978).

Arkhipova A. A., Ladyzhenskaya O. A. On a modification of Gehring lemma.

New variant of Gehring lemma is proved. This modification arised in the investigation of nonstationary problem on inhomogeneous incompressible fluids.

С.-Петербургский
государственный университет

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 1 декабря 1998 г.