Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 259, 1999 г.

А. Ю. Кокотов, П. Нейттаанмяки, Б. А. Пламеневский

ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ НА КОНУСЕ: АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ ВБЛИЗИ ВЕРШИНЫ

1. Введение

Пусть K –открытый конус в $\mathbb{R}^n_x$, $\Omega = K \cap S^{n-1}$, граница $\partial\Omega$ гладкая. В работе изучается асимптотика решений задачи

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta_x)u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in K \times (0,+\infty) \\ u|\partial K \times (0,+\infty) = 0, \\ u(x,0) = \phi(x), \ u_t'(x,0) = \psi(x) \end{cases} \tag{1.1}$$

при $x \to \mathcal{O}$, где $\mathcal{O}$ – вершина конуса K. Предполагается, что $\phi, \psi \in C_0^\infty(K)$.

В работе получены явные формулы для коэффициентов в асимптотике решений задачи (1.1). Коэффициенты выражаются через специальные решения однородной задачи в цилиндре $K \times \mathbb{R}$. Эти специальные решения имеют степенной рост вблизи вершины конуса; они описываются явно. Все это позволяет проследить эффекты, связанные с конечной скоростью распространения возмущений, на уровне коэффициентов в асимптотике.

Кроме того, для $y \in K$ изучается асимптотика функции Грина $(x,t) \mapsto \Gamma(x,y,t)$ однородной задачи Дирихле для волнового оператора в цилиндре $K \times \mathbb{R}$. Функция Γ удовлетворяет задаче:

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta_x)\Gamma(x,y,t) = \delta(x-y)\delta(t), \quad (x,t) \in K \times \mathbb{R}, \\ \Gamma(\cdot,y,\cdot)|\partial K \times \mathbb{R} = 0, \\ \Gamma(x,y,t) = 0, \quad t < 0. \end{cases} \tag{1.2}$$

Настоящая статья продолжает исследования, начатые в [1, 2]

Работа поддержана грантом РФФИ No. 98-01-01091 и грантом Академии наук Финляндии No. 64761.

[1]Key words and phrases. Гиперболические уравнения в частных производных, области с кусочно гладкой границей.

Поясним результаты статьи следующим примером. Пусть K – плоский угол раствора α, $K = \{(r,\omega):\ 0 < \omega < \alpha\}$. Тогда решение u задачи (1.1) допускает вблизи $\mathcal{O}$ асимптотику с остатком ρ, удовлетворяющим неравенству

$$\int |x|^{-2\beta} |\rho(x,t)|^2 \exp(-2\gamma t)\, dx\, dt < +\infty,$$

где γ – произвольное положительное число, а показатель β может быть сделан сколь угодно большим за счет увеличения числа слагаемых асимптотического разложения. Предположим (только для простоты описания), что $t > \sup\{||x|| \ :\ x \in \mathit{supp}\,\phi \cup \mathit{supp}\,\psi\}$, а $\alpha > \pi$. Тогда главный член асимптотики имеет вид $C(t) r^{\pi/\alpha} \sin(\frac{\pi\omega}{\alpha})$, где

$$C(t) = \int\limits_K \psi(y) \mathbb{W}(y,t)\, dy + \int\limits_K \phi(y) \mathbb{W}'_t(y,t)\, dy,$$

$$\mathbb{W}(y,t) = \frac{\pi^{1/2} 2^{\pi/\alpha} \rho^{\pi/\alpha - 1} \sin(\frac{\pi\theta}{\alpha})}{\Gamma(\pi/\alpha)\Gamma(\frac{3}{2} - \frac{\pi}{\alpha})} \frac{d}{dt} \times$$

$$\times \{(t^2 - \rho^2)^{1/2 - \pi/\alpha} F(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{\alpha}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2} - \frac{\pi}{\alpha}, 1 - \frac{t^2}{\rho^2})\},$$

(r,ω) ш (ρ,θ), полярные координаты точек x и y, F – гипергеометрическая функция.

Преобразованием Фурье по t задачи (1.1), (1.2) сводятся к задачам для уравнения Гельмгольца с комплексным пераметром τ. Теперь для описания асимптотики решений и функции Грина естественно применить схему из теории эллиптических задач [3–5] (см. также [6, 7]). Этому мешает "неэллиптическая" зависимость от параметра τ. Такая трудность преодолена в [1] с помощью "комбинированных" оценок: весовое эллиптическое неравенство вблизи вершины и весовое гиперболическое неравенство в окрестности бесконечности склеиваются в промежуточной зоне.

Асимптотика решений и функций Грина вблизи конических точек изучалась не только для эллиптических, но и для параболических задач. Первая краевая задача для уравнения теплопроводности в области с конической точкой рассматривалась в [8]. В работе [9] приведена асимптотика функций Грина и ядер Пуассона общих параболических задач в конусе.

Гиперболические задачи в областях с особенностями границы исследованы меньше. Волновое уравнение в конусе рассматривалось в работе Чигера и Тейлора [10], где среди прочих содержатся результаты о расположении сингулярного носителя функции Грина задачи (1.1) и о поведении функции Грина вблизи границы сингулярного носителя. Методы Чигера и Тейлора основаны на функциональном исчислении для оператора Лапласа–Бельтрами на сфере и связаны со спецификой волнового уравнения. Асимптотические разложения вблизи вершины конуса в [10] не рассматривались. Упомянем здесь еще книгу [11] и работу [12]; дополнительные литературные указания имеютя в [2].

Настоящая статья состоит из шести параграфов. Во втором параграфе собраны предварительные сведения. В §3 выводятся представления для специальных решений однородных задач для волнового оператора и оператора Гельмгольца. В §4 исследуется асимптотика решений задачи (1.1), а последние два параграфа посвящены задаче (1.2).

2. Задача Дирихле для волнового уравнения в бесконечном цилиндре

В этом параграфе напоминаются результаты работ [1, 2], необходимые в дальнейшем.

2.1. Функциональные пространства. Пусть s – целое неотрицательное число, $\beta \in \mathbb{R}$. Через $H^s_\beta(\mathbb{K})$ обозначается пополнение $C_c^\infty(\overline{\mathbb{K}} \setminus O)$ по норме

$$||u; H^s_\beta(\mathbb{K})|| = (\sum_{|\alpha|\leqslant s} \int_{\mathbb{K}} |y|^{2(\beta-s+|\alpha|)}|D^\alpha_y u(y)|^2\, dy)^{1/2}.$$

Для $q>0$ через $H^s_\beta(\mathbb{K}, q)$ обозначим пространство с нормой

$$||u; H^s_\beta(\mathbb{K}, q)|| = (\sum_{k=0}^{s} q^{2k}||u; H^{s-k}_\beta(\mathbb{K})||^2)^{1/2}. \qquad (2.1)$$

Пространство $H^s_\beta(\mathbb{K}\times\mathbb{R})$ есть пополнение множества $C_0^\infty((\overline{\mathbb{K}} \setminus \{\mathcal{O}\})\times\mathbb{R})$ по норме

$$||w; H^s_\beta(\mathbb{K}\times\mathbb{R})|| =$$

$$= \Big(\sum_{|\alpha| \leqslant s} \int_{\mathbb{K}} \int_{\mathbb{R}} |y|^{2(\beta - s + |\alpha|)} |D^{\alpha}_{y,t} w(y,t)|^2 \, dx \, dt \Big)^{1/2}. \tag{2.2}$$

Норма в $H^s_\beta(\mathbb{K} \times \mathbb{R}, q)$ задается формулой (2.1) с $\mathbb{K} \times \mathbb{R}$ вместо $\mathbb{K}$. Наконец, через $V^s_\beta(\mathbb{K} \times \mathbb{R}, \gamma)$ при $\gamma > 0$ обозначается пространство с нормой

$$||w; V^s_\beta(\mathbb{K} \times \mathbb{R}; \gamma)|| = ||w^\gamma; H^s_\beta(\mathbb{K} \times \mathbb{R}, \gamma)||, \tag{2.3}$$

где $w^\gamma(x,t) = \exp(-\gamma t) w(x,t)$. Норма $||w; V^s_\beta(\mathbb{K} \times \mathbb{R}; \gamma)||$ эквивалентна норме

$$\left(\int_{\Im \tau = -\gamma} ||\mathcal{F}_{t \to \tau} w(\cdot, t); H^s_\beta(\mathbb{K}; |\tau|)||^2 \, d\tau \right)^{1/2}, \tag{2.4}$$

где $\mathcal{F}_{t \to \tau}$ – (комплексное) преобразование Фурье.

2.2. Задачи Дирихле для операторов $\partial_t^2 - \triangle_x - \triangle_x - \tau^2$. Рассмотрим задачу Дирихле для оператора $\partial_t^2 - \triangle_x$ в бесконечном цилиндре $\mathbb{K} \times \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - \triangle_x) u = f \quad \text{в} \ \ \mathbb{K} \times \mathbb{R}, \\ u | \partial\mathbb{K} \times \mathbb{R} = 0. \end{cases} \tag{2.5}$$

Преобразование Фурье $\mathcal{F}_{t \to \tau}$ ($\tau = \sigma - i\gamma, \sigma \in \mathbb{R}, \ \gamma > 0$) переводит задачу (2.5) в задачу Дирихле для оператора Гельмгольца с параметром τ:

$$\begin{cases} (-\triangle_x - \tau^2) u = g \quad \text{в} \ \ \mathbb{K}, \\ u | \partial K = 0. \end{cases} \tag{2.6}$$

В области $\Omega = K \cap S^{n-1}$ введем операторный пучок $\mathfrak{A}(\lambda) = (i\lambda)^2 + (n-2)i\lambda - \delta_S$, заданный на функциях u из $H^2(\Omega)$ таких, что $u|\partial\Omega = 0$ (δ_S – оператор Лапласа–Бельтрами на S^{n-1}). Спектр этого пуска состоит из нормальных собственных значений

$$\lambda_{\pm k} = \frac{i}{2} \{(n-2) \mp \sqrt{(n-2)^2 + 4\mu_k}\}, \quad k = 1, 2, \ldots;$$

здесь $\{\mu_k\}_{k \geq 1}$ – последовательность всех собственных значений δ_S, $0 < \mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \ldots$. Числам $\lambda_{\pm k}$ отвечают собственные функции Φ_k пучка $A(\cdot)$; присоединенных функций нет. Будем считать, что

$$\sqrt{(n-2)^2 + 4\mu_j} (\Phi_j, \Phi_k) = \delta^j_k.$$

Обозначим через $A(\tau)$ замыкание в $L_2(\mathbb{K})$ оператора $-\Delta_x - \tau^2$, первоначально определенного на линеале, порожденном $C_0^\infty(\mathbb{K})$ и функциями вида $\mathbb{K} \ni y \mapsto v(y) = \chi(|y|)|y|^{i\lambda_k}\Phi_k(y/|y|)$, $k = 1, 2, \ldots$; здесь $\chi \in C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}_+})$ – срезающая функция, равная единице вблизи нуля.

При любых $g \in L_2(K)$ и $\tau = \sigma - i\gamma$, $\gamma > 0$, существует единственное решение u уравнения $A(\tau)u = g$ (функция u называется сильным решением задачи (2.6)), см. [1]. Для этого решения верна оценка

$$\gamma^2(|\tau|^2||u; L_2(\mathbb{K})||^2 + ||\nabla u; L_2(\mathbb{K})||^2)) \leqslant c\,||g; L_2(\mathbb{K})||^2, \tag{2.7}$$

где постоянная c не зависит ни от g, ни от параметра τ.

Если λ – собственное число пучка $A(\cdot)$, то однородная задача (2.6) имеет формальное решение вида

$$r^{i\lambda}\sum_{k\geq 0}(\tau r)^{2k}\Psi_k(\omega); \quad r = |x|, \omega = x/|x|, \tag{2.8}$$

причем $\Psi_0 = \Phi_j$ для $\lambda = \lambda_j$. Будем обозначать ряд (2.8) через $w_j(x,\tau)$, если $\lambda = \lambda_j$, $j > 0$, и через $\tilde{w}_{-j}(x,\tau)$, если $\lambda = \lambda_{-j}$, $j > 0$. Через $w_j^N(x,\tau)$ ($\tilde{w}_{-j}^N(x,\tau)$) обозначим N-ую частичную сумму соответствующего ряда.

Пусть $\zeta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\zeta = 1$ вблизи $\mathcal{O}$. Пусть еще число M столь велико, что справедливо включение

$$(-\Delta_x - \tau^2)(\zeta\tilde{w}_{-j}^M) \in L_2(K).$$

Тогда задача

$$\begin{cases} (-\Delta_x - \tau^2)u = (-\Delta_x - \tau^2)(\zeta\tilde{w}_{-j}^M), \\ u|\partial K = 0 \end{cases} \tag{2.9}$$

разрешима. Положим

$$w_j = \zeta\tilde{w}_j^M - u. \tag{2.10}$$

Функция w_{-j} не зависит ни от срезки ζ, ни от числа M и является решением однородной задачи (2.6) с асимптотикой $\tilde{w}_{-j}^M(x,\tau)$ вблизи $\mathcal{O}$.

В задаче (1.6) заменим τ на $\bar{\tau}$. Обозначим через $w_{-j}(x,\bar{\tau})$ решение получившейся задачи с асимптотикой $\tilde{w}_{-j}^M(x,\bar{\tau})$.

Пусть $\beta \leqslant 1$, $\chi \in C_0^\infty(\bar{\mathbb{R}}_+)$, $\chi = 1$ в окрестности нуля. Определим пространство $DH_\beta(K, |\tau|)$ как пополнение множества $C_0^\infty(\bar{K} \setminus \mathcal{O})$ по норме

$$||v; DH_\beta(K; |\tau|)|| = (||\chi_{|\tau|} v; H_\beta^2(K, |\tau|)||^2 + \gamma^2 ||v; H_\beta^1(K, |\tau|)||^2)^{1/2}, \tag{2.11}$$

где $\chi_{|\tau|}(y) = \chi(|\tau||y|)$. Введем еще пространство $RH_\beta(K, |\tau|)$ с нормой

$$||f; RH_\beta(K, |\tau|)|| = (||f; H_\beta^0(K)||^2 + \frac{|\tau|^{2-2\beta}}{\gamma^2} ||f; L_2(K)||^2)^{1/2}. \tag{2.12}$$

Пусть $\beta_1 > \beta_2 > \ldots$ – все такие числа, что каждая из прямых $\Im\lambda = \beta_k - 2 + n/2$ содержит хотя бы одно собственное число λ_j ($j \geq 1$) пучка $\mathfrak{A}(\cdot)$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.1 ([1]). *Пусть $g \in RH_\beta(K, |\tau|)$, $\beta \in (\beta_{k+1}, \beta_k)$ при некотором $k = 1, 2, \ldots$ и $J = \{j : \Im\lambda_j \geq \beta_k - 2 + n/2\}$, где λ_j – собственные значения пучка $\mathfrak{A}(\cdot)$. Тогда решение задачи (2.6) допускает представление*

$$u = \chi_{|\tau|} \sum_{j \in J} c_j w_j^N + h, \tag{2.13}$$

где $w_j^N = w_j^N(\cdot, \tau)$ – N-я частичная сумма ряда (2.8) с достаточно большим N, коэффициенты c_j задаются формулами

$$c_j(\tau) = (g, w_{-j}(\cdot, \bar{\tau}))_{L_2(K)}, \tag{2.14}$$

а остаток h подчинен оценке

$$||h; DH_\beta(K; |\tau|)|| \leqslant c(1 + \frac{|\tau|}{\gamma}) ||g; RH_\beta(K; |\tau|)|| \tag{2.15}$$

с постоянной c, не зависящей ни от g, ни от $\tau = \sigma - i\gamma, \gamma > 0$.

Обозначим через $DV_\beta(K \times \mathbb{R}; \gamma)$ пространство с нормой

$$||u; DV_\beta(K \times \mathbb{R}; \gamma)|| = (\int\limits_{\Im\tau = -\gamma} ||\mathcal{F}_{t\to\tau} u(\cdot, t); DH_\beta(K, |\tau|)||^2 \, d\tau)^{1/2}, \tag{2.16}$$

а через $RV_\beta(K \times \mathbb{R}, \gamma)$ – пространство с нормой

$$||f; RV_\beta(K \times \mathbb{R}, \gamma)|| = (\int\limits_{\Im\tau = -\gamma} ||\mathcal{F}_{t\to\tau} f(\cdot, t); RH_\beta(K, |\tau|)||^2 \, dt)^{1/2}. \tag{2.17}$$

(Ср. с формулой (2.4).) Введем оператор

$$(\mathbb{X}u)(y,t) = \int\limits_{\Im\tau=-\gamma} \exp(it\tau)\chi(|\tau||y|)u(\tau)\,d\tau. \tag{2.18}$$

Через Λ обозначим оператор

$$(\Lambda f)(y,t) = \mathcal{F}^{-1}_{\tau\to t}|\tau|\mathcal{F}_{t'\to\tau}f(y,t'). \tag{2.19}$$

Положим $\mathcal{U}_j^{L_j}(\nu,\omega) = \sum_{k=0}^{L_j-1}\nu^{2k}\Psi_k(\omega)$, где Ψ_k – функции из формулы (2.8) с $\lambda=\lambda_j$, L_j – достаточно большое число. Справедливо следующее утверждение (см. ([1]).

Теорема 2.2. *Пусть $\Lambda f\in RV_\beta(K\times\mathbb{R},\gamma)$ при $\beta\in(\beta_{k+1},\beta_k)$ с некоторым $k=1,2,\ldots$. Тогда решение u задачи* (2.5) *допускает представление*

$$u(y,t) = \sum_{j\in J} r^{i\lambda_j}\mathcal{U}_j^{L_j}(r\partial_t,\omega)(\mathbb{X}\check{c}_j)(y,t) + \check{h}(y,t), \tag{2.20}$$

где

$$\check{c}_j(t) = \mathcal{F}^{-1}_{\tau\to t}(\mathcal{F}_{t\to\tau}f(\cdot,t), w_{-j}(\cdot,\bar{\tau}))_{L_2(K)}, \tag{2.21}$$

а остаток $\check{h}$ подчинен оценке

$$\gamma||\check{h}; DV_\beta(K\times\mathbb{R},\gamma)|| \leqslant c||\Lambda f; RV_\beta(K\times\mathbb{R},\gamma)||. \tag{2.22}$$

Постоянная c в (2.22) *не зависит от $\gamma>0$.*

Повышение гладкости в априорной оценке решения задачи (2.6). Пусть $\beta\leqslant 1$, $\beta\neq 1-\frac{1}{2}\sqrt{(n-2)^2+4\mu_k}$, q – целое неотрицательное число. Для решения u задачи (2.6) имеет место оценки

$$||\chi_{|\tau|}u; H^{2+q}_{\beta+q}(K;|\tau|)||^2 + \gamma^2||u; H^{1+q}_{\beta+q}(K,|\tau|)||^2 \leqslant$$

$$\leqslant c\Big(\sum_{j=0}^{q}\Big(\frac{|\tau|}{\gamma}\Big)^{2j}||g; H^{q-j}_{\beta+q-j}(K,|\tau|)||^2 + \Big(\frac{|\tau|^{1-\beta+q}}{\gamma^{1+q}}\Big)^2||g; L_2(K)||^2\Big), \tag{2.23}$$

где постоянная c не зависит от $\tau=\sigma-i\gamma$, $\gamma>0$ (см. [2], Предл. 2.8).

3. Специальные решения уравнения Гельмгольца

В этом параграфе даны явные формулы для введенных в §2 функций $w_{\pm k}$ и обратных преобразований Фурье $\mathbb{W}_{-k}(x,t) = \mathcal{F}^{-1}_{\tau\to t} w_{-k}(x,\tau)$.

Функции w_{-k} и $\mathbb{W}_{-k}$. Пусть, как и прежде, $\lambda_{-k} = i\{(n-2)+\sqrt{(n-2)^2+4\mu_k}\}/2$, где μ_k – собственное число оператора Лапласа–Бельтрами δ_S в Ω, Φ_k – собственная функция пучка $\mathfrak{A}(\cdot)$, отвечающая λ_{-k}. Пусть еще $\epsilon > 0$, $B_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < \epsilon\}$.

Будем искать решение u однородной задачи

$$\begin{cases} (-\Delta_x - \tau^2)u = 0 \quad \text{т } K, \\ u|\partial K = 0, \end{cases} \tag{3.1}$$

такое, что $u \sim r^{i\lambda_{-k}}\Phi_k(\omega)$ при $r \to 0$ и $u \in L_2(K \setminus B_\epsilon)$. Положим

$$u(r,\omega,\tau) = r^{i\lambda_{-k}}\zeta(r\tau)\Phi_k(\omega), \tag{3.2}$$

где ζ – функция, подлежащая определению. Учитывая, что

$$\{(r\partial_r)^2 + (n-2)\partial_r - \delta_S\}(r^{i\lambda_{-k}}\Phi_k(\omega)) = 0,$$

приходим к уравнению для функции ζ:

$$(\tau r)^2\zeta(r\tau) + (2i\lambda_{-k} + n - 1)(r\tau)\zeta'(r\tau) + (r\tau)^2\zeta''(r\tau) = 0.$$

Введем обозначения $\tau r = x$, $\zeta(x) = x^\nu\xi(x)$, где $\nu = (2-2i\lambda_{-k}-n)/2$.

Функция $y \mapsto \theta(y) = \xi(-iy)$ удовлетворяет уравнению Бесселя

$$y^2\theta''(y) + y\theta'(y) - (\nu^2 + y^2)\theta(y) = 0. \tag{3.3}$$

Возьмем теперь в качестве θ модифицированную функцию Бесселя третьего рода K_ν. Тогда

$$\zeta(r\tau) = c(r\tau)^\nu K_\nu(ir\tau),$$

где постоянная c определяется условием $\zeta(0) = 1$. Имеем

$$c^{-1}i^\nu = \lim_{z\to 0}(iz)^\nu K_\nu(iz) = \lim_{z\to 0}\frac{\pi}{2\sin(\pi\nu)}[I_{-\nu}(iz) - I_\nu(iz)] =$$

$$= \lim_{z\to 0}\frac{\pi(iz)^\nu}{2\sin(\pi\nu)}[\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(iz/2)^{2m-\nu}}{m!\Gamma(m-\nu+1)} -$$

$$-\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(iz/2)^{2m+\nu}}{m!\Gamma(m+\nu+1)}]=\frac{\pi 2^{\nu-1}}{\sin(\pi\nu)\Gamma(1-\nu)}.$$

Значит $c=\pi^{-1}\sin(\pi\nu)\Gamma(1-\nu)i^{\nu}2^{1-\nu}$. Включение $u\in L_2(K\setminus B_\epsilon)$ вытекает из асимптотической формулы

$$K_\nu(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}\exp(-z)[\sum_{m=0}^{M-1}c(\nu,m)(2z)^{-m}+\mathcal{O}(|z|^{-M})],\quad |z|\to\infty. \tag{3.4}$$

(Множитель $\exp(-ir\tau)$ быстро убывает при $r\to+\infty,\tau=\sigma-i\gamma,\ \gamma>0$.)

Таким образом,

$$w_{-k}(x,\tau)=\frac{2^{1-\nu}}{\Gamma(\nu)}(ir\tau)^{\nu}K_\nu(ir\tau)r^{i\lambda_{-k}}\Phi_k(\omega), \tag{3.5}$$

где $\nu=(\sqrt{(n-2)^2+4\mu_k})/2$.

Замечание 3.1. Пусть $n>2, K=\mathbb{R}^n\setminus\mathcal{O}$ – полный конус. Тогда $\Omega=S^{n-1},\mu_1=0,\Phi_1=1/|S_1|$, где $|S_1|$ – площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$, $\nu=(n-2)/2,\ i\lambda_{-1}=2-n$. Нетрудно убедиться, что формула (3.5) в этом случае доставляет (с точностью до коэффициента пропорциональности) фундаментальное решение уравнения Гульмгольца в $\mathbb{R}^n$:

$$\mathcal{E}(x,\tau)=\frac{2^{2-n/2}}{(n-2)|S_1|\Gamma(\frac{n-2}{2})}(ir\tau)^{\frac{n-2}{2}}K_{\frac{n-2}{2}}(ir\tau)r^{2-n}. \tag{3.6}$$

В случае $K=\mathbb{R}^2\setminus\mathcal{O}$ асимптотическое условие в задаче (3.1) заменяется условием $u\sim(-1/2\pi)\ln r,\quad r\to 0$ (соответствующее собственное число $\lambda_{-1}=0$ пучка $\mathfrak{A}(\cdot)$ имеет алгебраическую кратность 2; собственная функция – постоянная, присоединенная функция равна нулю). Решение получающейся задачи ищется в виде $u(x,\tau)=\zeta(r\tau)$. Те же выкладки, что и прежде, приводят к решению

$$w_{-1}(x,\tau)=\frac{1}{2\pi}K_0(ir\tau), \tag{3.7}$$

обладающему требуемой асимптотикой в $\mathcal{O}$. Функция w_{-1} совпадает с фундаментальным решением оператора Гельмгольца при $n=2$.

Применим теперь к (3.5) обратное преобразование Фурье $\mathcal{F}^{-1}_{\tau\to t}$. Известно (см., напр., [13]), что

$$2^{2\mu}\Gamma(2\mu+1/2)(\frac{p}{b})^{-2\mu}K_{2\nu}(bp)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp(-pt)P(t)\,dt,$$

при $\Re\mu>-1/4$, где

$$P(t)=\begin{cases}0,\ t<b,\\ \pi^{1/2}(t^2-b^2)^{(4\mu-1)/2}F(\mu-\nu,\mu+\nu,2\mu+\frac{1}{2},1-\frac{t^2}{b^2}), & t>b\end{cases}$$

и $F(a,b,c,z)$ – гипергеометрическая функция. Пусть $b=r,\ p=i\tau,\ m$ – произвольное натуральное число, $\mu=[\nu]-\nu+m,\ N=[\nu]+m$. Тогда

$$(i\tau)^\nu K_\nu(ir\tau)=r^{\nu-N}(i\tau)^N(\frac{i\tau}{r})^{-\mu}K_\nu(ir\tau)=$$

$$=\frac{2^{-\mu}}{\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}r^{\nu-N}\mathcal{F}_{t\to\tau}(\frac{d}{dt})^N\mathcal{T}_N(r,t,\mu,\nu),$$

где

$$\mathcal{T}_N(r,t,\mu,\nu)=\begin{cases}0, & t<r\\ \pi^{1/2}(t^2-r^2)^{\frac{2\mu-1}{2}}F(\frac{\mu-\nu}{2},\frac{\mu+\nu}{2},\mu+\frac{1}{2},1-\frac{t^2}{r^2}), & t>r,\end{cases}\tag{3.8}$$

а преобразование Фурье и дифференцирование понимаются в смысле теории распределений. Таким образом,

$$\mathbb{W}_{-k}(x,t)=(\frac{d}{dt})^N\mathcal{P}_{N,k}(x,t),\tag{3.9}$$

где

$$\mathcal{P}_{N,k}=\frac{2^{1-N}}{\Gamma(\nu)\Gamma(\mu+1/2)}r^{\nu-\mu+i\lambda_{-k}}\Phi_k(\omega)\mathcal{T}_N(r,t,\mu,\nu).\tag{3.10}$$

Здесь $|x|=r,\ \nu=(\sqrt{(n-2)^2+4\mu_k})/2,\ N=[\nu]+m,\mu=[\nu]-\nu+m,\ \mathcal{T}_N$ из (3.8), m – произвольное натуральное число. Ясно, что правая часть (3.9) не зависит от выбора m.

Замечание 3.2. Из (3.8) видно, что

1) $\mathbb{W}_{-k}(x,t)=0$, если $t<|x|$.

2) $sing\,supp\,\mathbb{W}_{-k}\subset\{(x,t):\ |x|=t\}$.

Замечание 3.3. Функция $\mathcal{T}_N(r,t,\mu,\nu)$ имеет $[\mu-1/2]=j$ $(m-2\leqslant j\leqslant m-1)$ непрерывных производных в $K\times\mathbb{R}$. Поэтому можно считать, что функция $\mathcal{P}_{N,k}(x,t)$, скажем, дважды непрерывно дифференцируема (взяв $m\geq 4$).

Замечание 3.4. Функция $\mathcal{P}_{N,k}(x,t)$ из (3.10) удовлетворяет однородному волновому уравнению в K.

3.2. Функция w_k. Пусть, как и прежде,

$$\lambda_k = i((n-2)-\sqrt{(n-2)^2+4\mu_k})/2.$$

Будем искать решение однородной задачи (3.1) с асимптотикой $r^{i\lambda_k}\Phi_k(\omega)$ при $x\to\mathcal{O}$ в виде $u(x,\tau)=r^{i\lambda_k}\Phi_k(\omega)\zeta(r\tau)$, где ζ – целая функция, $\zeta(0)=1$. Производя незначительные изменения в выкладках пункта 3.1, получаем, что

$$u(x,t)=2^\nu\Gamma(1+\nu)(ir\tau)^{-\nu}I_\nu(ir\tau)r^{i\lambda_k}\Phi_k(\omega),$$

где $\nu=(\sqrt{(n-2)^2+4\mu_k})/2$, I_ν – модифицированная функция Бесселя первого рода. Таким образом, специальное решение $w_k=u$ имеет вид

$$w_k(x,\tau)=2^\nu\Gamma(1+\nu)r^{i\lambda_k}\Phi_k(\omega)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(irt)^{2m}}{m!\Gamma(m+\nu+1)}. \qquad (3.11)$$

4. Асимптотика решения начально-краевой задачи для волнового уравнения в конусе

Перейдем к задаче (1.1). Существование ее решения получается сведением (1.1) к неоднородному волновому уравнению в бесконечном цилиндре $K\times\mathbb{R}$ с нулевыми условиями Дирихле на $\partial K\times\mathbb{R}$. (Это сведение описано в начале доказательства Теоремы 4.1.) Далее мы занимаемся асимптотикой решения вблизи вершины конуса.

Теорема 4.1. *Пусть $k\in\mathbb{N}$, $\beta\in(\beta_{k+1},\beta_1)$ (см. §2), $\gamma>0$. Пусть еще $\nu_j=(\sqrt{(n-2)^2+4\mu_j})/2$; $N_j=[\nu_j]+m$, где m – целое число, $m\geq 4$. Будем для определенности считать, что число N_j четно, $N_j=2l_j$. Положим*

$$\check{c}_j(t)=\int\limits_K\Delta^{l_j}\psi(y)\mathcal{P}_{N_j,j}(y,t)\,dy+\int\limits_K\Delta^{l_j}\phi(y)\partial_t\mathcal{P}_{N_j,j}(y,t)\,dy, \qquad (4.1)$$

где $\mathcal{P}_{N,k}$ *определяется формулой* (3.10). *Тогда для решения* u *задачи* (1.1) *имеет место представление*

$$u(x,t) = \chi(r) \sum_{j \in J} 2^{\nu_j} \Gamma(1+\nu_j) \{ \sum_{m=0}^{L_j} \frac{(r\partial_t)^{2m} \check{c}_j(t)}{m!\Gamma(m+\nu_j+1)} \} \Phi_j(\omega) r^{i\lambda_j} + \rho(x,t); \tag{4.2}$$

здесь χ *– срезка, равная* 1 *вблизи* $\mathcal{O}$, L_j *– достаточно большие целые числа, множество* J *определено в* §2, *а функция* ρ *подчинена оценке*

$$||\rho; DV_\beta(K \times \mathbb{R}, \gamma)|| \leqslant c(\gamma),$$

Замечание 4.1. Поскольку $supp\, \mathcal{P}_{N,j} \subset \{(t,y) : \ t \geq |y|\}$, то $\check{c}_j(t) = 0$, если $t < \inf\{|x| : \ x \in supp\, \psi \cup supp\, \phi\}$. Это, разумеется, согласуется с фактом конечности скорости распространения возмущений в задаче (1.1). (Эффект "переднего фронта" на уровне коэффициентов асимптотики.)

Замечание 4.2. Если $t > \sup\{|x| : \ x \in supp\, \psi \cup supp\, \phi\}$, то согласно замечанию 3.2 в (4.1) можно проинтегрировать по частям ($\mathcal{P}_{N,j} \in C^\infty(\{t > |y|\})$, что приводит к соотношению

$$\check{c}_j(t) = \int_K \psi(y) \mathbb{W}_{-j}(y,t)\, dy + \int_K \phi(y) \partial_t \mathbb{W}_{-j}(y,t)\, dy. \tag{4.3}$$

Таким образом, возможность перехода от (4.1) к (4.3) соответствует своего рода эффекту "заднего фронта" в задаче (1.1) на уровне коэффициентов асимптотики.

Обсудим те же эффекты для коэффициентов асимптотики решения задачи (2.5) в бесконечном цилиндре $K \times \mathbb{R}$ (см. Теорему 2.2). Пусть для правой части f задачи (2.5) справедливо включение $\Lambda f \in RV_\beta(K \times \mathbb{R}, \gamma)$. Известно (см. [1]), что в этом случае коэффициент $\check{c}_j(\cdot)$ в формуле (2.20) принадлежит классу Соболева $H^{n/2 - \Im\lambda_j - \beta}(\mathbb{R})$. С другой стороны, в силу замечания 3.2 (утверждение 2)), функция

$$\check{c}_j(\cdot) = \mathcal{F}^{-1}_{\tau \to \cdot} (\mathcal{F}_{t \to \tau} f(\cdot, t), w_{-j}(\cdot, \bar{\tau}))_{L_2(K)} =$$
$$= \int f(x,s) \mathbb{W}_{-j}(x, \cdot - s)\, dx\, ds$$

попадает в класс $C^\infty(\alpha, +\infty)$ для любого $\alpha > \sup\{|x| + s : \ (x,s) \in sing\, supp\, f\}$.

Таким образом, если сингулярный носитель функции f ограничен по пространственным переменным и полуограничен сверху по времени, то для коэффициентов асимптотики решения задачи (2.5) имеет место эффект "заднего фронта": коэффициенты $\check{c}_j(\cdot)$ становятся гладкими функциями времени после прохождения заднего фронта возмущения, идущего от сингулярного носителя функции f, через вершину $\mathcal{O}$.

Если же $t < \inf\{|x| + s : \ (x,s) \in \ supp\, f\}$, то, в силу замечания 3.2 (утверждение 1)), $\check{c}_j(t) = 0$, что соответствует эффекту "переднего фронта" для коэффициентов асимптотики.

Доказательство теоремы 4.1. Пусть w – функция, обладающая следующими свойствами:

1) $w \in C_0^\infty(K \times \mathbb{R})$,

2)$w(x,0) = \phi(x), \quad w_t'(x,0) = \psi(x)$,

3)$((\partial_t^2 - \triangle_x)w)_+ = \theta_+(\partial_t^2 - \triangle_x)w$ – функция из $C_0^\infty(K \times \mathbb{R})$; здесь θ_+ – характеристическая функция полуоси $\{t : \ t \geq 0\}$.

Такую функцию w легко построить, если заметить, что условия 2)–3) эквивалентны бесконечному набору условий

$$\partial_t^{2n+1} w(x,0) = \triangle_x^n \psi, \quad \partial_t^{2n} w(x,0) = \triangle_x^n \phi, \ n = 0,1,2,\ldots,$$

и воспользоваться теоремой Бореля о продолжении (см., напр., [14], теорема 1.2.6).

Функция $v = u - w$ удовлетворяет задаче

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - \triangle_x)v = -(\partial_t^2 - \triangle_x)w \quad \text{т } K \times (0,+\infty), \\ v|\partial K \times (0,+\infty) = 0, \\ v|_{t=0} = 0, \quad v_t'|_{t=0} = 0. \end{cases} \tag{4.4}$$

Рассмотрим задачу в бесконечном цилиндре $K \times \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - \triangle_x)v = -((\partial_t^2 - \triangle_x)w)_+ \quad \text{т } K \times \mathbb{R}, \\ v|\partial K \times \mathbb{R} = 0. \end{cases} \tag{4.5}$$

Используя оценку (2.23) и Теорему Пэли–Винера (ср., [15], §10), заключаем, что решение задачи (4.5) является гладким по t и аннулируется при $t < 0$. Это означает, что при $t > 0$ оно совпадает с решением задачи (4.4).

Проекция $supp\, w$ на $\mathbb{R}_x^n$ отделена от вершины $\mathcal{O}$ конуса K, поэтому асимптотики функций u и v вблизи $\mathcal{O}$ одинаковы. Пусть

$g=-(\partial_t^2-\triangle_x)w$, $g_+=\theta_+g$. Согласно §2 асимптотика функции v имеет вид

$$v(x,t)=\sum_{j\in J} r^{i\lambda_j}\mathcal{U}_j^{L_j}(r\partial_t,\omega)(\mathbb{X}\check{c}_j)(x,t)+\check{h}(x,t), \tag{4.6}$$

где

$$\check{c}_j(t)=\mathcal{F}^{-1}_{\tau\to t}(\widehat{g_+}(\cdot,\tau),w_{-j}(\cdot,\bar{\tau}))_{L_2(K))},$$

оператор $\mathbb{X}$ определен формулой (2.18), $r^{i\lambda_j}\mathcal{U}_j^{L_j}(r\partial_t,\omega)$ – L_j-я частичная сумма ряда (3.11) с заменой $i\tau$ на ∂_t и k на j, а остаток $\check{h}(x,t)$ подчинен оценке (2.22) с g_+ вместо f.

Выразим коэффициент $\check{c}_j(t)$ через данные задачи (1.1). Имеем

$$\check{c}_j(t)=\int\limits_K dy\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g_+(y,s)\mathbb{W}_{-j}(y,t-s)\,ds,$$

где внутренний интеграл означает спаривание $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ и $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Ввиду (3.10) получаем, дважды интегрируя по частям:

$$\check{c}_j(t)=(-1)^{N_j}\int\limits_K dy\int\limits_0^{+\infty}\partial_s^{N_j}g(y,s)\mathcal{P}_{N_j,j}(y,t-s)\,ds=$$

$$=(-1)^{N_j}(\int\limits_K dy\int\limits_0^{+\infty}\partial_s^{N_j}w(y,s)\triangle_y\mathcal{P}_{N_j,j}(y,t-s)\,ds+$$

$$+\int\limits_K dy\{\partial_s^{N_j+1}w(y,0)\mathcal{P}_{N_j,j}(y,t)+$$

$$+\partial_s^{N_j}w(y,0)\partial_s\mathcal{P}_{N_j,j}(y,t)-\int\limits_0^{+\infty}\partial_s^{N_j}w(y,s)\partial_s^2\mathcal{P}_{N_j,j}(y,t-s)\,ds\}). \tag{4.7}$$

В силу замечания 3.4 интегралы по $K\times\mathbb{R}_+$ сокращаются, что дает равенство

$$\check{c}_j(t)=(-1)^{N_j}(\int\limits_K \partial_t^{N_j+1}w(y,0)\mathcal{P}_{N_j,j}(y,t)\,dy+$$

$$+\int_K \partial_t^{N_j} w(y,0)\partial_t \mathcal{P}_{N_j,j}(y,t)\,dy). \tag{4.8}$$

Предполагая, что $N_j = 2l_j$, получаем

$$\check{c}_j(t) = \int_K \Delta^{l_j}\psi(y)\mathcal{P}_{2l_j,j}(y,t)\,dy + \int_K \Delta^{l_j}\phi(y)\partial_t\mathcal{P}_{2l_j,j}(y,t)\,dy. \tag{4.9}$$

Осталось проверить, что в формуле (4.6) можно опустить оператор $\mathbb{X}$. Пусть χ – срезка из §2. Тогда

$$(\mathbb{X}\check{c}_j)(x,t) - \chi(r)\check{c}_j(t) = \int_{\Im\tau=-\gamma} \exp(it\tau)(\chi(|\tau|r) - \chi(r))c_j(\tau)\,d\tau, \tag{4.10}$$

где

$$c_j(\tau) = (\widehat{g_+}(\cdot,\tau), w_{-j}(\cdot,\bar{\tau}))_{L_2(K)}.$$

Пользуясь включением $g_+ \in C_0^\infty(K\times\mathbb{R})$, явным выражением (3.5) для $w_{-j}(x,\tau)$ и асимптотикой (3.4), приходим к оценке

$$|(\frac{d}{d\tau})^k c_j(\tau)| \leqslant c(\gamma,k,N)|\tau|^{-N}, \quad \forall k,N \geq 0. \tag{4.11}$$

Из (4.10) и (4.11) следует, что разность

$$\kappa(x,t) = \sum_{j\in J} r^{i\lambda_j}\mathcal{U}_j^{L_j}(r\partial_t,\omega)(\mathbb{X}\check{c}_j(x,t)) - \chi(r)\sum_{j\in J} r^{i\lambda_j}\mathcal{U}_J^{L_j}(r\partial_t,\omega)\check{c}_j(t)$$

принадлежит пространству $V^s_{\beta'}(K\times\mathbb{R},\gamma)$ для любых $s\in\mathbb{N}_0$, $\beta'\in\mathbb{R}$. Отсюда, в частности, следует, что норма $||\kappa; DV_\beta(K\times\mathbb{R},\gamma)||$ конечна. Полагая $\rho(x,t) = \kappa(x,t) + \check{h}(x,t)$, получаем утверждение теоремы. $\bullet$

Замечание 4.3. Согласно (3.9) выражение $(d/dt)^{N_j}\mathcal{P}_{N_j,j}(x,t)$ не зависит от выбора $N_j > [\nu_j]$. Поэтому правая часть формулы (4.9) фактически не зависит от $l_j = N_j/2$.

Замечание 4.4. Используя теорему 4.1, результаты ([2]) о повышении гладкости в задаче (4.5) и теоремы вложения для пространства $H^s_\beta(K\times\mathbb{R})$, можно выписать асимптотическое разложение вида (4.2) с остатком, допускающим оценку $\mathcal{O}(r^\sigma)$, где σ может быть сделано сколь угодно большим за счет увеличения числа слагаемых асимптотического разложения.

5. Функция Грина задачи Дирихле для волнового уравнения в цилиндре $K \times \mathbb{R}$

Пусть $y \in K$ и по-прежнему $\tau = \sigma - i\gamma$, $\gamma < 0$. Построим решение задачи

$$\begin{cases} (-\triangle_x - \tau^2)G(x,y,\tau) = \delta(x-y), \\ G(\cdot,y,\tau)|\partial K = 0, \end{cases} \tag{5.1}$$

обладающее следующим свойством: для любой функции ζ из $C_0^\infty(K)$ такой, что $\zeta = 1$ вблизи y, справедливо включение

$$(1-\zeta)G(\cdot,y,\tau) \in H_0^1(K,|\tau|).$$

(Из теоремы 3.8 ([1]) следует, что такое решение единственно.)

Пусть $\eta \in C_0^\infty(K)$, $\eta = 1$ в окрестности y. Пусть еще $\eta_1 = 1 - \eta$, $\mathcal{S}(x,\tau) = (\triangle_x + \tau^2)[\eta_1 \mathcal{E}(x-y,\tau)]$, где $\mathcal{E}(x-y,\tau)$ – фундаментальное решение уравнения Гельмгольца в $\mathbb{R}^n$ (см. (3.6), (3.7).

Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} (-\triangle_x - \tau^2)u = \mathcal{S}, \\ u|\partial K = 0. \end{cases} \tag{5.2}$$

Правая часть задачи (5.2) – функция из $C_0^\infty(K)$. Оценим ее L_2-норму. Имеем

$$(\triangle_x + \tau^2)\eta_1\mathcal{E} = 2\nabla\eta_1\nabla\mathcal{E} + \triangle\eta_1\mathcal{E}.$$

Пользуясь соотношением $(z^\nu K_\nu(z))'_z = -z^\nu K_{\nu-1}(z)$ и асимптотикой (3.4), получаем следующие оценки на прямой $\Im\tau = -\gamma$ при $r > r_1 > 0$:

$$|K_\nu(ir\tau)| \leqslant c\,|r\tau|^{-1/2}\exp(-\gamma r),$$

$$|\mathcal{E}|^2 = \mathrm{const}\ |r^{2-n}(ir\tau)^{(n-2)/2}K_{(n-2)/2}(ir\tau)|^2 \leqslant c\exp(-2\gamma r)r^{1-n}|\tau|^{n-3}$$

и

$$\begin{aligned} |\partial_r\mathcal{E}|^2 = \mathrm{const}\ |(2-n)r^{1-n}(ir\tau)^{(n-2)/2}K_{(n-2)/2}(ir\tau) - \\ - r^{2-n}(ir\tau)^{(n-2)/2}K_{(n-4)/2}(ir\tau)(i\tau)|^2 \leqslant \\ \leqslant c\exp(-2\gamma r)(r^{-n-1}|\tau|^{n-3} + r^{-n+1}|\tau|^{n-1}). \end{aligned}$$

Отсюда выводим, что

$$||\nabla\eta_1\nabla\mathcal{E}||_2 \leqslant c\,(\int_{r_1}^{r_2} r^{n-1}|\partial_r\mathcal{E}|^2\,dr)^{1/2} \leqslant c\,|\tau|^{(n-1)/2}$$

и

$$||\triangle \eta_1 \mathcal{E}||_2 \leqslant c\,|\tau|^{(n-3)/2}.$$

Поэтому

$$||(\triangle_x + \tau^2)(\eta_1 \mathcal{E})||_2 = \mathcal{O}(|\tau|^{(n-1)/2}). \tag{5.3}$$

Теперь, пользуясь оценкой (2.7) для сильного решения задачи (5.2), получаем неравенство

$$||u; L_2(K)|| \leqslant c(n,\gamma)|\tau|^{(n-3)/2}. \tag{5.4}$$

Проверим, что функция

$$G(x,y,\tau) = \eta(x)\mathcal{E}(x-y,\tau) - u(x,y,\tau), \tag{5.5}$$

где $u(x,y,\tau)$ – решение (5.2), является решением задачи (5.1). В самом деле, пусть $\phi \in C_0^\infty(K)$. Тогда

$$\int\limits_K G(x,y,\tau)(-\triangle_x - \tau^2)\phi(x)\,dx = \lim_{\epsilon\to 0} \int\limits_{K\setminus\{x:\ |x-y|\leqslant\epsilon\}} G(-\triangle_x - \tau^2)\phi =$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0}\{ \int\limits_{|x|=\epsilon} (G\partial_r\phi - \partial_r G\phi)\,dS + \int\limits_{K\setminus\{x:\ |x-y|\leqslant\epsilon\}} (-\triangle_x - \tau^2)(\eta\mathcal{E} - u)\} = \phi(0),$$

так как

$$\partial_r G = \frac{1}{|S_1|}(r^{1-n} + o(r^{1-n}))$$

и

$$(-\triangle_x - \tau^2)(\eta\mathcal{E} - u) = (-\triangle_x - \tau^2)\eta\mathcal{E} + (-\triangle_x - \tau^2)\eta_1\mathcal{E} = (-\triangle_x - \tau^2)\mathcal{E} = 0$$

в области $K \setminus \{x:\ |x-y| \leqslant \epsilon\}$.

Из голоморфности $u(x,y,\tau)$ по τ в полуплоскости $\{\Im\tau < 0\}$, оценки (5.4) и теоремы Пэли–Винера в форме [16], следует включение $\mathcal{F}^{-1}_{\tau\to t} u \in \exp(\gamma t) L_2(K, H^s_+(\mathbb{R}))$, где γ и s произвольные числа, подчиненные неравенствам $\gamma > 0$ и $s < 1 - n/2$, а $H^s_+(\mathbb{R})$ – пополнение $C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$ по норме $H^s(\mathbb{R})$.

Учитывая, что $\mathcal{F}^{-1}_{\tau\to t}\mathcal{E}$ при $\gamma > 0$ совпадает с опережающим фундаментальным решением E_+ волнового уравнения в $\mathbb{R}^n$ (см., напр., [14], с. 173), получаем следующее утверждение.

Предложение 5.1. *Существует решение* Γ *задачи* (1.2)*, представимое в виде*

$$\Gamma(x,y,t) = \eta(x)E_+(x-y,t) + U(x,y,t),$$

где $\eta \in C_0^\infty(K)$, $\eta = 1$ *в окрестности* y, E_+ *– опережающее фундаментальное решение оператора* $\partial_t^2 - \triangle_x$, $U(\cdot,y,\cdot) \in \exp(\gamma t)L_2(K, H_+^s(\mathbb{R}))$ *при любых* $\gamma > 0$, $s < 1 - n/2$.

Из оценки (2.23) следует, что для решения u задачи (5.2) справедливо неравенство

$$||u; H_{1+q}^{1+q}(K)|| \leqslant c(n,q,\gamma)|\tau|^{M(q)}, \tag{5.6}$$

где q – произвольное целое неотрицательное число. Согласно лемме 1.1 [5], для любой функции u из $H_{1+q}^{1+q}(K)$ имеет место оценка

$$|D_x^\alpha u(x)| \leqslant c_\alpha |x|^{-n/2-|\alpha|}||u; H_{1+q}^{1+q}(K)||, \quad \text{при } 1+q-|\alpha| > n/2.$$

Отсюда выводим следующую поточечную оценку решения (5.2):

$$|D_x^\alpha u(x,y,\tau)| \leqslant c(n,q,\gamma,y)|x|^{-n/2-|\alpha|}|\tau|^{M(q)}, \tag{5.7}$$

для любых q, α таких, что $|\alpha| < 1 + q - n/2$.

Неравенство (5.7) позволяет регуляризовать интеграл Фурье

$$U(x,y,t) = \int\limits_{\Im\tau=-\gamma} \exp(it\tau)u(x,y,\tau)\,d\tau.$$

Именно, если $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, то

$$\langle U(x,y,\cdot),\phi\rangle =$$

$$= (-1)^L \int\limits_{\mathbb{R}} dt \{ \int\limits_{\Im\tau=-\gamma} \exp(it\tau)\frac{1}{(i\tau)^L} u(x,y,\tau)\,d\tau\}\phi^{(L)}(t), \tag{5.8}$$

где L столь велико, что внутренний интеграл в (5.8) сходится.

6. Асимптотика функции Грина $\Gamma(x,y,t)$

Вернемся к задаче (5.2). Согласно результатам §2 для ее решения $u(x,y,\tau)$ имеет место асимптотика

$$u(x,y,\tau) = \chi(|\tau|r)\sum_{j\in J} c_j(\tau)w_j^N(x,\tau) + h(x,y,\tau), \tag{6.1}$$

где $w_j^N(x,\tau)$ – N-я частичная сумма ряда (3.10),

$$c_j(\tau) = (\mathcal{S}, w_{-j}(\cdot,\bar{\tau}))_{L_2(K)}, \tag{6.2}$$

а остаток h удовлетворяет оценке (2.15) с $\mathcal{S}$ вместо g.

Вычислим коэффициент $c_j(\tau)$ явно. Обозначим оператор $-\triangle_x - \tau^2$ через $\mathcal{L}$. Пусть еще $\zeta \in C_0^\infty(K), \eta\zeta = \eta$, где η – срезающая функция из §5, $\eta_1 = 1 - \eta$. Поскольку

$$\mathcal{S} = -\mathcal{L}(\eta_1\mathcal{E}) = -\mathcal{L}(\mathcal{E} - \eta\mathcal{E}) = -\delta(\cdot - y) + \mathcal{L}(\eta\mathcal{E})$$

и $supp\,\mathcal{S} \subset \{x : \zeta(x) = 1\}$, то

$$c_j(\tau) = \langle \zeta(\mathcal{L}(\eta\mathcal{E}) - \delta(\cdot - y)), \overline{w_{-j}(\bar{\tau})}\rangle =$$

$$-\langle \delta(\cdot - y), \zeta w_{-j}(\tau)\rangle + \langle \mathcal{E}, \eta\mathcal{L}(\zeta w_{-j}(\tau))\rangle = -w_{-j}(y,\tau).$$

(Воспользовавшись тем, что $\mathcal{L}(\zeta w_{-j}) = 0$ на носителе η.) Теперь из (6.1) и (5.5) следует, что при $|x| < |y|/2$

$$G(x,y,\tau) = \chi(|\tau|r)\sum_{j\in J} 2^{\nu_j}\Gamma(1+\nu_j) w_{-j}(y,\tau)\times$$

$$\times \sum_{m=0}^{N_j} \frac{(ir\tau)^{2m}}{m!\Gamma(m+\nu_j+1)}\Phi_j(\omega) r^{i\lambda_j} + +h(x,y,\tau). \tag{6.3}$$

Предположим, что $|y| = 1,\ y \in \Omega_1 \subset\subset \Omega \subset S^{n-1}$. Оценивая норму

$$||\mathcal{S}(\cdot,y,\tau); RH_\beta(K,|\tau|)||$$

аналогично выводу неравенства (5.3), получаем, что

$$||h(\cdot,y,\tau); DH_\beta(K;|\tau|)|| \leqslant c(1+\frac{|\tau|}{\gamma})||\mathcal{S}; RH_\beta(K;|\tau|)|| \leqslant$$

$$\leqslant c_1(1+\frac{|\tau|}{\gamma})|\tau|^{\frac{n-1}{2}}(1+\frac{|\tau|^{1-\beta}}{\gamma}), \tag{6.4}$$

где c_1 не зависит от $y \in \Omega_1,\ \gamma = -\Im\tau > 0$.

Наша цель теперь – оценить норму $||h(\cdot,y,\tau); DH_\beta(K;|\tau|)||$ для всех $y \in K_1 = \{x \in \mathbb{R}^n :\ x/|x| \in \Omega_1\}$. Для этого (как это делалось в аналогичной ситуации в [5]) произведем в задаче (5.1) замену переменных $Y = y/|y|,\ X = x/|y|$. Из однородности δ-функции следует, что функция

$$g(X,Y) = |y|^{n-2}G(|y|X, |y|Y, \tau)$$

удовлетворяет задаче

$$\begin{cases} (-\triangle_X - (|y|\tau)^2)g(X,Y) = \delta(X-Y) \quad \text{в } K, \\ g(\cdot, Y)|\partial K = 0. \end{cases}$$

Следовательно, при $|X| < |Y|/2$ имеет место представление:

$$g(X,Y) = \chi(|y||\tau||X|)\sum_{j\in J} 2^{\nu_j}\Gamma(1+\nu_j)w_{-j}(Y,\tau|y|)\times$$

$$\times\sum_{m=0}^{N_j}\frac{(i|X|\tau|y|)^{2m}}{m!\Gamma(m+\nu_j+1)}\Phi_j(X/|X|)|X|^{i\lambda_j} + H(X,Y,|y|\tau), \tag{6.5}$$

где

$$||H(\cdot, Y, |y|\tau); DH_\beta(K; |y||\tau|)|| \leqslant$$

$$\leqslant c\left(1+\frac{|\tau|}{\gamma}\right)(|\tau||y|)^{\frac{n-1}{2}}\left(1+\frac{|\tau|^{1-\beta}|y|^{-\beta}}{\gamma}\right). \tag{6.6}$$

Возвращаясь к старым переменным, получаем, что при $|x| < |y|/2$

$$G(x,y,\tau) = G_1(r,\omega,y,\tau) + H(x/|y|, y/|y|, |y|\tau)|y|^{2-n}, \tag{6.7}$$

где $G_1(r,\omega,y,\tau)$ совпадает с первым слагаемым в правой части формулы (6.3). (Это совпадение следует из явного вида (3.5) функций $w_{-k}(x,\tau)$ и равенства $\lambda_j + \lambda_{-j} = i(n-2)$.)

Заметим, что

$$||U_t; H^s_\beta(K,q)|| = t^{n/2+\beta-s}||U; H^s_\beta(K,tq)||,$$

где $U_t(x) = U(x/t),\ t>0$. Отсюда выводим, что

$$||\chi_{|\tau||y|}H(\cdot, y/|y|, |y|\tau); H^2_\beta(K, |y||\tau|)|| =$$

$$= |y|^{2-\beta-n/2}||\chi_{|\tau|}H(\cdot/|y|, y/|y|, |y|\tau); H^2_\beta(K,|\tau|)||$$

и

$$||H(\cdot, y/|y|, |y|\tau); H^1_\beta(K, |y||\tau|)|| =$$

$$= |y|^{1-\beta-n/2}||H(\cdot/|y|, y/|y|, |y|\tau); H^1_\beta(K,|\tau|)||.$$

Значит,

$$||\, |y|^{2-n}H(\cdot/|y|, y/|y|, |y|\tau); DH_\beta(K,|\tau|)|| \leqslant$$

$$\leqslant \max\{|y|^{1+\beta-n/2}, |y|^{\beta-n/2}\}||H(\cdot, Y, |y|\tau); DH_\beta(K; |y||\tau|)|| \leqslant$$

$$\leqslant c\max\{|y|^{1+\beta-n/2},|y|^{\beta-n/2}\}(1+\frac{|\tau|}{\gamma})(|\tau||y|)^{(n-1)/2}(1+\frac{|\tau|^{1-\beta}|y|^{-\beta}}{\gamma})\leqslant$$

$$\leqslant c\,(1+|y|^{-\beta})\max\{|y|^{\beta+1/2},|y|^{\beta-1/2}\}(1+\frac{|\tau|}{\gamma})|\tau|^{(n-1)/2}(1+\frac{|\tau|^{1-\beta}}{\gamma}). \tag{6.8}$$

Обозначим правую часть (6.8) через $c\theta_\beta(|y|,|\tau|,\gamma)$. Теперь из (6.7) и (6.8) получаем следующее утверждение.

Теорема 6.1. *Пусть $k\in\mathbb{N}$, $\beta\in(\beta_{k+1},\beta_k)$ (см. §2), $\Im\tau=-\gamma<0$, $\Omega_1\subset\subset\Omega$, $K_1=\{x\in\mathbb{R}^n:\ x/|x|\in\Omega_1\}$. Тогда решение задачи (5.1) при $y\in K_1$, $|x|<|y|/2$ представимо в виде (6.3), где остаток h подчинен оценке*

$$||h(\cdot,y,\tau);DH_\beta(K,|\tau|)||\leqslant c\theta_\beta(|y|,|\tau|,\gamma),$$

причем константа c не зависит от $y\in K_1$, $\gamma>0$.

Пусть $\epsilon>0$. Введем оператор $\Theta_{\epsilon,\beta,\gamma}$ формулой

$$(\Theta_{\epsilon,\beta,\gamma}f)(t)=\mathcal{F}^{-1}_{\tau\to t}|\tau|^{-1/2-\epsilon}\theta_\beta^{-1}(|y|,|\tau|,\gamma)\mathcal{F}_{t_1\to\tau}f(t_1).$$

Обратным преобразованием Фурье из теоремы 6.1 получается

Теорема 6.2. *Пусть $k\in\mathbb{N}$, $\beta\in(\beta_{k+1},\beta_k)$, $\gamma>0$, $\epsilon>0$. Тогда при $y\in K_1$, $|x|<|y|/2$ решение задачи (1.2) предствимо в виде*

$$\Gamma(x,y,t)=\sum_{j\in J}2^{\nu_j}\Gamma(1+\nu_j)\sum_{m=0}^{N_j}\frac{(r\partial_t)^{2m}}{m!\Gamma(m+\nu_j+1)}\times$$

$$\times\mathbb{X}_{t_1\to(x,t)}\mathbb{W}_{-j}(y,t_1)\Phi_j(\omega)r^{i\lambda_j}+\check{h}(x,y,t), \tag{6.9}$$

где $||[\Theta_{\epsilon,\beta,\gamma}\check{h}](\cdot,y,\cdot);DV_\beta(K\times\mathbb{R},\gamma)||\leqslant\mathrm{const}$.

Замечание 6.1. Симметричность функции $\Gamma(x,y,t)$ по x,y позволяет выписать аналогичное разложение в зоне $x\in K_1$, $|y|<|x|/2$.

В (6.9) под знаком сглаживающего оператора $\mathbb{X}$ стоит распределение $\mathbb{W}_{-j}$, а не гладкая функция $\check{c}_j(\cdot)$, как это было в формулах §4. Тем не менее, незначительно изменив оценку остатка, оператор $\mathbb{X}$ можно из (6.9) исключить. Вкратце поясним, как это делается.

Пусть оператор Λ, как и прежде, определяется формулой (2.19), N – положительное число, которое мы выберем позже. Пусть

$$\tilde{\alpha}_{m,j}(x,y,t) = (r\partial_t)^{2m}\mathbb{X}_{t_1\to(x,t)}\mathbb{W}_{-j}(y,t_1)\Phi_j(\omega)r^{i\lambda_j},$$

$$\alpha(x,y,t) = (r\partial_t)^{2m}\mathbb{W}_{-j}(y,t)\Phi_j(\omega)r^{i\lambda_j}.$$

Тогда

$$||\Lambda^{-N}(\tilde{\alpha}(\cdot,y,\cdot)-\alpha(\cdot,y,\cdot)); DV_\beta(K\times\mathbb{R},\gamma)||^2 =$$

$$= \int\limits_{\Im\tau=-\gamma} |\tau|^{-2N}|w_{-j}(y,\tau)|^2||\{(ri\tau)^{2m}(\chi(|\tau|r)-\chi(0))\}\times$$

$$\times r^{i\lambda_j}\Phi_j(\omega); DH_\beta(K,|\tau|)||^2\,d\tau. \qquad (6.10)$$

Выражение в фигурных скобках в правой части (6.10) оценивается, как $\mathcal{O}((r|\tau|)^M)$ с любым положительным M. Значит, норма под интегралом в (6.10) конечна и допускает оценку через некоторую положительную степень $|\tau|$. Теперь, выбирая N достаточно большим, можно сделать интеграл в (6.10) конечным.

Простые, хотя и несколько громоздкие оценки с использованием явного вида (3.5) функции w_{-j} приводят к следующему результату.

Пусть $N > 3-\beta$, $\tilde{A}$ – отрезок асимптотического ряда (6.9), A – тот же отрезок ряда с исключенным оператором $\mathbb{X}$. Тогда

$$||\Lambda^{-N}\{\tilde{A}-A\}; DV_\beta(K\times\mathbb{R},\gamma)||^2 \leqslant c|y|^{1-n}(\max\{|y|^{2\beta-1},|y|\}+1).$$

Литература

1. Б. А. Пламеневский, *О задаче Дирихле для волнового уравнения в цилиндре с ребрами.* Алгебра и Анализ, **10** (1998), No. 2, 197–228. (Поправка **10** (1998), No. 3, 224).
2. А. Ю. Кокотов, Б. А. Пламеневский, *О задаче Дирихле–Коши для гиперболических систем в клине.* Алгебра и Анализ, No. 3 (1999).
3. В. А. Кондратьев, *Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками.* Труды Моск. мат. об-ва, **16** (1967), 219–292.
4. В. Г. Мазья, Б. А. Пламеневский, *О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач в областях с коническими точками.* Math. Nachr., **76** (1977), 29–60.
5. В. Г. Мазья, Б. А. Пламеневский, *Об асимптотике фундаментальных решений эллиптических краевых задач в областях с коническими точками.*

Проблемы математического анализа, вып. 7, Изд-во Ленинградского университета, 1979, с. 100–145.

6. С. А. Назаров, Б. А. Пламеневский, *Эллиптические задачи в областях с кусочно-гладкой границей.* Наука, М., 1991.

S. Nazarov, B. Plamenevsky, *Elliptic Problems in Domains with Piecewise Smooth Boundaries.* W. de Gruyter, 1994, Berlin – New York.

8. В. А. Козлов, В. Г. Мазья, *Об особенностях решений первой краевой задачи для уравнения теплопроводности в областях с каноническими точками. I.* Известия высших учебных заведений, Математика, 1987, No. 2, ц. 38–46.

9. В. А. Козлов, *Функция Грина и ядра Пуассона параболических задач в области с конической точкой.* УМН, **3**, No. 3 (1988), 183–184.

J. Cheeger, M. Taylor *On the diffraction of waves by conical singularities, I.* Comm. Pure Appl. Math., **XXXV**, No. 3 (1982), 275-331; II, Comm. Pure Appl. Math., **XXXV**, No. 4 (1982).

11. В. А. Боровиков, *Дифракция на многоугольниках и многогранниках.* Наука, М., 1966.

12. И. И. Мельников, *Особенности решения смешанной задачи для гиперболических уравнений второго порядка в областях с кусочно-гладкой границей.* УМН, **37**, вып. 1 (1982)б 149–151.

13. Г. Бейтман, А. Эрдейн, *Таблицы интегральных преобразований.* Наука, М., т. 1, 1969.

14. Л. Хермандер, *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными.* т. 1, М., Мир, 1986.

15. М. С. Агранович, М. И. Вишик, *Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида.* УМН, **19**, No. 3 (1964), 53–161.

16. Г. И. Эскин, *Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений.* Наука, М., 1973.

Kokotov A. Yu., Neittaanmäki P., Plamenevsky B. A. Difraction on a cone: the asymptotics of the solutions near the vertex.

The mixed problem for the wave equation in a cone $K \subset \mathbb{R}^n$ is considered. We obtain the asymptotic formulas for the solutions and the Green function near the vertex of the K. The properties of the coefficients in the asymptotics connected with the finiteness of the propagation speed are clarified.

Санкт-Петербургский
Университет телекоммуникаций
University of Jyvaskyla,
Dep. of Math. Inf. Technology,
Санкт-Петербургский государственный
университет, физический факультет

Поступило 10 июня 1999 г.