Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 259, 1999 г.

О. А. Ладыженская, Г. А. Серегин

О РЕГУЛЯРНОСТИ РЕШЕНИЙ ДВУМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ ЖИДКОСТЕЙ С НЕЛИНЕЙНОЙ ВЯЗКОСТЬЮ

§1. Введение.

Система дифференциальных уравнений в частных производных, описывающая течение несжимаемой обобщенной ньютоновской жидкости в размерности два, имеет вид

$$\partial_t v(x,t) + \nabla v(x,t) v(x,t) - \operatorname{div} \tau(x,t) = g(x,t), \tag{1.1$_1$}$$

$$\tau(x,t) = \sigma(x,t) - p(x,t)\mathbb{I}, \quad \operatorname{tr}\sigma(x,t) = 0, \tag{1.1$_2$}$$

$$\sigma(x,t) = \mu_0\big(|\varepsilon(v(x,t))|^2\big)\,\varepsilon(v(x,t)), \tag{1.1$_3$}$$

$$\varepsilon(v(x,t)) \ \text{ есть симметричная часть тензора } \ \nabla v(x,t), \tag{1.1$_4$}$$

$$\operatorname{div} v(x,t) = 0 \tag{1.1$_5$}$$

для всех $x,\, t \in Q_T = \Omega \times]\,0,T\,[$. Здесь Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^2$, $v = (v_1, v_2) : Q_T \to \mathbb{R}^2$ – поле скоростей, $\varepsilon(v)$ – тензор скоростей деформаций, p – давление, τ – тензор напряжений, а σ – его девиатор. Поле внешних сил обозначается через $g : Q_T \to \mathbb{R}^2$, а нелинейная вязкость через $\mu_0 : \mathbb{R}_+ \equiv [0,+\infty[\to \mathbb{R}_+$.

Система (1.1) дополняется краевыми условиями, например, однородными условиями Дирихле

$$v(x,t) = 0, \quad x,\, t \in \partial\Omega \times [0,T] \tag{1.2}$$

и начальными условиями

$$v(x,0) = a(x), \quad x \in \Omega. \tag{1.3}$$

При некоторых предположениях о функциях a, g и μ_0 система (1.1)–(1.3) однозначно определяет искомые поля скоростей v и давления p.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант No. 99-01-00108, Федеральной целевой программой “Интеграция”, грант No. 326.53 и INTAS, грант No. 96-0835.

Отметим, что уравнения состояния (1.1_3) могут быть записаны в следующей эквивалентной форме

$$\sigma(x,t) = \frac{\partial D}{\partial \varepsilon}\big(\varepsilon(v(x,t))\big) = \left(\frac{\partial D}{\partial \varepsilon_{ij}}\big(\varepsilon(v(x,t))\big)\right), \tag{1.4}$$

где

$$D(\varepsilon) = \frac{1}{2}\int\limits_0^{|\varepsilon|^2} \mu_0(\theta)\, d\theta, \quad \varepsilon \in \mathbb{M}, \tag{1.5}$$

– так называемый диссипативный потенциал, а $\mathbb{M}$ – пространство вещественных симметричных 2×2 матриц. Уравнения движения (1.1_1), (1.1_2), (1.4), (1.1_4), (1.1_5) являются частным случаем модифицированных уравнений Навье–Стокса, введенных первым автором в [1–3], и мы будем называть их потенциальными модифицированными уравнениями Навье–Стокса. В свою очередь, уравнения Навье–Стокса являются частным случаем потенциальных модифицированных уравнений Навье–Стокса.

В настоящей работе мы будем рассматривать класс потенциальных модифицированных уравнений Навье–Стокса, который удовлетворяет следующим требованиям:

$$\begin{gathered}
D : \mathbb{M} \to \mathbb{R}_+ \text{ – функция класса } C^2;\\
D(\varepsilon) \geqslant \nu|\varepsilon|^2, \quad \nu = \text{constant} > 0, \quad \varepsilon \in \mathbb{M};\\
\left(\frac{\partial^2 D}{\partial \varepsilon^2}(\varepsilon)\varkappa\right) : \varkappa = \frac{\partial^2 D}{\partial \varepsilon_{ij}\partial \varepsilon_{km}}(\varepsilon)\varkappa_{ij}\,\varkappa_{km} \geqslant 2\nu|\varkappa|^2, \quad \varepsilon,\, \varkappa \in \mathbb{M}; \qquad (1.6)\\
\left|\frac{\partial D}{\partial \varepsilon_1}(\varepsilon)\right| \leqslant \nu_1|\varepsilon| + \nu_2, \quad \nu_1,\, \nu_2 = \text{constant} > 0, \quad \varepsilon \in \mathbb{M}.
\end{gathered}$$

Здесь и всюду в дальнейшем принято соглашение о суммировании по повторяющимся латинским индексам, изменяющимся от 1 до 2.

Известно (см. [1–3]), что в подходящих функциональных пространствах, которые будут введены позднее, начально-краевая задача (1.1_1), (1.1_2), (1.4), (1.1_4), (1.1_5), (1.2), (1.3) имеет единственное обобщенное решение. В работах [4, 5] было показано, что обобщенное решение обладает дополнительной гладкостью по t, если g имеет некоторую гладкость по t. Суммарный результат сформулирован в теореме 1.1, которая является отправной точкой для дальнейших исследований регулярности обобщенного решения выше сформулированной начально-краевой задачи.

Теорема 1.1.

I. *Пусть диссипативный потенциал D удовлетворяет условиям* (1.6). *Тогда для любого $T > 0$ и любых функций $a \in H$ и $g \in L_2(0,T;H^{-1})$ существует единственное решение v начально-краевой задачи* (1.1_1), (1.1_2), (1.4), (1.1_4), (1.1_5), (1.2), (1.3) *такое, что*

$$v \in C([0,T];H) \cap L_2(0,T;H^1), \quad \partial_t v \in L_2(0,T;H^{-1}). \tag{1.7}$$

Оно удовлетворяет выриационному тождеству

$$\big(\partial_t\, v(t), w\big) + \big(\nabla v(t)\, v(t), w\big) + \left(\frac{\partial D}{\partial \varepsilon}\big(\varepsilon(v(t))\big), \varepsilon(w)\right) = (g(t), w) \tag{1.8}$$

для всех $w \in H^1$ и почти всех $t \in [0,T]$ и начальному условию

$$v(0) = a. \tag{1.9}$$

II. *Если дополнительно предположить, что*

$$t\partial_t g \in L_2(0,T;H^{-1}), \tag{1.10}$$

то

$$\begin{gathered}\sqrt{t}\, v \in L_\infty(0,T;H^1), \quad \sqrt{t}\, \partial_t v \in L_2(0,T;H), \\ t\, \partial_t v \in L_\infty(0,T;H) \cap L_2(0,T;H^1).\end{gathered} \tag{1.11}$$

При формулировке теоремы 1.1 были использованы следующие функциональные пространства:

• $L_2(\Omega;\mathbb{R}^k)$ – пространство Лебега со скалярным произведением $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ и нормой $\|\cdot\|$. Норма в пространстве $L_p(\omega;\mathbb{R}^k)$ обозначается через $\|\cdot\|_{p,\omega}$, причем $\|\cdot\|_\omega \equiv \|\cdot\|_{2,\omega}$ и $\|\cdot\| \equiv \|\cdot\|_\Omega$;

• $H = \overset{\circ}{J}(\Omega)$ – замыкание в $L_2(\Omega;\mathbb{R}^2)$ множества

$$\overset{\bullet}{J}{}^\infty(\Omega) = \big\{u \in C_0^\infty(\Omega;\mathbb{R}^2) \,|\, \operatorname{div} u = 0 \quad \text{в} \quad \Omega\big\}$$

относительно нормы $\|\cdot\|$;

• H^1 – гильбертово пространство, в котором множество $\overset{\bullet}{J}{}^\infty(\Omega)$ плотно относительно нормы $\|u\|_{(1)} \equiv \|\nabla u\|$;

• H^{-1} – гильбертово пространство, двойственное к H^1 относительно H. Норма в H^{-1} определяется следующим образом

$$\|u\|_{(-1)} = \sup\big\{(u,w) \,|\, \|w\|_{(1)} \leqslant 1\big\}.$$

Теорема 1.1 верна и для других однородных краевых условий. При этом ее формулировка остается прежней, и необходимо лишь "правильно" определить пространства H и H^{-1}.

Имея в руках обобщенное решение начально-краевой задачи (1.1_1), (1.1_2), (1.4), (1.1_4), (1.1_5), (1.2), (1.3) со свойствами (1.7), (1.11) (мы будем называть его *сильным*), можно поставить вопрос о том, как его дифференциальные свойства зависят от данных задачи, т.е. от g, D и $\partial\Omega$. В представленной работе мы ограничимся лишь исследованием внутренней регулярности сильного решения в подобластях вида

$$Q'_{\delta,T} = \Omega' \times]\,\delta, T\,[,$$

где $\Omega' \Subset \Omega$ и $\delta > 0$.

Для широких классов квазилинейных эллиптических и параболических систем, образованных гладкими функциями, доказано, что их обобщенные решения, имеющие конечной ту или иную "ествественную" норму, фактически обладают бо́льшей гладкостью, но может быть не во всей области их определения, а только на некотором открытом подмножестве полной меры (см. [17, 13] и многие другие). Такого рода гладкость часто называют частичной регулярностью. Для ряда двумерных задач удалось доказать полную регулярность обобщенных решений, т.е. их гладкость во всей области их определения.

Для стационарных потенциальных модифицированных уравнений Навье–Стокса выше упомянутое свойство сглаживания имеет место (см., например, [6]), в то время как для нестационарных уравнений такого типа это, вообще говоря, не так. Дело в том, что в последнем случае на поведение решения во внутренних подобластях оказывают влияние краевые условия. Это является проявлением нелокальности задачи, связанной с условием несжимаемости (1.1_4). Так в случае нестационарных уравнений Навье–Стокса при некоторых дополнительных предположениях о решении имеет место сглаживание по пространственным переменным. Характер же сглаживания по времени опредляется порядком старшей производной по t, которую имеет "энергетическое" решение. Для оценки производных по t более высокого порядка надо привлекать краевые условия (см., например [7, 8]). По поводу внутренней регулярности, а также регулярности вплоть до границы решений уравнений Навье–Стокса мы отсылаем читателя к [8, 9] (см. также обширную библиографию в них).

В данной работе мы покажем, что свойства внутреннего сглаживания, присущие решениям уравнений Навье–Стокса, сохраняются и в квазилинейном случае по крайней мере в размерности два (см. теорему 2.3). Для периодических краевых условий в нашей работе [10] (см. таже [11]) было показано, что, если данные задачи (1.1_1), (1.1_2), (1.4), (1.1_4), (1.1_5), (1.2), (1.3) принадлежат классу C^∞, то и решение будет принадлежать тому же классу. Однако, вопрос о справедливости аналогичных результатов для краевых условий прилипания не изучен. С другой стороны, доказательство основной теоремы 2.3, дополненное глобальными по пространственным переменным оценками производных по времени (в случае периодических краевых условий получить такие оценки нетрудно), приводит к альтернативному доказательству выше упомянутого результата работы [10].

§2. Формулировка основных результатов.

Предположим, что

$$\left.\begin{array}{l} g \text{ -- функция класса } \ C^\infty \ \text{ на } \ Q_T, \\ D \text{ -- функция класса } \ C^\infty \ \text{ на } \ \mathbb{M} \end{array}\right\} \tag{2.1}$$

и что

$$\Omega \text{ -- область класса } \ C^2. \tag{2.2}$$

Мы будем изучать дифференциальные свойства сильного решения v задачи (1.1_1), (1.1_2), (1.4), (1.1_4), (1.1_5), (1.2), (1.3) при условиях (1.6), (1.10), (2.1) и (2.2) внутри цилиндра Q_T, т.е. в областях типа $Q_{\delta,T} = \Omega' \times]\,\delta, T\,[$, где $\Omega' \Subset \Omega$ и $\delta > 0$. Исследования такого рода мы разобьем на две последовательно решаемые проблемы. В первой из них доказывается $C^{1+\alpha}$-регулярность сильного решения, и затем во второй – устанавливается его C^∞-регулярность или какой-либо ее аналог. Здесь $C^{l+\alpha}$ – пространство функций, которые вместе со своими производными до порядка l включительно непрерывны по Гельдеру по переменным x и t с показателем $\alpha \in]\,0,1\,[$.

Первая проблема решена в работе [12] и в представленной работе мы будем изучать следствия $C^{1+\alpha}$-регулярности сильного решения v задачи (1.1_1), (1.1_2), (1.4), (1.1_4), (1.1_5), (1.2), (1.3). Прежде всего сформулируем основной результат работы [12].

Теорема 2.1. *Пусть выполнены условия* (1.6), (1.10), (2.1) *и* (2.2) *и пусть дополнительно*

$$L = \sup_{\varepsilon \in \mathbb{M}} \left| \frac{\partial^2 D}{\partial \varepsilon^2}(\varepsilon) \right| < +\infty, \tag{2.3}$$

$$L_1 = \sup_{\varepsilon \in \mathbb{M}} \left| \frac{\partial^3 D}{\partial \varepsilon^3}(\varepsilon) \right| < +\infty. \tag{2.4}$$

Тогда

$$v \in C^{5/4}\left(\overline{Q}'_{\delta,T}; \mathbb{R}^2\right) \tag{2.5}$$

для всех $\Omega' \Subset \Omega$ *и всех* $\delta > 0$. *Более того,*

$$\begin{gathered} \nabla^2 v \in L_\infty\left(\delta, T; L_2(\Omega'; \mathbb{R}^8)\right), \quad \nabla \partial_t v \in L_\infty\left(\delta, T; L_2(\Omega'; \mathbb{R}^4)\right), \\ \nabla^3 v \in L_2\left(Q_{\delta,T}; \mathbb{R}^{16}\right), \quad \nabla^2 \partial_t v \in L_2\left(Q_{\delta,T}; \mathbb{R}^8\right). \end{gathered} \tag{2.6}$$

Ключевым в нашем подходе является ниже формулируемый результат, который фактически является следствием теории регулярности решений эллиптических систем (см. [13]).

Теорема 2.2. *Пусть выполнены все условия теоремы* 2.1. *Тогда*

$$\nabla^2 v \in L_\infty\left(\delta, T; \mathrm{BMO}_{\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbb{R}^8)\right) \tag{2.7}$$

для всех $\delta > 0$.

Напомним читателю определение класса BMO (см. [14])

$$f \in \mathrm{BMO}_{\mathrm{loc}}(\Omega) \Longleftrightarrow f \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$$

и

$$\sup_{B(x_0,R) \Subset \Omega} \ \fint_{B(x_0,R)} |f - (f)_{x_0,R}| dx < +\infty.$$

Здесь были использованы обозначения

$$\fint_{B(x_0,R)} f\,dx \equiv \frac{1}{|B(x_0,R)|} \int_{B(x_0,R)} f\,dx,$$

$$(f)_{x_0,R} \equiv \fint_{B(x_0,R)} f\,dx,$$

$B(x_0,R)$ – шар радиуса R с центром в точке x_0.

Основной результат представленной работы заключается в следующем.

Теорема 2.3. *Пусть v решение начально-краевой задачи* (1.1_1), (1.1_2), (1.4), (1.1_4), (1.1_5), $(1.2), (1.3)$ *и пусть выполнены все условия теоремы* 2.1. *Тогда для любого числа $\delta > 0$ и любой подобласти $\Omega' \Subset \Omega$, и любого натурального числа l*

$$\nabla^l v \in \mathrm{Lip}\,\left(\overline{Q}'_{\delta,T}; \mathbb{R}^{2^{l+1}}\right).$$

Здесь Lip *-пространство функций непрерывных по Липшицу по переменным x и t.*

Замечание 2.1. В случае периодических краевых условий теорема 2.3 приводит к следующему результату

$$\nabla^l v \in \mathrm{Lip}\,\left(\overline{Q}_{\delta,T}; \mathbb{R}^{2^{l+1}}\right)$$

для всех $\delta > 0$ и $l \in \mathbb{N}$, а $Q_{\delta,T} = \Omega \times]\,0, T\,[$, Ω – квадрат. Затем можно вывести глобальную по пространственным переменным оценку ∂_t^2 и доказать что

$$\nabla^l\, \partial_t\, v \in \mathrm{Lip}\,\left(\overline{Q}_{\delta,T}; \mathbb{R}^{2^{l+1}}\right).$$

Продолжая эти рассуждения, мы получим, что v есть функция класса C^∞ в Q_T.

§3. Доказательство теоремы 2.2.

Мы будем использовать утверждения теоремы 2.1 и известную эллиптическую технику (см., например, [13]). Итак, пусть

$$B(x_0, R) \Subset \Omega, \qquad v^{(k)} \equiv v_{,\,k}$$

(запятая в нижнем индексе обозначает дифференцирование по пространственной переменной x_k). Пусть функции

$$w^{(k)}(t) \in \overset{\circ}{J}{}^1_2(B(x_0, R)) + v^{(k)}(t), \qquad k = 1, 2,$$

– решения следующих линейных задач

$$\int\limits_{B(x_0,R)} \frac{\partial^2 D}{\partial \varepsilon^2}\big((\varepsilon(v(t)))_{x_0,R}\big)\varepsilon\left(w^{(k)}(t)\right) : \varepsilon(u) = 0, \qquad \forall\, u \in \overset{\circ}{J}{}^1_2(B(x_0, R)). \tag{3.1}$$

Здесь $\overset{\circ}{J}{}^1_2(B(x_0,R))$ – замыкание множества $\overset{\bullet}{J}{}^\infty(B(x_0,R))$ относительно нормы $\|\nabla v\|_{B(x_0,R)}$. Решение задачи (3.1) существует и единственно, а условия (1.6) и (2.3) гарантируют выполнение двух оценок (см., например, [15])

$$\int\limits_{B(x_0,\rho)} \left|\nabla w^{(k)}(t)\right|^2 dx \leqslant$$
$$\leqslant c_1\left(\frac{\rho}{R}\right)^2 \int\limits_{B(x_0,R)} \left|\nabla w^{(k)}(t)\right|^2 dx, \quad 0<\rho\leqslant R, \tag{3.2}$$

и

$$\int\limits_{B(x_0,\rho)} \left|\nabla w^{(k)}(t)-\left(\nabla w^{(k)}(t)\right)_{x_0,\rho}\right|^2 dx \leqslant$$
$$\leqslant c_1\left(\frac{\rho}{R}\right)^{2+2} \int\limits_{B(x_0,R)} \left|\nabla w^{(k)}(t)-\left(\nabla w^{(k)}(t)\right)_{x_0,R}\right|^2 dx, \tag{3.3}$$
$$0<\rho\leqslant R,$$

с постоянной c_1, зависящей только от ν и L. Элементарные преобразования позволяют получить из (3.2) и (3.3) следующие неравенства

$$\int\limits_{B(x_0,\rho)} \left|\nabla v^{(k)}(t)\right|^2 dx \leqslant c_2\Bigg\{\left(\frac{\rho}{R}\right)^2 \int\limits_{B(x_0,R)} \left|\nabla v^{(k)}(t)\right|^2 dx +$$
$$+\int\limits_{B(x_0,R)} \left|\nabla v^{(k)}(t)-\nabla w^{(k)}(t)\right|^2 dx\Bigg\} \tag{3.4}$$

и

$$\int\limits_{B(x_0,\rho)} \left|\nabla v^{(k)}(t)-\left(\nabla v^{(k)}(t)\right)_{x_0,\rho}\right|^2 dx \leqslant$$
$$\leqslant c_2\Bigg\{\left(\frac{\rho}{R}\right)^4 \int\limits_{B(x_0,R)} \left|\nabla v^{(k)}(t)-\left(\nabla v^{(k)}(t)\right)_{x_0,R}\right|^2 dx + \tag{3.5}$$

$$+\int\limits_{B(x_0,R)} \left|\nabla v^{(k)}(t) - \nabla w^{(k)}(t)\right|^2 dx\Big\}$$

для $0<\rho\leqslant R$ и $c_2=c_2(c_1)$. Далее, мы имеем тождество для $v^{(k)}$

$$\int\limits_{B(x_0,R)} \varepsilon(u) : \frac{\partial^2 D}{\partial \varepsilon^2}\left(\varepsilon(v(t))\right)\varepsilon\left(v^{(k)}(t)\right)dx =$$

$$= -\int\limits_{B(x_0,R)} \left(\partial_t\, v_{,\,k}(t) + \left(v_s(t)\, v_{,\,s}(t)\right)_{,\,k} - g_{,\,k}(t)\right)\cdot u\, dx, \tag{3.6}$$

верное для всех $u \in \overset{\circ}{J}{}^1_2(B(x_0,R))$.

Полагая $u = v^{(k)}(t) - w^{(k)}(t)$, выводим из (3.1) и (3.6) следующие соотношения

$$2\nu \int\limits_{B(x_0,R)} \left|\varepsilon(v^{(k)}(t) - w^{(k)}(t))\right|^2 dx \leqslant \int\limits_{B(x_0,R)} \varepsilon\left(v^{(k)}(t) - w^{(k)}(t)\right) :$$

$$\frac{\partial^2 D}{\partial \varepsilon^2}\left((\varepsilon(v(t)))_{x_0,R}\right)\left(\varepsilon(v^{(k)}(t) - u^{(k)}(t))\right)dx = (\text{см. } (3.1)) =$$

$$= \int\limits_{B(x_0,R)} \varepsilon(v^{(k)}(t)) : \frac{\partial^2 D}{\partial \varepsilon^2}\left((\varepsilon(v(t)))_{x_0,R}\right)\varepsilon\left(v^{(k)}(t) - u^{(k)}(t)\right)dx =$$

$$= (\text{см. } (3.6)) = \int\limits_{B(x_0,R)} \varepsilon\left(v^{(k)}(t) - u^{(k)}(t)\right) :$$

$$\left(\frac{\partial^2 D}{\partial \varepsilon^2}((\varepsilon(v(t)))_{x_0,R}) - \frac{\partial^2 D}{\partial \varepsilon^2}(\varepsilon(v(t)))\right)\varepsilon(v^{(k)}(t))dx-$$

$$-\int\limits_{B(x_0,R)} (\partial_t v_{,\,k}(t) + (v_s(t)\, v_{,\,s}(t))_{,\,k} - g_{,\,k}(t))\cdot\left(v^{(k)}(t) - w^{(k)}(t)\right)dx =$$

$$= \int\limits_{B(x_0,R)} \varepsilon\left(v^{(k)}(t) - w^{(k)}(t)\right) :$$

$$\left(\frac{\partial^2 D}{\partial \varepsilon^2}((\varepsilon(v(t)))_{x_0,R}) - \frac{\partial^2 D}{\partial \varepsilon^2}\left(\varepsilon(v(t))\right)\right)\varepsilon(v^{(k)}(t))dx+$$

$$+ \int\limits_{B(x_0,R)} \Big(\partial_t v(t) + v_s(t) v_{,\,s}(t) - g(t) - (\partial_t v(t) + v_s(t) v_{,\,s}(t) - g(t))_{x_0,R}\Big) \cdot$$

$$\cdot \Big(v^{(k)}(t) - w^{(k)}(t)\Big)_{,k}\, dx. \tag{3.7}$$

Теперь выберем две произвольные подобласти $\Omega' \Subset \Omega'' \Subset \Omega$ и будем считать, что $x_0 \in \Omega'$ и $B(x_0,R) \Subset \Omega''$. В силу теоремы 2.1 (см. (2.5) и (2.6))

$$v \in C^{5/4}\left(\overline{Q}''_{\delta,T}\right), \quad \nabla \partial_t v \in L_\infty\left(\delta, T; L_2(\Omega''; \mathbb{R}^4)\right). \tag{3.8}$$

Здесь $Q''_{\delta,T} = \Omega'' \times]\,\delta, T\,[$. Теперь из (3.7), неравенства Пуанкаре и равенства

$$2 \int\limits_{B(x_0,R)} |\varepsilon(u)|^2\, dx = \int\limits_{B(x_0,R)} |\nabla u|^2\, dx, \quad \forall\, u \in \overset{\circ}{J}{}^1_2(B(x_0,R)), \tag{3.9}$$

выводим оценку

$$\int\limits_{B(x_0,R)} |\nabla v^{(k)}(t) - \nabla u^{(k)}|^2 dx \leqslant c_3 \Big\{ R^2 \int\limits_{B(x_0,R)} |\nabla \partial_t v(t)|^2\, dx +$$

$$+ R^2 \int\limits_{B(x_0,R)} |\nabla g(t)|^2\, dx + R^{1/2} \|\nabla v(t)\|^2_{C^{1/4}(\overline{B}(x_0,R))} \int\limits_{B(x_0,R)} |\nabla v^{(k)}(t)|^2\, dx +$$

$$+ R^2 \|v(t)\|^4_{C^1(\overline{B}(x_0,R))} \Big\} \leqslant (\text{см. } (3.8)) \leqslant \tag{3.10}$$

$$\leqslant c_4(c_3, v, \delta, \Omega'', g) \Big[R^2 + R^{1/2} \int\limits_{B(x_0,R)} |\nabla v^{(k)}(t)|^2\, dx \Big],$$

в которой постоянная c_3 не зависит от x_0, R, t и v. Отсюда, а также из неравенства (3.4), следует, что

$$\int\limits_{B(x_0,R)} |\nabla v^{(k)}(t)|^2\, dx \leqslant$$

$$\leqslant c_5(c_2, c_4) \Big\{ \Big[\Big(\frac{\rho}{R}\Big)^2 + R^{1/2} \Big] \int\limits_{B(x_0,R)} |\nabla v^{(k)}(t)|^2\, dx + R^2 \Big\},$$

$$0 < \rho \leqslant R < \operatorname{dist}\{\Omega', \partial\Omega''\}.$$

Известные рассуждения (см., например, [13]) позволяют заключить, что для любого числа $\gamma > 0$ существуют положительные числа R_0 и c_6, зависящие только от c_5, γ и $\operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega'')$ и такие, что

$$\int\limits_{B(x_0,R)} |\nabla v^{(k)}(t)|^2\,dx \leqslant c_6 \rho^{2-\gamma} \Bigg[\int\limits_{\Omega''} |\nabla v^{(k)}(t)|^2\,dx + 1 \Bigg], \qquad (3.11)$$

для всех $x_0 \in \Omega'$, $0 < \rho \leqslant R_0$ и п.в. $t \in]\,\delta, T\,[$. Объединяя оценки (3.10) и (3.11), приходим к неравенству

$$\int\limits_{B(x_0,R)} |\nabla v^{(k)}(t) - \nabla w^{(k)}(t)|^2\,dx \leqslant c_7(c_4, c_6)\left\{ R^2 + R^{1/4+2-\gamma} \right\}.$$

Положим $\gamma = \frac{1}{4}$ и воспользуемся оценкой (3.5). В результате суммирования по k от 1 до 2, получаем

$$\int\limits_{B(x_0,R)} |\nabla^2 v(t) - (\nabla^2 v(t))_{x_0,\rho}|^2\,dx \leqslant$$

$$\leqslant c_8(c_2, c_7)\left\{ R^2 + \left(\frac{\rho}{R}\right)^4 \int\limits_{B(x_0,R)} |\nabla^2 v(t) - (\nabla^2 v(t))_{x_0,R}|^2\,dx \right\}, \quad 0 < \rho \leqslant R_0.$$

Аргументы, которые были использованы при выводе (3.11), и тот факт, что $\nabla^2 v \in L_\infty(\delta, T; (L_2(\Omega''; \mathbb{R}^8))$ ведут к оценке

$$\int\limits_{B(x_0,\rho)} |\nabla^2 v(t) - (\nabla^2 v(t))_{x_0,\rho}|^2\,dx \leqslant$$

$$\leqslant c_{10}\left(c_8, \|\nabla^2 v\|_{L_\infty(\delta,T;L_2(\Omega'',\mathbb{R}^8))}\right)\rho^2,$$

выполненной для всех $0 < \rho \leqslant R_0$, всех $x_0 \in \Omega'$ и п.в. $t \in]\,\delta, T\,[$. Она влечет включение

$$\nabla^2 v \in L_\infty(\delta, T; \mathrm{BMO}\,(\Omega'; \mathbb{R}^8)).$$

Теорема 2.2 доказана.

§4. Доказательство теоремы 2.3.

Утверждение теоремы 2.3 вытекает из двух ниже доказываемых лемм 4.1 и 4.2.

Лемма 4.1. *Пусть выполнены все условия теоремы* 2.3. *Тогда для любого числа* $\delta > 0$, *любой подобласти* $\Omega' \Subset \Omega$ *и любого натурального числа* l

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\delta\leqslant t\leqslant T}\|\nabla^l v(t)\|^2_{\Omega'} + \|\nabla^{l+1} v\|_{Q'_{\delta,T}} < +\infty. \tag{4.1}$$

Доказательство леммы 4.1. Применим метод математической индукции. Его база при $l = 1$ и 2 уже доказаны. Допустим теперь, что утверждение (4.1) верно при $l = 1, 2, \dots, s$, где $s \geqslant 2$. Нам надо доказать, что оно верно и при $l = s + 1$.

Мы будем доказывать оценку (4.1) для $l = s+1$ как априорную, т.е. предполагая, что

$$\nabla^{s+1} v \in L_{\infty,\mathrm{loc}}\left(0, T, L_{2,\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbb{R}^{2^{s+1}})\right),$$

$$\nabla^{s+2} v \in L_{2,\mathrm{loc}}\left(Q_T; \mathbb{R}^{2^{s+2}}\right),$$

оценим правую часть в (4.1) через те нормы решения, которые конечны по индуктивному предположению. Соответствующие рассуждения нетрудно превратить в строгое доказательство, используя метод конечных разностей. Мы оставляем это заинтересованному читателю.

Итак, пусть подобласть Ω'' удовлетворяет условию $\Omega' \Subset \Omega'' \Subset \Omega$. В силу теоремы 2.2, индуктивного предположения и теорем вложения (см. [16]) имеем

$$\nabla^2 v \in L_\infty\left(\frac{\delta}{2}, T; \mathrm{BMO}(\Omega''; \mathbb{R}^8)\right), \quad s = 2,$$

$$\nabla^{s-1} v \in L_\infty\left(\frac{\delta}{2}, T; \mathrm{BMO}(\Omega''; \mathbb{R}^{2^s})\right), \quad s \geqslant 3, \tag{4.2}$$

$$\nabla^{s-2} v \in L_\infty\left(Q''_{\delta/2,T}; \mathbb{R}^{2^{s-1}}\right), \quad s \geqslant 4,$$

и

$$\nabla^s v \in L_4\left(Q''_{\delta/2,T}; \mathbb{R}^{2^{s+1}}\right), \quad s \geqslant 2. \tag{4.3}$$

Введем обозначение

$$w(t) \equiv v_{,k_1 k_2 \ldots k_s}(t) \equiv \frac{\partial^s v(t)}{\partial x_{k_1} \partial x_{k_2} \ldots \partial x_{k_s}},$$

где индексы $k_1, k_2, \ldots, k_s$ принимают только два значения: 1 или 2.

Имеем тождество

$$\int\limits_{\Omega''} \{\partial_t w(t) \cdot u - u \cdot \operatorname{div} \Gamma(t)\}\, dx =$$

$$= \int\limits_{\Omega''} \{-(v_j(t)\, v_{,j}(t))_{,k_1 k_2 \ldots k_s} + g_{,k_1 k_2 \ldots k_s}(t)\} \cdot u\, dx \qquad (4.4)$$

для всех $u \in \overset{\bullet}{J}{}^{\infty}(\Omega'')$, где

$$\Gamma(t) \equiv \sigma(t)_{,k_1 k_2 \ldots k_s}, \quad \sigma = \frac{\partial D}{\partial \varepsilon}(\varepsilon(v)). \qquad (4.5)$$

Выберем пробную функцию следующим образом

$$u = \operatorname{curl}^*(\varphi^2 \operatorname{curl} w(t)). \qquad (4.6)$$

Здесь $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ – срезающая функция, удовлетворяющая условиям

$$0 \leqslant \varphi \leqslant 1 \quad \text{в} \quad \Omega'', \quad \operatorname{spt} \varphi \subset \Omega'', \quad \varphi \equiv 1 \quad \text{в} \quad \Omega',$$

а дифференциальные операторы curl и curl* определяются соотношениями

$$\operatorname{curl} u = u_{2,1} - u_{1,2}, \quad \operatorname{curl}^* \psi = (\psi_{,2}, -\psi_{,1}). \qquad (4.7)$$

Нетрудно проверить равенство

$$u = -\varphi^2 \Delta w(t) + \operatorname{curl}^* \varphi^2 \operatorname{curl} w(t) =$$
$$= -2\varphi^2 \operatorname{div} \varepsilon(w(t)) + \operatorname{curl}^* \varphi^2 \operatorname{curl} w(t). \qquad (4.8)$$

Имеем

$$\int\limits_{\Omega''} \partial_t w(t) \cdot u\, dx = \frac{1}{2} \partial_t \int\limits_{\Omega''} \varphi^2 |\operatorname{curl} w(t)|^2\, dx \qquad (4.9)$$

и

$$-\int\limits_{\Omega''} u \cdot \operatorname{div} \Gamma(t)\, dx = (\text{см. } (4.8)) =$$

$$= -\int\limits_{\Omega''} \left(\varphi^2 \Delta w(t) + \operatorname{curl}^* \varphi^2 \operatorname{curl} w(t)\right) \cdot \operatorname{div} \Gamma(t)\, dx \geqslant$$

$$\geqslant -c_2 \int\limits_{\Omega''} |\nabla \varphi^2|\; |\nabla w(t)|\; |\nabla \Gamma(t)|\, dx + \int\limits_{\Omega''} \varphi^2\, w_{i,kk}(t) \Gamma_{ij,j}(t)\, dx = \tag{4.10}$$

$$= -c_2 \int\limits_{\Omega''} |\nabla \varphi^2|\; |\nabla w(t)|\; |\nabla \Gamma(t)|\, dx - \int\limits_{\Omega''} \varphi^2_{,k}\, w_{i,k}(t) \Gamma_{ij,j}(t)\, dx +$$

$$+ \int\limits_{\Omega''} \varphi^2_{,j}\, w_{i,k}(t) \Gamma_{ij,k}(t)\, dx + \int\limits_{\Omega''} \varphi^2\, w_{i,jk}(t) \Gamma_{ij,k}(t)\, dx \geqslant$$

$$\geqslant -c_3 \int\limits_{\Omega''} |\nabla \varphi^2|\; |\nabla w(t)|\; |\nabla \Gamma(t)|\, dx + \int\limits_{\Omega''} \varphi^2 \varepsilon(w_{,j}(t)) \Gamma_{,j}(t)\, dx.$$

Для $\Gamma_{,j}$ верно представление

$$\Gamma_{,j} = \sigma_{,j k_1 k_2 \ldots k_s} = \left(\frac{\partial^2 D}{\partial \varepsilon^2}(\varepsilon(v)) \varepsilon(v_{,j})\right)_{,k_1 k_2 \ldots k_s} =$$

$$= \frac{\partial^2 D}{\partial \varepsilon^2}(\varepsilon(v)) \varepsilon(w_{,j}) + A_{j k_1 k_2 \ldots k_s}$$

и, таким образом, неравенство (4.10) можно привести к виду

$$\begin{gathered} -\int\limits_{\Omega''} u \cdot \operatorname{div} \Gamma(t)\, dx \geqslant c_4 \int\limits_{\Omega''} \varphi^2 \varepsilon(w_{,j}(t)) : \varepsilon(w_{,j}(t))\, dx - \\ - c_5 \left[\int\limits_{\Omega''} |\nabla^{s+1} v(t)|^2\, dx + \int\limits_{\Omega''} \varphi^2 A_{j k_1 k_2 \ldots k_s}(t) : A_{j k_1 k_2 \ldots k_s}(t)\, dx\right] \geqslant \\ \geqslant c_6 \int\limits_{\Omega''} \varphi^2 |\nabla^{s+2} v(t)|^2\, dx - c_7 \int\limits_{\Omega''} \Big[\, |\nabla^{s+1} v(t)|^2 + \\ + \varphi^2 A_{j k_1 k_2 \ldots k_s}(t)\, A_{j k_1 k_2 \ldots k_s}(t)\Big]\, dx. \end{gathered} \tag{4.11}$$

Постоянная c_6 в (4.11) положительна.

Далее, для правой части в (4.4) мы имеем

$$\Bigl|\int\limits_{\Omega''} u\cdot g_{,k_1 k_2\ldots k_s}(t)\,dx\Bigr| = \Bigl|\int\limits_{\Omega''} \bigl(\operatorname{curl} g(t)\bigr)_{,k_1 k_2\ldots k_s}\varphi^2 \operatorname{curl} w(t)\Bigr| \leqslant$$

$$\leqslant c_8\Bigl[\int\limits_{\Omega''} |\nabla^{s+1} v(t)|^2\,dx + 1\Bigr] \tag{4.12}$$

и

$$\Bigl|\int\limits_{\Omega''} (v_j(t)\,v_{,j}(t))_{,k_1 k_2\ldots k_s}\cdot u\,dx\Bigr| = (\text{см. } (4.8)) =$$

$$\Bigl|\int\limits_{\Omega''} (v_j(t)\,v_{,j}(t))_{,k_1 k_2\ldots k_s}\cdot \bigl(-\varphi^2\Delta w(t) + \operatorname{curl}\varphi^2 \operatorname{curl} w(t)\bigr)\,dx\Bigr| \leqslant$$

$$\leqslant c_9\Bigl(\int\limits_{\Omega''}\varphi^2|\nabla^{s+2} v(t)|^2 dx + \int\limits_{\Omega''}|\nabla^{s+1} v(t)|^2 dx\Bigr)^{1/2}\times \tag{4.13}$$

$$\times\int\limits_{\Omega''}(v_j(t)\,v_{,j}(t))_{,k_1 k_2\ldots k_s}\cdot (v_j(i)\,v_{,i}(t))_{,k_1 k_2\ldots k_s}\,dx\Bigr)^{1/2}.$$

Обозначим последний сомножитель в правой части (4.13) через I и оценим его, используя (2.5) и (4.2). В результате будем иметь

$$I \leqslant c_{10}\Bigl(\int\limits_{\Omega''}|\nabla^{s+1} v(t)|^2\,dx + 1\Bigr)^{1/2}. \tag{1.14}$$

При выводе последней оценки мы воспользовались суммируемостью функции класса BMO с любым конечным показателем.

Объединяя соотношения (4.4), (4.9), (4.11)–(4.14) и используя неравенство Юнга, получаем

$$\partial_t\int\limits_{\Omega''}\varphi^2|\operatorname{curl} w(t)|^2\,dx + c_{11}\int\limits_{\Omega''}\varphi^2|\nabla^{s+2} v(t)|^2\,dx \leqslant$$

$$\leqslant c'_{11}\Bigl\{\int\limits_{\Omega''}\Bigl[|\nabla^{s+1} v(t)|^2 + \varphi^2 A_{j k_1 k_2\ldots k_s}(t) : A_{j k_1 k_2\ldots k_s}(t)\,dx\Bigr]dx + 1\Bigr\}.$$

Заметим еще, что

$$\int\limits_{\Omega''} \varphi^2 |\operatorname{curl} w(t)|^2\,dx \geqslant c_{12}\Big\{ \int\limits_{\Omega''} \varphi^2 |\nabla\, w(t)|^2\,dx - \int\limits_{\Omega''} |w(t)|^2\,dx \Big\} =$$

$$= c_{12}'\Big\{ \int\limits_{\Omega''} \varphi^2 |\nabla^{s+1} v(t)|^2 - \int\limits_{\Omega''} |\nabla^s\, v(t)|^2\,dx \Big\}.$$

Осталось умножить неравенство (4.15) на срезающую по t функцию

$$\chi(t) = \begin{cases} 0, & t \leqslant \dfrac{\delta}{2}, \\ \dfrac{t-\delta/2}{\delta/2}, & \dfrac{\delta}{2} \leqslant t \leqslant \delta, \\ 1, & t \geqslant \delta \end{cases}$$

и получить

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\delta/2\leqslant t\leqslant T} \chi(t) \|\varphi \nabla^{s+1}\, v(t)\|^2_{\Omega''} + \int\limits_{\delta/2}^{T} \chi(t) \|\varphi \nabla^{s+2}\, v(t)\|^2_{\Omega''}\,dt \leqslant$$

$$\leqslant c_{13}\Big\{ \operatorname*{ess\,sup}_{\delta/2\leqslant t\leqslant T} \|\nabla^s\, v(t)\|^2_{\Omega''} + \|\nabla^{s+1}\, v\|^2_{Q''_{\delta/2,T}} + \tag{4.16}$$

$$+ \int\limits_{Q''_{\delta/2,T}} \chi\, \varphi^2\, A_{j\,k_1\,k_2\ldots k_s}(t) : A_{j\,k_1\,k_2\ldots k_s}(t)\,dx\,dt + 1 \Big\} \leqslant$$

$$\leqslant (\text{см. } (4.2)) \leqslant c_{14}\Big\{ 1 + \int\limits_{Q''_{\delta/2,T}} \chi \varphi^2\, A_{j\,k_1\,k_2\ldots k_s}(t) : A_{j\,k_1\,k_2\ldots k_s}(t)\,dx\,dt \Big\}.$$

Лемма будет доказана, если мы должным образом оценим интеграл

$$I_s \equiv \int\limits_{Q''_{\delta/2,T}} \chi\, \varphi^2\, A_{j\,k_1\,k_2\ldots k_s}(t) : A_{j\,k_1\,k_2\ldots k_s}(t)\,dx\,dt.$$

Согласно (4.2) для этого достаточно оценить $A_{jk_1k_2\ldots k_s}$ через $\nabla^{s+1} v$, $\nabla^s v$ и $\nabla^{s-1} v$ ($s \geqslant 3$), поскольку младшие градиенты ограничены на $Q''_{\delta/2,T}$. Отсюда, в частности, видно, что наиболее трудными случаями будут $s = 2$ и $s = 3$, для которых верны неравенства

$$\left|A_{jk_1k_2}\right| \leqslant c_{15}\left[\,|\nabla^3 v|\ |\nabla^2 v| + |\nabla^2 v|^3\,\right], \quad s = 2,$$

$$\left|A_{jk_1k_2k_3}\right| \leqslant c_{16}\left[\,|\nabla^4 v|\ |\nabla^2 v| + |\nabla^3 v|^2 + |\nabla^3 v|\ |\nabla^2 v|^2 + |\nabla^2 v|^4\,\right], \quad s = 3.$$

Рассмотрим детально случай $s = 2$. Для $s \geqslant 3$ рассуждения совершенно аналогичны. Имеем

$$I_2 \leqslant c_{17} \int\limits_{Q''_{\delta/2,T}} \chi\varphi^2\left[\,|\nabla^3 v|^2\ |\nabla^2 v|^2 + |\nabla^2 v|^6\right] dx\,dt \leqslant$$

$$\leqslant c'_{17}\left\{\int\limits_{\delta/2}^{T} dt\chi(t)\left(\int\limits_{\Omega''} |\varphi\nabla^3 v(t)|^4\,dx\right)^{1/2}\left(\int\limits_{\Omega''} |\nabla^2 v(t)|^4\,dx\right)^{1/2} + \right.$$

$$\left. + \operatorname*{ess\,sup}_{\delta/2\leqslant t\leqslant T} \|\nabla^2 v(t)\|^6_{6,\Omega''}\right\}.$$

В силу (2.7) и теорем вложения

$$\nabla^2 v \in L_\infty\left(\frac{\delta}{2}, T; L_6(\Omega'', \mathbb{R}^8)\right)$$

и, следовательно,

$$I_2 \leqslant c_{18}\left\{\int\limits_{\delta/2}^{T} dt\chi(t)\left(\int\limits_{\Omega''} |\varphi\nabla^3 v(t)|^4\,dx\right)^{1/2} + 1\right\}.$$

Воспользуемся мультипликативным неравенством (см. [8])

$$\left(\int\limits_{\Omega''} |\varphi\nabla^3 v(t)|^4\,dx\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant c_{19}\left(\int\limits_{\Omega''} |\nabla(\varphi\nabla^3 v(t)|^2\,dx\right)^{1/2}\left(\int\limits_{\Omega''} |\varphi\nabla^3 v(t)|^2\,dx\right)^{1/2}.$$

В результате будем иметь ($s = 2$)

$$I_2 \leqslant c_{20}\left[\int\limits_{\delta/2}^{T} dt\chi(t)\,dt\left(\int\limits_{\Omega''} \varphi^2|\nabla^{s+2} v(t)|^2 + |\nabla\varphi|^2\,|\nabla^{s+1} v(t)|^2\,dx\right)^{1/2} \times\right.$$

$$\times\Big(\int\limits_\Omega |\varphi\,\nabla^{s+1}v(t)|^2\,dx\Big)^{1/2}+1\Big]\leqslant$$

$$\leqslant c'_{20}\Big\{\Big(\int\limits_{\delta/2}^{T}\chi(t)\,\varphi^2\|\nabla^{s+2}v(t)\|^2_{\Omega''}dt\Big)^{1/2}\times$$

$$\times\Big(\int\limits_{\delta/2}^{T}\chi(t)\,\varphi^2\|\nabla^{s+1}v(t)\|^2_{\Omega''}dt\Big)^{1/2}+$$

$$+\|\nabla^{s+1}v\|^2_{Q''_{\delta/2,T}}+1\Big\}\leqslant(\text{см. }(4.2))\leqslant$$

$$\leqslant c_{21}\Big[\Big(\int\limits_{\delta/2}^{T}\chi(t)\,\varphi^2\|\nabla^{s+2}v(t)\|^2_{\Omega''}dt\Big)^{1/2}+1\Big].$$

Отсюда и из (4.16), а также из неравенства Юнга, вытекает справедливость индуктивного перехода при $s=2$. Случай $s\geqslant 3$ рассматривается аналогично. Лемма 4.1 доказана.

Лемма 4.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.3. *Тогда для любого числа* $\delta>0$, *любой подобласти* Ω' *и любого натурального числа* l *мы имеем*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\delta\leqslant t\leqslant T}\|\nabla^l\,\partial_t\,v(t)\|^2_{\Omega'}+\|\nabla^{l+1}\,\partial_t\,v\|^2_{Q'_{\delta,T}}<+\infty. \tag{4.17}$$

Доказательство. Еще раз применяем метод индукции, база которого при $l=1$ уже доказана (см. теорему 2.1). Итак, мы предполагаем, что утверждение (4.17) верно при $l=1,2,\dots,s$, $s\geqslant 1$, и нам надо доказать его справедливость при $l=s+1$.

Сначала сделаем важное замечание. Пусть число $\delta>0$ и подобласти $\Omega'\Subset\Omega''\Subset\Omega$ выбраны произвольно и зафиксированы. Согласно лемме 4.1 можно утверждать, что

$$\nabla^l v\in L_\infty\left(Q''_{\delta/2,T};\mathbb{R}^{2^{l+1}}\right),\quad l=1,2,\dots,s+2. \tag{4.18}$$

Как и в лемме 4.1 будем доказывать оценку

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\delta\leqslant t\leqslant T}\|\nabla^{s+1}\,\partial_t\,v(t)\|^2_{\Omega'}+\|\nabla^{s+2}\,\partial_t\,v\|^2_{Q'_{\delta,T}}<+\infty \tag{4.19}$$

как априорную. Полное доказательство нетрудно получить, применяя метод конечных разностей. Воспользуемся обозначениями, введенными при доказательстве леммы 4.1 (см. 4.5). Имеем тождество

$$\int\limits_{\Omega''} \left\{ \partial_t^2\, w(t) \cdot u - u \cdot \operatorname{div} \partial_t \Gamma(t) \right\}\, dx =$$

$$= \int\limits_{\Omega''} \{ -\partial_t (v_j(t)\, v_{,j}(t))_{,k_1 k_2 \ldots k_s} + \partial_t\, g_{,k_1 k_2 \ldots k_s}(t) \} \cdot u\, dx \tag{4.20}$$

для всех $u \in \overset{\bullet}{J}{}^{\infty}(\Omega'')$. Выберем пробную функцию u следующим образом

$$u = \operatorname{curl}^* \bigl(\varphi^2 \operatorname{curl} \partial_t\, w(t) \bigr).$$

Срезающая функция φ та же, что и в лемме 4.1. Далее,

$$\int\limits_{\Omega''} \partial_t^2\, w(t) \cdot u\, dx = \frac{1}{2} \partial_t \int\limits_{\Omega''} \varphi^2 |\operatorname{curl} \partial_t\, w(t)|^2\, dx \tag{4.21}$$

и

$$- \int\limits_{\Omega''} u \cdot \operatorname{div}\, \partial_t \Gamma(t)\, dx \geqslant (\text{см. } (4.8) \text{ и } (4.10)) \geqslant$$

$$\geqslant -c_{22} \int\limits_{\Omega''} |\nabla \varphi^2|\, |\partial_t\, w(t)|\, |\nabla \partial_t \Gamma(t)|\, dx +$$

$$+ \int\limits_{\Omega''} \varphi^2\, \varepsilon\bigl(\partial_t\, w_{i,j}(t)\bigr) : \partial_t\, \Gamma_{,j}(t)\, dx,$$

где

$$\partial_t \Gamma_{,j} = \partial_t\, \sigma_{,j k_1 k_2 \ldots k_s} =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 D}{\partial \varepsilon^2} (\varepsilon(v)) \varepsilon\bigl(\partial_t\, v_{,j} \varepsilon(\partial_t v_{,j})\bigr) + \left(\frac{\partial^3 D}{\partial \varepsilon^3} (\varepsilon(v)) \varepsilon(v_{,j}) \right) \varepsilon(\partial_t\, v) \right)_{,k_1 k_2 \ldots k_s} =$$

$$= \frac{\partial^2 D}{\partial \varepsilon^2} (\varepsilon(v)) \varepsilon\bigl(\partial_t\, w_{,j}\bigr) + \overline{A}_{j k_1 k_2 \ldots k_s}.$$

Теперь из (4.21) получаем оценку, аналогичную (4.11),

$$- \int\limits_{\Omega''} u \cdot \operatorname{div}\, \partial_t\, \Gamma(t)\, dx \geqslant c_{23} \int\limits_{\Omega''} \varphi^2 |\nabla^{s+2}\, \partial_t\, v(t)|^2\, dx -$$

$$-c_{24}\int\limits_{\Omega''}\left[|\nabla^{s+1}\,\partial_t\,v(t)|^2+\varphi^2\,\overline{A}_{j\,k_1\,k_2\ldots k_s}(t):\overline{A}_{j\,k_1\,k_2\ldots k_s}(t)\right]dx,$$

$$c_{23}>0. \tag{4.22}$$

Нетрудно видеть, что в силу (4.18) мы имеем

$$\int\limits_{\Omega''}\varphi^2\,\overline{A}_{j\,k_1\,k_2\ldots k_s}(t):\overline{A}_{j\,k_1\,k_2\ldots k_s}(t)\leqslant c_{25}\bigg(\sum_{l=1}^{s+1}\big\|\nabla^l\,\partial_t\,v(t)\big\|^2_{\Omega''}+1\bigg)\leqslant$$

$$\leqslant (\text{см. индуктивные предположения})\leqslant c_{26}\left(\big\|\nabla^l\,\partial_t\,v(t)\big\|^2_{\Omega''}+1\right).$$

Таким образом, оценка (4.22) может быть приведена к виду

$$-\int\limits_{\Omega''}u\cdot\operatorname{div}\,\partial_t\,\Gamma(t)\,dx\geqslant$$

$$\geqslant c_{23}\int\limits_{\Omega''}\varphi^2|\nabla^{s+2}\,\partial_t\,v(t)|^2\,dx-c_{27}\left(\big\|\nabla^l\,\partial_t\,v(t)\big\|^2_{\Omega''}+1\right). \tag{4.23}$$

Правая часть в (4.20) легко оценивается при помощи (4.18) и индуктивных предположений. Действительно,

$$\left|\int\limits_{\Omega''}\Big\{-\partial_t\big(v_j(t)\,v_{,j}(t)\big)_{,k_1k_2\ldots k_s}\cdot u+u\cdot\partial_t\,g_{,k_1k_2\ldots k_s}(t)\Big\}dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant c_{28}\bigg(\int\limits_{\Omega''}|\nabla^{s+1}\partial_t\,v(t)|^2\,dx+1\bigg)^{1/2}\times$$

$$\times\bigg(\int\limits_{\Omega''}\big(\varphi^2|\nabla^{s+2}\partial_t\,v(t)|^2+|\nabla^{s+1}\partial_t\,v(t)|^2\big)\,dx\bigg)^{1/2}+$$

$$+c_{29}\bigg(\int\limits_{\Omega''}|\nabla^{s+1}\,v(t)|^2\,dx+1\bigg)^{1/2}.$$

Объединяя оценки (4.21), (4.23) и (4.24), выводим при помощи неравенства Юнга из (4.20) следующее соотношение

$$\partial_t\int\limits_{\Omega''}\varphi^2\big|\operatorname{curl}\partial_t\,w(t)\big|^2\,dx+c_{30}\int\limits_{\Omega''}\varphi^2|\nabla^{s+2}\,\partial_t\,v(t)|^2\,dx\leqslant$$

$$\leqslant c_{31}\bigg(\int\limits_{\Omega''} |\nabla^{s+1}\,\partial_t\, v(t)|^2\,dx + 1\bigg).$$

Далее, надо повторить рассуждения леммы 4.1, заменяя v на $\partial_t v$, и получить

$$\int\limits_{\Omega''} \varphi^2 \big|\mathrm{curl}\,\partial_t\, w(t)\big|^2\,dx \geqslant$$

$$\geqslant c'_{12}\bigg[\int\limits_{\Omega''} \varphi^2 |\nabla^{s+1}\,\partial_t\, v(t)|^2\,dx - \int\limits_{\Omega''} |\nabla^{s}\,\partial_t\, v(t)|^2\,dx\bigg]$$

и

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\delta/2\leqslant t\leqslant T} \chi(t)\|\varphi\nabla^{s+1}\,\partial_t\, v(t)\|^2_{\Omega''} + \int\limits_{\delta/2}^{T} \chi(t)\|\varphi\nabla^{s+2}\,\partial_t\, v(t)\|^2_{\Omega''}\,dt \leqslant$$

$$\leqslant c_{32}\left[1 + \operatorname*{ess\,sup}_{\delta/2\leqslant t\leqslant T} \|\nabla^{s}\,\partial_t\, v(t)\|^2_{\Omega''} + \|\nabla^{s+1}\,\partial_t\, v\|^2_{Q''}\right],$$

где $\chi = \chi(t)$ – срезающая функция леммы 4.1. Отсюда вытекает (4.10). Лемма 4.2 доказана.

Литература

1. О. А. Ладыженская, *О нелинейных проблемах механики сплошных сред.* Труды Международного конгресса математиков (Москва, 1966), Наука, Москва (1968).
2. О. А. Ладыженская, *Новые уравнения для описания движения вязких несжимаемых жидкостей и глобальная разрешимость краевых задач для них.* — Труды МИАН СССР **102** (1967), 85–104.
3. О. А. Ладыженская, *О некоторых модификациях уравнения Навье–Стокса для больших градиентов скоростей.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **7** (1968), 126–154.
4. O. A. Ladyzhenskaya, G. A. Seregin, *On global stability of the two-dimensional visco-plastic flows.* — Jyväskyllä-St.-Petersburg Seminar on PDE's and Numerical Methods, Ber. Univ. Jyväskyllä Math. Inst. **56** (1993), 43–52.
5. O. A. Ladyzhenskaya, G. A. Seregin, *On semigroups generated by initial boundary value problems describing two-dimensional visco-plastic flows.* — Nonlinear evolution equations, Am. Math. Soc. Transl., Ser. 2 **164** (1995), 99–123.
6. M. Fuchs, G. A. Seregin, *Regularity results for the quasi-static Bingham variational inequality in dimensions two and three.* — Math. Z. **227** (1998), 525–541.
7. J. Serrin, *On the interior regularity of weak solutions of the Navier–Stokes equations.* — Arch. Ration. Mech. Anal. **9** (1962), 187–195.

8. О. А. Ладыженская, *Математичские вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости.* Первое русское изд., Москва (1961); Второе русское изд., Москва (1970).
9. L. Caffarelli, R. Kohn, L. Nirenberg, *Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier–Stokes equations.* — Comm. Pure Appl. Math. **35** (1982), 771-831.
10. O. A. Ladyzhenskaya, G. A. Seregin, *On disjointness of solutions to the MNS equations.* (to appear).
11. О. А. Ладыженская, Г. А. Серегин, *О гладкости решений систем, описывающих течения обобщенных ньютоновских жидкостей, и об оценке размерностей их аттракторов.* — Изв. РАН, Сер. матем. **62, No. 1** (1998), 56–122.
12. Г. А. Серегин, *Течение двумерной обобщенной ньютоновской жидкости.* — Алгебра и Анализ **9, No. 1** (1997), 163–196.
13. M. Giaquinta, *Multiple integrals in the calculus of variations and nonlinear elliptic systems.* — Ann. Math. Studies, Princeton Univ. Press **No. 105** (1983).
14. F. John, L. Nirenberg, *On functions of bounded mean oscillation.* — Comm. Pure Appl. Math **14** (1961), 415–426.
15. M. Fuchs, G. Seregin, *Some remarks on non-Newtonian fluids including nonconvex perturbations of the Bingham and Powell–Eyring model for viscoplastic fluids.* M^3AS, **7**, No. 3, 405–433, (1997).
16. О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.* Москва (1967).
17. Ch. B. Morrey, *Partial regularity results for non-linear elliptic systems.* Univ. of California, June 1967, pp. 1–34.

Ladyzhenskaya O. A., Seregin G. A. On reqularity of solutions to two-dimensional equations of the dynamics of fluids with nonlinear viscosity.

2D equations, describing the motion of generalized Newtonian fluids, are considered. It is shown that for smooth data of corresponding initial-boundary value problems any spatial derivative of the velocity field is a locally Lipschitz function.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 31 декабря 1998 г.