Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 259, 1999 г.

А. И. Назаров

ОБ "ОДНОМЕРНОСТИ" ЭКСТРЕМАЛИ В НЕРАВЕНСТВЕ ПУАНКАРЕ НА КВАДРАТЕ

1. Постановка задачи. Локальное исследование

Пусть $1 \leqslant q \leqslant \infty$. В настоящей работе рассматривается вопрос о равенстве точных констант в неравенствах Пуанкаре на отрезке $I = [0,1]$:

$$\lambda_q = \min \frac{\|u'\|_{L_2(I)}}{\|u\|_{L_q(I)}} \quad \text{при условии} \quad \int_I u\,dx = 0 \tag{1.1}$$

и на квадрате $K = I \times I$:

$$\widetilde{\lambda}_q = \min \frac{\|\nabla u\|_{L_2(K)}}{\|u\|_{L_q(K)}} \quad \text{при условии} \quad \int_K u\,dx\,dy = 0 \tag{1.2}$$

Замечание. Нахождение минимизирующей функции в (1.1) совершенно аналогично работе [1] сводится к минимизации интеграла

$$\int_R (\max(0, 1 + \mu x - |x|^q))^{\frac{1}{2}}\, dx. \tag{1.3}$$

В [1] показано, что при $q \leqslant 4 + \varepsilon$ минимум интеграла (1.3) достигается при $\mu = 0$, а график функции $f_q(x)$ – экстремали отношения (1.1) – центрально симметричен относительно точки $(1/2, 0)$. С другой стороны, при $q > 6$ минимум в (1.3) заведомо достигается при $\mu \neq 0$ и, соответственно, график $f_q(x)$ не обладает центральной симметрией.

При $q = 2$ из разложения функции u в ряд Фурье по полной ортогональной системе $\{\cos(\pi m x)\cos(\pi n y) \mid m, n \in \mathbb{Z}_+\}$ очевидно, что $\widetilde{\lambda}_q = \lambda_q = \pi$. Это, конечно, объясняется тем, что среди экстремалей отношения (1.2) есть "одномерные" функции (т.е. функции, зависящие от одной переменной – в данном случае $\cos(\pi x)$ и $\cos(\pi y)$), для которых отношения (1.1) и (1.2) совпадают.

Работа поддержана ФЦП "Интеграция" No. 326.53 и программой "Научные школы", грант No. 96-15-96121.

С другой стороны, как известно, $W_2^1(K)$ не вкладывается в $L_\infty(K)$. Поэтому при $q=\infty$ минимум отношения в (1.2) равен нулю, в то время как $\lambda_q>0$ при всех q (в частности, $\lambda_\infty=\sqrt{3}$).

Поскольку для "одномерных" функций отношения (1.1) и (1.2) совпадают, то, очевидно, $\widetilde{\lambda}_q\leqslant\lambda_q$ при всех q. Поэтому вопрос о совпадении минимумов можно переформулировать так: является ли функционал

$$J_q(u)=\int\limits_K|\nabla u|^2\,dxdy-\lambda_q^2\Bigl(\int\limits_K|u|^q\,dxdy\Bigr)^{2/q} \tag{1.4}$$

неотрицательным на подпространстве

$$\overline{W_2^1}(K)=\Bigl\{u\in W_2^1(K)\Bigm|\int\limits_K u\,dxdy=0\Bigr\}.$$

На функции $f_q(x)$ функционал J_q обращается в нуль. Подсчитаем его дифференциал в точке f_q.

$$\frac{1}{2}\cdot DJ_q(f_q;h)=\int\limits_K\langle\,\nabla f_q,\nabla h\,\rangle\,dxdy-\lambda_q^2\cdot\|f_q\|_q^{2-q}\cdot\int\limits_K|f_q|^{q-2}\cdot f_qh\,dxdy.$$

Разложим приращение $h(x,y)$ в сумму двух слагаемых:

$$h_1(x)=\int\limits_I f(x,y)\,dy;\qquad h_2(x,y)=h(x,y)-h_1(x).$$

Поскольку $h\in\overline{W_2^1}(K)$, то, очевидно, h_1, $h_2\in\overline{W_2^1}(K)$. Далее, по построению $\int\limits_I h_2(x,y)dy=0$ при всех $x\in I$.

Учитывая, что f_q зависит только от x, имеем

$$\int\limits_K|f_q|^{q-2}\cdot f_qh_2\,dxdy=0; \tag{1.5}$$

$$\int\limits_K\langle\,\nabla f_q,\nabla h_2\,\rangle\,dxdy=\int\limits_K f_{qx}h_{2x}\,dxdy=0. \tag{1.6}$$

Отсюда $DJ_q(f_q;h)=DJ_q(f_q;h_1)$.

Но на "одномерных" функциях из $\overline{W_2^1}(K)$ $J_q \geqslant 0$, поэтому $DJ_q(f_q)$ обращается в нуль на "одномерных" приращениях из $\overline{W_2^1}(K)$. Таким образом, $DJ_q(f_q;h) = 0$.

Подсчитаем второй дифференциал J_q в точке f_q.

$$\frac{1}{2} \cdot D^2 J_q(f_q;h,h) = \int\limits_K \langle \nabla h, \nabla h \rangle \, dxdy -$$

$$-\lambda_q^2(2-q) \cdot \|f_q\|_q^{2-2q} \cdot \Bigl(\int\limits_K |f_q|^{q-2} \cdot f_q h \, dxdy \Bigr)^2 -$$

$$-\lambda_q^2(q-1) \cdot \|f_q\|_q^{2-q} \cdot \int\limits_K |f_q|^{q-2} \cdot h^2 \, dxdy.$$

Аналогично (1.5) и (1.6) имеем

$$\int\limits_K |f_q|^{q-2} \cdot h_1 h_2 \, dxdy = 0; \qquad (1.7)$$

$$\int\limits_K \langle \nabla h_1, \nabla h_2 \rangle \, dxdy = \int\limits_K h_{1x} h_{2x} \, dxdy = 0. \qquad (1.8)$$

Из (1.5), (1.7) и (1.8) видно, что

$$D^2 J_q(f_q;h,h) = D^2 J_q(f_q;h_1,h_1) + D^2 J_q(f_q;h_2,h_2).$$

В силу неотрицательности функционала J_q на "одномерных" функциях его второй дифференциал в точке f_q неотрицателен на "одномерных" приращениях из $\overline{W_2^1}(K)$. Поэтому вопрос о неотрицательности $D^2 J_q(f_q;h,h)$ сводится к вопросу о неотрицательности $D^2 J_q(f_q;h_2,h_2)$.

Будем теперь считать для упрощения записи, что функция f_q нормирована в $L_q(I)$.

Заметим, что $\frac{1}{2} \cdot D^2 J_q(f_q;h_2,h_2)$ – это квадратичная форма оператора

$$-\Delta - \lambda_q^2(q-1) \cdot |f_q|^{q-2}$$

при краевых условиях Неймана. В силу "одномерности" потенциала этот оператор допускает разделение переменных, и все его собственные функции находятся в виде $F(x)G(y)$. При этом F и G оказываются собственными функциями краевых задач

$$-F'' - \lambda_q^2(q-1)\cdot|f_q|^{q-2}F = \nu F; \quad F'(0) = F'(1) = 0, \tag{1.9}$$

$$-G'' = \widehat{\nu}G; \quad G'(0) = G'(1) = 0. \tag{1.10}$$

Из условия $\int_I h_2(x,y)dy = 0$ имеем $\int_I G dy = 0$. Поэтому наименьшее собственное число задачи (1.10) равно π^2.

2. Исследование задачи (1.9) при $q > 2$

Лемма 2.1. *При* $1 < q \leqslant 4$

$$\lambda_q^2 \int\limits_0^1 |f_q|^{q-2}dx = \frac{4\pi}{q-2}\cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{q}\right). \tag{2.1}$$

Доказательство. Из результатов [1] следует, что при $q \leqslant 4$ функция f_q удовлетворяет уравнению

$$\frac{|f_q'|^2}{2} + \lambda_q^2\frac{|f_q|^q}{q} = \lambda_q^2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{q}\right). \tag{2.2}$$

Интегрируя это уравнение, с учетом граничных условий $f_q'(0) = f_q'(1) = 0$ и условия нормировки $\|f_q\|_{L_q(I)} = 1$, получим

$$\lambda_q = \left(\frac{2}{q}\right)^{1/2}\left(\frac{q+2}{2}\right)^{1/q-1/2}\cdot B\left(\frac{1}{q},\frac{1}{2}\right);$$

$$\int\limits_0^1 |f_q|^{q-2}dx = \left(\frac{q+2}{2}\right)^{1-2/q}\frac{B\left(1-\frac{1}{q},\frac{1}{2}\right)}{B\left(\frac{1}{q},\frac{1}{2}\right)}.$$

Пользуясь функциональными соотношениями для гамма-функции, находим

$$\lambda_q^2\cdot\int\limits_0^1 |f_q|^{q-2}dx = \frac{2}{q}\cdot B\left(\frac{1}{q},\frac{1}{2}\right)\cdot B\left(1-\frac{1}{q},\frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{2}{q}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{q}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{q}\right)\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)} = \frac{4\pi}{q-2}\cdot\frac{\cos(\pi/q)}{\sin(\pi/q)}.$$

Теорема 2.2. *При* $q > 2$ *наименьшее собственное число задачи* (1.9) *меньше* $-\pi^2$.

Доказательство. Достаточно показать, что для какой-то функции F выполнено неравенство

$$\int_0^1 {F'}^2 dx - \lambda_q^2(q-1) \cdot \int_0^1 |f_q|^{q-2} F^2\, dx + \pi^2 \cdot \int_0^1 F^2\, dx < 0. \qquad (2.3)$$

Подставив вместо F константу, получим неравенство

$$\lambda_q^2(q-1) \cdot \int_0^1 |f_q|^{q-2}\, dx > \pi^2. \qquad (2.4)$$

При $q \leqslant 4$ согласно (2.1) оно равносильно неравенству

$$4\pi \frac{q-1}{q-2} \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{q}\right) > \pi^2,$$

которое, очевидно, выполнено при всех $q > 2$.

Подставив в (2.3) f_q вместо F и учитывая условие нормировки, получим неравенство

$$\pi^2 \cdot \int_0^1 f_q^2\, dx < \lambda_q^2(q-2). \qquad (2.5)$$

Покажем, что при $q > 4$ непременно выполняется хотя бы одно из двух неравенств (2.4) или (2.5).

Поскольку $q - 2 > 2$, то

$$\int_0^1 f_q^2\, dx \leqslant \left(\int_0^1 |f_q|^{q-2}\, dx\right)^{\frac{2}{q-2}}.$$

Поэтому, если неравенство (2.4) не выполнено, то

$$\int_0^1 f_q^2\, dx \leqslant \left(\frac{\pi^2}{\lambda_q^2(q-1)}\right)^{\frac{2}{q-2}}. \qquad (2.6)$$

Теперь воспользуемся тем, что λ_q^{-1} – норма оператора вложения $\overline{W_2^1}(I)$ в $L_q(I)$ и, следовательно, по интерполяционной теореме

$$\lambda_q \geqslant \lambda_\infty^{1-\frac{2}{q}} \cdot \lambda_2^{\frac{2}{q}} = 3^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}\pi^{\frac{2}{q}}.$$

Отсюда

$$\left(\frac{\lambda_q}{\pi}\right)^{\frac{2q}{q-2}} \cdot (q-1)^{\frac{2}{q-2}} \cdot (q-2) \geqslant \frac{3}{\pi^2} \cdot (q-1)^{\frac{2}{q-2}} \cdot (q-2).$$

При $q > 4$ правая часть этого неравенства, очевидно, больше единицы. Из этого с учетом (2.6) немедленно получаем (2.5), что и доказывает теорему.

Замечание. При $q \to +\infty$ правая часть неравенства (2.5) стремится к $+\infty$. Поэтому первое собственное число задачи (1.9) стремится к $-\infty$.

Следствие. *При $q > 2$ "одномерная" функция не дает минимума отношению* (1.2), *т.е.* $\widetilde{\lambda}_q < \lambda_q$.

Доказательство. Из теоремы видно, что при $q > 2$ $D^2 J_q(f_q; h, h)$ – знакопеременная квадратичная форма. Поэтому J_q принимает отрицательные значения на $\overline{W_2^1}(K)$.

3. Исследование задачи (1.9) при $1 \leqslant q < 2$

Лемма 3.1. *При $q \to 1+$ имеем*

$$\lambda_q^2(q-1)|f_q|^{q-2} \to 4\delta\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

(сходимость в пространстве мер на $[0,1]$*).*

Доказательство. Из леммы 2.1 видно, что при $q \to 1+$

$$\lambda_q^2(q-1) \cdot \int\limits_I |f_q|^{q-2}\,dx = 4\pi\frac{q-1}{q-2} \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{q}\right) \to 4.$$

С другой стороны, функции f_q при $q \leqslant 4$ обращаются в нуль только в точке $x = 1/2$, причем $f_q'(1/2)$ отделена от нуля при всех q. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$

$$\lambda_q^2(q-1) \cdot \int\limits_{I\setminus I_\varepsilon} |f_q|^{q-2}\,dx \to 0 \quad \text{при} \quad q \to 1+,$$

где $I_\varepsilon = \left[\frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{2} + \varepsilon\right]$, что и доказывает лемму.

Следствие. *При $q = 1$ наименьшее собственное число задачи (1.9) является корнем уравнения*

$$\frac{\sqrt{-\nu}}{2} \cdot \operatorname{th}\left(\frac{\sqrt{-\nu}}{2}\right) = 1, \quad \nu_1 \approx -5.756915,$$

а соответствующая собственная функция –

$$F_1(x) = \begin{cases} \operatorname{ch}(\sqrt{-\nu_1}\, x), & x \leqslant 1/2 \\ \operatorname{ch}(\sqrt{-\nu_1}\,(x-1)), & x > 1/2. \end{cases}$$

Доказательство. Проверяется подстановкой.

Лемма 3.2. *Пусть функции ψ_1 и ψ_2 неотрицательны на $[0,1]$, $\psi_k(x) = \psi_k(1-x)$, $k = 1,2$, функция ψ_1 возрастает при $x < 1/2$, и при всех $\varepsilon \in [0, 1/2]$*

$$\int\limits_{I_\varepsilon} \psi_1\, dx \leqslant \int\limits_{I_\varepsilon} \psi_2\, dx. \tag{3.1}$$

Тогда первое собственное число оператора $-\frac{d^2}{dx^2} - \psi_1$ с граничными условиями Неймана на $[0,1]$ не меньше первого собственного числа оператора $-\frac{d^2}{dx^2} - \psi_2$ с теми же граничными условиями.

Доказательство. Пусть ω – наименьшее собственное число оператора $-\frac{d^2}{dx^2} - \psi_1$, а φ – соответствующая собственная функция. Тогда φ не меняет знака на $[0,1]$ (будем считать, что $\varphi > 0$). Из симметрии функции ψ_1 получаем $\varphi(x) = \varphi(1-x)$, а поскольку ψ_1 возрастает при $x < 1/2$, то φ' при $x < 1/2$ сначала возрастает, а потом убывает до нуля, и, следовательно, φ возрастает при $x < 1/2$.

Интегрируя по частям, с учетом (3.1) получаем

$$\int\limits_I (\psi_2 - \psi_1) \cdot \varphi^2\, dx = \int\limits_I (\psi_2 - \psi_1)\, dx \cdot \varphi^2(0) +$$

$$+ 2 \cdot \int\limits_0^{1/2} \int\limits_{I_\varepsilon} (\psi_2 - \psi_1)\, dx \cdot \varphi\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right) \varphi'\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right) d\varepsilon \geqslant 0.$$

Поэтому

$$\int\limits_I \left({\varphi'}^2-\psi_2\varphi^2\right)dx \leqslant \int\limits_I \left({\varphi'}^2-\psi_1\varphi^2\right)dx = \omega\cdot\int\limits_I \varphi^2\,dx,$$

что и доказывает лемму.

Теорема 3.3. *При $1<q<2$ наименьшее собственное число задачи (1.9) удовлетворяет неравенству $-\pi^2<\nu<\nu_1$.*

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$g_q(x)=c(q)\cdot(q-1)\cdot|2x-1|^{q-2},$$

где $c(q)=4\pi\frac{q-1}{q-2}\cdot\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{q}\right)$. Покажем, что условие леммы 3.2 будет выполняться, если положить

$$\psi_1=\lambda_q^2(q-1)|f_q|^{q-2},\qquad \psi_2=g_q.$$

Действительно, $\int\limits_I g_q=c(q)$, и по лемме 2.1 неравенство (3.1) выполнено (обращается в равенство) при $\varepsilon=1/2$. А поскольку $|f_q|$ выпукла вверх при $x<1/2$, то для некоторого $\delta>0$ имеем $\psi_1\leqslant\psi_2$ на I_δ и $\psi_1\geqslant\psi_2$ на $I\setminus I_\delta$. Поэтому (3.1) выполнено при всех $\varepsilon\leqslant 1/2$.

Таким образом, мы можем использовать задачу

$$-F''-g_q\,F=\mu F;\qquad F'(0)=F'(1)=0 \tag{3.2}$$

для оценки первого собственного числа задачи (1.9) снизу.

При $q=2$ задачи (1.9) и (3.2) совпадают, и $\mu=\nu=-\pi^2$. Покажем, что $\mu>-\pi^2$ при $1\leqslant q<2$.

Пусть F_q – нормированная в $L_2(I)$ первая собственная функция задачи (3.2) (заметим, что $F_q(x)=F_q(1-x)$, и F_q возрастает при $x<1/2$). Тогда

$$\frac{d\mu}{dq}=-\int\limits_I \frac{dg_q}{dq}\cdot F_q^2\,dx=-c(q)\cdot\int\limits_I |2x-1|^{q-2}\,F_q^2\,dx-$$

$$-c(q)\cdot(q-1)\cdot\int\limits_I |2x-1|^{q-2}\cdot\ln|2x-1|\cdot F_q^2\,dx-$$

$$-c'(q)\cdot(q-1)\cdot\int\limits_I |2x-1|^{q-2}\,F_q^2\,dx.$$

Интегрируя второе слагаемое по частям, получаем

$$\frac{d\mu}{dq} = -2\int\limits_0^{1/2} |2x-1|^{q-2}\, F_q^2\cdot$$

$$\cdot\left[c'(q)\cdot(q-1) + c(q)\cdot|2x-1|\cdot\ln|2x-1|\cdot\frac{F_q'}{F_q}\right]dx.$$

Оценим выражение в квадратных скобках при $0 \leqslant x \leqslant 1/2$:

$$\left(\frac{F_q'}{F_q}\right)' \leqslant \frac{F_q''}{F_q} = -\mu - c(q)\cdot(q-1)\cdot|2x-1|^{q-2} \leqslant$$

$$\leqslant -\mu - c(q)\cdot(q-1) \equiv \alpha;$$

$$c'(q)\cdot(q-1)+c(q)\cdot|2x-1|\cdot\ln|2x-1|\cdot\frac{F_q'}{F_q} \geqslant c'(q)\cdot(q-1)-c(q)\cdot\alpha\cdot\beta \equiv \gamma,$$

где $\beta = \max\limits_{[0,1/2]}\{(2x-1)\cdot\ln|2x-1|\cdot x\} < 0.1305$.

Далее, при $0 \leqslant x \leqslant 1/2$ имеем

$$\ln(F_q)\big|_0^x \leqslant \alpha\frac{x^2}{2};\quad F_q(x) \leqslant F_q(0)\exp(\alpha x^2/2) \leqslant F_q(0)\exp(\alpha x/4).$$

Поэтому

$$1 = 2\int\limits_0^{1/2} F_q^2\,dx \leqslant F_q^2(0)\cdot\frac{4}{\alpha}(\exp(\alpha/4)-1),$$

и если $\gamma(q) > 0$, то

$$\frac{d\mu}{dq} \leqslant -2\gamma\int\limits_0^{1/2} |2x-1|^{q-2}\, F_q^2\,dx \leqslant \frac{-\gamma}{q-1}F_q^2(0) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{-\gamma\alpha}{4(q-1)\cdot(\exp(\alpha/4)-1)}.$$

Составим следующую рекуррентную последовательность (выбор индексов определяется тем, что c – возрастающая, а c' – убывающая функция на $[1,2]$):

$$q_0 = 2;\quad \mu_0 = -\pi^2;\quad \beta = 0.1305;$$

$$q_k = q_{k-1} - \tau; \quad \alpha_k = -\mu_{k-1} - c(q_k) \cdot (q_k - 1);$$

$$\gamma_k = c'(q_{k-1}) \cdot (q_k - 1) - c(q_{k-1}) \cdot \alpha_k \beta;$$

$$\mu_k = \mu_{k-1} + \frac{\gamma_k \tau \alpha_k / 4}{(q_{k-1} - 1) \cdot (\exp(\alpha_k/4) - 1)}.$$

Вычисления производятся до тех пор, пока $\gamma_k > 0$. Из вышеприведенных выкладок видно, что ломаная с вершинами (q_k, μ_k) заведомо лежит ниже графика функции $\mu(q)$.

Результаты вычислений с шагом $\tau = 0.005$ приведены в таблице.

p_k	α_k	γ_k	μ_k
2.000			−9.8696044
1.995	7.3909587e−2	4.8149339	−9.8457515
1.990	1.2374123e−1	4.7308291	−9.8223443
1.985	1.7379345e−1	4.6467520	−9.7993820
...	...	...	...
1.710	3.2209003	1.8856333e−1	−9.1807402
1.705	3.2805670	1.1295024e−1	−9.1802269
1.700	3.3403404	3.7620190e−2	−9.1800561
1.695	3.4002180	−3.7422315e−2	−9.1806861

Итак, мы показали, что $\mu > -\pi^2$ при $1.7 \leqslant q < 2$.

Рассмотрим теперь задачу

$$-F'' - \widehat{g}_q F = \widetilde{\mu} F; \quad F'(0) = F'(1) = 0, \tag{3.3}$$

где

$$\widehat{g}_q(x) = \frac{c(q)}{2} \left\{ \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{q-1} \right] \cdot \big(\delta(x - 1/6) + \delta(x - 5/6)\big) + \right.$$

$$\left. + \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{q-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{q-1} \right] \cdot \big(\delta(x-1/3) + \delta(x-2/3)\big) + \left(\frac{1}{3}\right)^{q-1} \cdot 2\delta(x-1/2) \right\}.$$

Лемма 2.3, примененная к функциям g_q и $\widehat{g}_q$, показывает, что первое собственное число у задачи (3.3) не больше, чем у задачи (3.2). Покажем, что при $1 \leqslant q \leqslant 1.7$ $\widetilde{\mu} > -\pi^2$.

Предположим, что $\widetilde{\mu}(\widehat{q}) = -\pi^2$ при некотором $\widehat{q} \in]1, 1.7]$ и покажем, что тогда $\frac{d\widetilde{\mu}}{dq}(\widehat{q}) < 0$.

Из явного представления решения уравнения (3.3) с начальными условиями $F'(0) = 0$, $F(0) = 1$ легко видеть, что $F(1/2) > F(1/3) > F(1/6) = \operatorname{ch}(\pi/6)$. Далее, очевидно,

$$\frac{F^2(1/2) - F^2(1/3)}{F^2(1/6)} < \frac{\operatorname{ch}^2(\pi/2) - \operatorname{ch}^2(\pi/3)}{\operatorname{ch}^2(\pi/6)} < 3. \tag{3.4}$$

Учитывая, что $F(1-x) = F(x)$, выводим

$$\frac{d\widetilde{\mu}}{dq} = -c'(q) \cdot F^2(1/6) + \left(\frac{2}{3}\right)^{q-1} \cdot \big(c(q) \cdot \ln(3/2) - c'(q)\big) \cdot \big(F^2(1/3) -$$

$$-F^2(1/6)\big) + \left(\frac{1}{3}\right)^{q-1} \cdot \big(c(q) \cdot \ln(3) - c'(q)\big) \cdot \big(F^2(1/2) - F^2(1/3)\big).$$

Второе слагаемое в этом выражении отрицательно, ибо $\frac{c'(q)}{c(q)} > \frac{c'(1.7)}{c(1.7)} > \ln(3/2)$.

В силу (3.4) сумма оставшихся двух слагаемых оценивается сверху через

$$c(q) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{q-1} \cdot \left[\ln(3) - \frac{c'(q)}{c(q)} \cdot \left(1 + \left(\frac{1}{3}\right)^{2-q}\right)\right] \cdot \big(F^2(1/2) - F^2(1/3)\big).$$

Функция, стоящая в квадратной скобке, отрицательна при $q = 1.7$ и возрастает на $[1, 1.7]$, что проверяется элементарными методами. Поэтому $\frac{d\widetilde{\mu}}{dq} < 0$.

Но непосредственно можно проверить, что при $q = 1.7$ и $\widetilde{\mu} = -\pi^2$ решение уравнения (3.3) с начальными условиями $F'(0) = 0$, $F(0) = 1$ имеет положительную производную при $x = 1$. Поэтому истинное значение $\widetilde{\mu}(1.7)$ больше $-\pi^2$. Полученное противоречие показывает, что $\widetilde{\mu}(q) > -\pi^2$ при всех $q \in]1, 1.7]$, что и дает требуемую оценку для ν снизу.

Для получения оценки сверху рассмотрим функцию

$$\widetilde{g}_q(x) = \begin{cases} 12(q-1) \cdot |6x-3|^{q-2}, & x \in I_{1/6}, \\ \dfrac{3}{2} \cdot (c(q) - 4), & x \in I \setminus I_{1/6}. \end{cases}$$

Покажем, что при $1 \leqslant q \leqslant 1.5$ будет выполнено условие леммы 3.2, если положить

$$\psi_1 = \widetilde{g}_q, \quad \psi_2 = \lambda_q^2 (q-1) |f_q|^{q-2}.$$

Действительно, из выпуклости вверх функции $|f_q|$ на $]0,1/2[$ имеем $|f_q(x)| \leqslant f_q'(1/2)\cdot|x-1/2|$. Из (2.2) видно, что $f_q'(1/2) = \lambda_q\sqrt{1+2/q}$. По интерполяционной теореме

$$\lambda_q \geqslant \lambda_1^{\frac{2-q}{q}}\cdot\lambda_2^{\frac{2q-2}{q}} = 12^{\frac{2-q}{2q}}\cdot\pi^{\frac{2q-2}{q}}.$$

Поэтому

$$\lambda_q^2(q-1)|f_q|^{q-2} \geqslant (q-1)\cdot\left[\pi^{2q-2}\cdot\left(\frac{q+2}{12q}\right)^{\frac{q-2}{2}}\right]\cdot|x-1/2|^{q-2}.$$

При $1\leqslant q\leqslant 1.5$ выражение в квадратных скобках больше $12\cdot 6^{q-2}$, что проверяется элементарными методами. Поэтому при таких q

$$\psi_1(x)\leqslant\psi_2(x), \quad \text{если} \quad x\in I_{1/6}.$$

Учитывая, что $\int_I \widetilde{g}_q = c(q)$, отсюда немедленно получаем неравенство (3.1) при всех $\varepsilon\leqslant 1/2$.

Таким образом, для оценки наименьшего собственного числа задачи (1.9) сверху при $1\leqslant q\leqslant 1.5$ мы можем использовать задачу

$$-F''-\widetilde{g}_q F = \vartheta F; \quad F'(0)=F'(1)=0. \tag{3.5}$$

При $q=1$ задачи (1.9) и (3.5) совпадают и, таким образом $\vartheta=\nu_1$. Покажем, что $\vartheta<\nu_1$ при $1<q\leqslant 1.5$.

Рассмотрим интеграл (F_1 – функция из следствия к лемме 3.1)

$$\int\limits_I \frac{d\widetilde{g}_q}{dq}\cdot F_1^2\,dx = 12\cdot\int\limits_{I_{1/6}}|6x-3|^{q-2}\,F_1^2\,dx +$$

$$+12(q-1)\cdot\int\limits_{I_{1/6}}|6x-3|^{q-2}\cdot\ln|6x-3|\cdot F_1^2\,dx + \frac{3}{2}c'(q)\cdot\int\limits_{I\setminus I_{1/6}} F_1^2\,dx.$$

Интегрируя второе слагаемое по частям, получаем

$$\int\limits_I \frac{d\widetilde{g}_q}{dq}\cdot F_1^2\,dx =$$

$$= 8\int\limits_{1/3}^{1/2}|6x-3|^{q-1}\cdot\ln|6x-3|\cdot F_1\,F_1'\,dx + 3c'(q)\cdot\int\limits_0^{1/3}F_1^2\,dx. \tag{3.6}$$

Введем обозначение $t = \frac{1}{3}\sqrt{-\nu_1}$. Тогда из выпуклости функции sh имеем на $[1/3, 1/2]$

$$F_1(x)F_1'(x) = \frac{3t}{2}\mathrm{sh}\,(6tx) \leqslant \frac{3t}{2}\left[\mathrm{sh}\,(3t)\cdot(6x-2) + \mathrm{sh}\,(2t)\cdot(3-6x)\right].$$

Подставляя эту оценку в (3.6), получаем, что модуль первого слагаемого в (3.6) не превосходит

$$2t\left(\frac{\mathrm{sh}\,(3t)}{q^2} - \frac{\mathrm{sh}\,(3t)}{(q+1)^2} + \frac{\mathrm{sh}\,(2t)}{(q+1)^2}\right), \tag{3.7}$$

в то время как второе слагаемое равно

$$\frac{c'(q)}{2}\left(\frac{\mathrm{sh}\,(2t)}{2q} + 1\right). \tag{3.8}$$

Элементарными методами проверяется, что при $1 < q \leqslant 1.5$ значение выражения (3.7) меньше, чем (3.8). Поэтому

$$\int\limits_I \frac{d\widetilde{g}_q}{dq}\cdot F_1^2\,dx > 0,$$

и значение квадратичной формы задачи (3.5) на функции F_1 при этих значениях q меньше ее значения при $q = 1$, т.е. ν_1. Тем более $\vartheta < \nu_1$ при $1 < q \leqslant 1.5$.

А при $q > 1.5$ значение квадратичной формы задачи (1.9) на тождественной единице, равное $-c(q)$, меньше ν_1. Таким образом, при всех $q > 1$ имеем $\nu < \nu_1$. Теорема доказана.

Следствие. *При $1 \leqslant q \leqslant 2$ "одномерная" функция $f_q(x)$ дает локальный минимум отношению* (1.2).

Гипотеза 1. *Этот минимум является глобальным, т.е. $\widetilde{\lambda}_q = \lambda_q$ при $1 \leqslant q \leqslant 2$.*

Гипотеза 2. *Наименьшее собственное число задачи* (1.9) *является монотонно убывающей функцией q при $q \geqslant 1$.*

4. Некоторые обобщения

4.1. Неравенство Пуанкаре на прямоугольнике

Пусть K – прямоугольник $I\times aI$. Локальное исследование экстремальности "одномерной" функции $f_q(x)$ в этом случае аналогично п. 1 сводится к вопросу о знаке числа $\nu + \pi^2/a^2$.

Из результатов пп. 2 и 3 следует

Теорема 4.1. *Если $a < 1$, то существуют $q^* \geqslant q_* > 2$, такие, что при $1 \leqslant q < q_*$ функция $f_q(x)$ дает локальный (предположительно глобальный) минимум функционалу $J_q(u)$, а при $q > q^*$ не дает. При этом если $a \to 0$, то $q_* \to +\infty$.*

Если $1 < a < \pi/\sqrt{-\nu_1} \approx 1.3093476$, то существуют $1 < q_* \leqslant q^* < 2$, такие, что при $1 \leqslant q < q_*$ функция $f_q(x)$ дает локальный (в этом случае – заведомо не глобальный) минимум функционалу $J_q(u)$, а при $q > q^*$ – не дает.

Если справедлива гипотеза 2, то в обоих случаях $q_* = q^*$.

Наконец, если $a > \pi/\sqrt{-\nu_1}$, то при всех $q \geqslant 1$ функция $f_q(x)$ не дает локального минимума функционалу $J_q(u)$.

4.2. Неравенство Пуанкаре на плоском торе и бутылке Клейна

Пусть $K = T_a$ – плоский тор, полученный из прямоугольника $[-1, 1] \times [-a, a]$ отождествлением двух пар противоположных сторон. Заметим, что симметризация Штейнера (см. [2]) относительно прямых $x = 0$ и $y = 0$ уменьшает частное в (1.2). Поэтому экстремаль в неравенстве Пуанкаре на торе симметрична относительно этих прямых.

Бутылка Клейна отличается от тора тем, что одна из пар противоположных сторон прямоугольника (например, $x = -1$ и $x = 1$) отождествляется "с переворотом". В этом случае сначала с помощью симметризации относительно прямой $y = 0$ убеждаемся, что экстремаль в (1.2) удовлетворяет условию $u(x, y) = u(x, -y)$. А такие функции на бутылке Клейна периодичны по x, и к ним можно применить симметризацию относительно прямой $x = 0$.

Таким образом, задача о минимизации отношения (1.2) на торе и бутылке Клейна сводится к задаче на прямоугольнике $I \times aI$, рассмотренной в п. 4.1.

4.3. Случай произвольного многообразия

Пусть M – гладкое многообразие размерности $n \geqslant 2$ с кусочно гладким краем. Поставим вопрос о равенстве минимумов отношений (1.2) при $K = M$ и при $K = M \times M$.

Разложение в ряд Фурье по собственным функциям оператора Бельтрами на M показывает, что эти минимумы совпадают при $q = 2$. С другой стороны, из теорем вложения видно, что при $\frac{2n}{n-1} < q \leqslant \frac{2n}{n-2}$ $W_2^1(M)$ вкладывается в $L_q(M)$, но $W_2^1(M \times M)$ не вкладывается в $L_q(M\times M)$, т.е. первый минимум положителен, а второй равен нулю.

Гипотеза 3. *Минимумы отношений* (1.2) *при* $K = M$ *и при* $K = M\times M$ *совпадают при* $1 \leqslant q \leqslant 2$ *и различны при* $2 < q \leqslant \frac{2n}{n-1}$.

Я весьма признателен В. А. Кондратьеву за постановку задачи и И. А. Назарову за помощь в компьютерном эксперименте.

Литература

1. А. П. Буслаев, В. А. Кондратьев, А. И. Назаров, *Об одном семействе экстремальных задач и связанных с ним свойствах интеграла* $\int_R(\max[(0, 1 + ax - |x|^q))^{1/p'}dx$. — Математические заметки **64,** No. 6 (1998).
2. Д. Пойа, Г. Сеге, *Изопериметрические неравенства в математической физике.* ФМЛ, М. (1962).

Nazarov A. I. About “one-dimensionality” of the extremal in the Poincare inequality in the square.

Conditions of local extremality and nonextremality of “one-dimensional” functions for the functional induced by Poincaré inequality in the square and in the rectangle are obtained.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 10 декабря 1998 г.