Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 259, 1999 г.

Е. В. Фролова

ОЦЕНКИ В L_P ДЛЯ РЕШЕНИЯ МОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ, СООТВЕТСТВУЮЩЕЙ ЗАДАЧЕ ВЕРИГИНА

Задача Веригина, описывающая процесс нагнетания жидкости в пористую среду, относится к классу задач со свободными границами. Неизвестными являются давления нагнетаемой и вытесняемой жидкостей и поверхность разделяющая жидкости. На свободной поверхности задается условие Стефана и предполагается, что конормальная производная давления имеет нулевой скачок. При доказательстве классической разрешимости задачи Веригина [1–3], с помощью преобразования предложенного E. I. Hanzawa [4], задача со свободной границей сводится к начально-краевой задаче для нелинейного параболического уравнения в области с фиксированной границей. Для доказательства разрешимости линеаризованной задачи используется метод построения регуляризатора [5], что предполагает исследование модельных полупространственных задач. Модельная задача, соответствующая задаче Веригина, рассматривалась Е. В. Радкевичем [1], Б. В. Базалием и С. П. Дегтяревым [3], Г. И. Бижановой и В. А. Солонниковым [6] в гельдеровских и весовых гельдеровских пространствах функций.

Имея в виду доказательство однозначной разрешимости задачи Веригина в анизотропных пространствах Соболева, удобно воспользоваться модификацией преобразования Hanzawa предложенной в [7]. В этом случае возникает модельная задача, которая несколько отличается от рассмотренной в [1–3, 6], сохраняя ее специфику. Получению L_p оценок решения этой модельной задачи и посвящена данная работа. Доказательство проводится методом основанным на применении теорем о мультипликаторах Фурье [8]. Прием используемый в данной работе был предложен Л. Р. Волевичем [9] для эллиптических задач, а затем применен И. Ш. Могилевским для нестационарной системы Навье-Стокса в полупространстве [10]. L_p оценки решения модельной задачи Стефана получены в [11–13].

Введем обозначения:

$$R_1 = \mathbb{R}^n_- = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n < 0\}, \quad R_2 = \mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\},$$

$$\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0\}, \quad R_{jT} = R_j \times [0,T),\ j=1,2,\ \Gamma_T = \Gamma \times [0,T),$$

$$x = (x', x_n), \quad \text{где} \quad x' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

Задача состоит в том, чтобы найти две пары функций: $u^{(1)}$ и $\Phi^{(1)}$, $u^{(2)}$ и $\Phi^{(2)}$, определенных на полупространствах R_1 и R_2 соответственно и являющихся решением следующей системы

$$u^{(k)}_t - \sum_{i,j=1}^n a^{(k)}_{ij} u^{(k)}_{x_i x_j} = 0, \quad x \in R_k,\ t > 0,$$

$$\Phi^{(k)}_t - \sum_{i,j=1}^n a^{(k)}_{ij} \Phi^{(k)}_{x_i x_j} = 0, \quad x \in R_k,\ t > 0,\ k = 1,2,$$

$$u^{(1)}\big|_{x_n=0} = u^{(2)}\big|_{x_n=0}, \quad \Phi^{(1)}\big|_{x_n=0} = \Phi^{(2)}\big|_{x_n=0},$$

$$\mu\Phi_t + d_1 \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x_n} + \vec{b}_1 \cdot \nabla\Phi^{(1)}\big|_{x_n=0} = \psi(x',t), \tag{1}$$

$$d_1 \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x_n} - d_2 \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x_n} + \vec{b}_1 \cdot \nabla\Phi^{(1)} - \vec{b}_2 \cdot \nabla\Phi^{(2)}\big|_{x_n=0} = \varphi(x',t),$$

$$u^{(1)}\big|_{t=0} = 0, \quad u^{(2)}\big|_{t=0} = 0, \quad \Phi^{(1)}\big|_{t=0} = 0, \quad \Phi^{(2)}\big|_{t=0} = 0,$$

где $(a^{(k)}_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}$ – вещественные симметричные матрицы,

$$\sum_{i,j=1}^n a^{(k)}_{ij} \xi_i \xi_j \geqslant \gamma |\xi|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n,\ \gamma > 0$$

(не ограничивая общности можно считать, что $a^{(1)}_{ij} = \alpha_1 \delta^j_i$ $(\alpha_1 > 0)$).

Формально применяя преобразование Фурье–Лапласа

$$Fu(\xi, x_n, s) = \tilde{u}(\xi, x_n, s) =$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^{n-1}} \int_0^{+\infty} dt \int_{\mathbb{R}^{n-1}} u(x', x_n, t) e^{-ts + ix'\cdot\xi} dx', \tag{2}$$

перейдем от задачи (1) к системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$s\widetilde{u}^{(k)} - a_{nn}^{(k)}\frac{d^2\widetilde{u}^{(k)}}{dx_n^2} + 2\sum_{j=1}^{n-1} a_{jn}\xi_j \frac{d\widetilde{u}^{(k)}}{dx_n}\, i + \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}^{(k)}\xi_j\xi_j\,\widetilde{u}^{(k)} = 0,$$

$$s\widetilde{\Phi}^{(k)} - a_{nn}^{(k)}\frac{d^2\widetilde{\Phi}^{(k)}}{dx_n^2} + 2\sum_{j=1}^{n-1} a_{jn}\xi_j \frac{d\widetilde{u}^{(k)}}{dx_n}\, i + \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}^{(k)}\xi_i\xi_j\,\widetilde{u}^{(k)} = 0, \qquad (3)$$

при $k=1$ $x_n<0$, при $k=2$ $x_n>0$,

$$\widetilde{u}^{(1)}\big|_{x_n=0} = \widetilde{u}^{(2)}\big|_{x_n=0}, \qquad \widetilde{\Phi}^{(1)}\big|_{x_n=0} = \widetilde{\Phi}^{(2)}\big|_{x_n=0},$$

$$\mu s\widetilde{\Phi}^{(1)} + d_1\frac{d\widetilde{u}^{(1)}}{dx_n} + b_{1n}\frac{d\widetilde{\Phi}^{(1)}}{dx_n} - i\vec{b}\,'_1\cdot\xi\widetilde{\Phi}^{(1)}\big|_{x_n=0} = \widetilde{\psi}(\xi,s),$$

$$d_1\frac{d\widetilde{u}^{(1)}}{dx_n} + b_{1n}\frac{d\widetilde{\Phi}^{(1)}}{dx_n} - i\vec{b}\,'_1\cdot\xi\widetilde{\Phi}^{(1)} - d_2\frac{d\widetilde{u}^{(2)}}{dx_n} - b_{2n}\frac{d\widetilde{\Phi}^{(2)}}{dx_n} +$$
$$+ i\vec{b}\,'_2\cdot\xi\widetilde{\Phi}^{(2)}\big|_{x_n=0} = \tilde{\varphi}(\xi,s).$$

Решения уравнений системы (3) убывающие при $|x_n|\to+\infty$ имеют вид

$$\begin{aligned} \widetilde{u}^{(1)} &= C_1e^{r_1x_n}, & \widetilde{u}^{(2)} &= C_3e^{-r_2x_n},\\ \widetilde{\Phi}^{(1)} &= C_2e^{r_1x_n}, & \widetilde{\Phi}^{(2)} &= C_4e^{-r_2x_n}, \end{aligned} \qquad (4)$$

где r_1 и $-r_2$ корни квадратного уравнения

$$a_{nn}^{(k)}\lambda^2 - 2i\sum_{j=1}^{n-1} a_{jn}^{(k)}\xi_j\,\lambda - \left(s + \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}^{(k)}\xi_i\xi_j\right) = 0, \quad k=1,2,$$

такие, что $\mathrm{Re}(r_1)>0$, $\mathrm{Re}(r_2)>0$.

Следовательно,

$$r_1 = \frac{\sum_{j=1}^{n-1} a_{jn}^{(1)}\xi_j i + \sqrt{\frac{D^{(1)}}{4}}}{a_{nn}^{(1)}}, \quad r_2 = \frac{-\sum_{j=1}^{n-1} a_{jn}^{(2)}\xi_j i + \sqrt{\frac{D^{(2)}}{4}}}{a_{nn}^{(2)}}, \qquad (5)$$

где

$$\frac{D^{(k)}}{4} = a_{nn}^{(k)}s + a_{nn}\sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}^{(k)}\xi_i\xi_j - \left(\sum_{j=1}^{n-1} a_{jn}^{(k)}\xi_j\right)^2.$$

Из условий непрерывности следует, что $C_1 = C_3$, $C_2 = C_4$. Подставив функции (4) в краевые условия задачи (3), придем к линейной системе уравнений для определения коэффициентов C_1 и C_2:

$$\begin{cases} d_1 r_1 C_1 + (\mu s + b_{1n} r_1 - i\vec{b}\,'_1 \cdot \xi) C_2 = \widetilde{\psi}(\xi, s) \\ (d_1 r_1 + d_2 r_2) C_1 + (b_{1n} r_1 + b_{2n} r_2 - i\vec{b}\,'_1 \cdot \xi + i\vec{b}\,'_2 \cdot \xi) C_2 = \tilde{\varphi}(\xi, s). \end{cases}$$

Откуда найдем

$$C_1 = \frac{\mu s + b_{1n} r_1 - i\vec{b}\,'_1 \cdot \xi}{\mu(d_1 r_1 + d_2 r_2)(s + \mathcal{D})}\, \widetilde{\varphi}(\xi, s) - \frac{b_{1n} r_1 + b_{2n} r_2 + (\vec{b}\,'_2 - \vec{b}\,'_1) \cdot \xi i}{\mu(d_1 r_1 + d_2 r_2)(s + \mathcal{D})}\, \widetilde{\psi}(\xi, s)$$
$$C_2 = -\frac{d_1 r_1}{\mu(d_1 r_1 + d_2 r_2)(s + \mathcal{D})}\, \widetilde{\varphi}(\xi, s) + \frac{1}{\mu(s + \mathcal{D})}\, \widetilde{\psi}(\xi, s), \tag{6}$$

где

$$\mathcal{D} = \frac{1}{\mu}\Bigg[(d_2 b_{1n} - d_1 b_{2n}) \frac{r_1 r_2}{d_1 r_1 + d_2 r_2} - i\vec{b}\,'_1 \cdot \xi +$$
$$+ i(\vec{b}\,'_1 - \vec{b}\,'_2) \cdot \xi \frac{d_1 r_1}{d_1 r_1 + d_2 r_2}\Bigg] = \tag{7}$$
$$= \frac{1}{\mu}\Bigg[(d_2 b_{1n} - d_1 b_{2n}) \frac{d_1 |r_1|^2 r_2 + d_2 |r_2|^2 r_1}{|d_1 r_1 + d_2 r_2|^2} -$$
$$- i\vec{b}\,'_1 \cdot \xi + i(\vec{b}\,'_1 - \vec{b}\,'_2) \cdot \xi \frac{d_1^2 |r_1|^2 + d_1 d_2 r_1 \bar{r}_2}{|d_1 r_1 + d_2 r_2|^2}\Bigg].$$

Таким образом, мы имеем явные формулы для решения задачи (3), что позволяет, применив теоремы о мультипликаторах Фурье [8, 9], получить L_p оценки решения задачи (1).

Через $W_p^{m,m/2}(R_{k,T})$ $(m/2 \in \mathbb{N})$, как обычно, обозначим пространство всех заданных в $R_{k,T}$ функций $u(x,t)$, имеющих обобщенные производные $D_t^a D_x^\alpha u(x,t)$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, где a, $\alpha_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $|\alpha| + 2a \leqslant m$ и конечную норму

$$\|u\|_{p, R_{k,T}}^{(m)} = \left(\sum_{|\alpha| + 2a \leqslant m} \int_0^T \int_{R_k} |D_x^\alpha D_t^a u(x,t)|^p \, dx \, dt \right)^{1/p}$$

(определение нормы в пространстве $W_p^{m,m/2}$ при $m/2 \notin \mathbb{N}$ см., например, в [5]).

$W_p^{m-1/p,m/2-1/2p}(\Gamma_T)$ – пространство следов функций из $W_p^{m,m/2}(R_{k,T})$ $(m \geqslant 1)$ на Γ_T. Подпространство пространства $W_p^{m,m/2}(R_{k,T})$ $(W_p^{m-1/p,m/2-1/2p}(\Gamma_T))$, содержащее функции удовлетворяющие нулевым начальным условиям, обозначим через $\overset{}{\underset{0}{W}}{}_p^{m,m/2}(R_{k,T})(\underset{0}{W}{}_p^{m-1/p,m/2-1/2p}(\Gamma_T))$.

Теорема 1. *Пусть коэффициенты в задаче* (1) *удовлетворяют условиям*

$$d_2b_{1n} - d_1b_{2n} > 0, \quad \mu > 0, \quad d_1 > 0, \quad d_2 > 0, \tag{8}$$

$$\|\vec{b}'_2 - \vec{b}'_1\|_p \leqslant \frac{d_2b_{1n} - d_1b_{2n}}{2C^*}, \tag{9}$$

где постоянная C^* выбирается таким образом, чтобы имели место оценки (26).

Тогда для произвольных $\varphi,\ \psi \in \underset{0}{W}{}_p^{m+1-1/p,m/2+1/2-1/2p}(\Gamma_T)$ существует единственное решение задачи (1)

$$u^{(k)} \in \underset{0}{W}{}_p^{m+2,m/2+1}(R_{k,T}), \quad \Phi^{(k)} \in \underset{0}{W}{}_p^{m+2,m/2+1}(R_{k,T})$$

и для этого решения верна оценка

$$\begin{gathered}\sum_{k=1,2}\left(\|u^{(k)}\|_{p,R_{k,T}}^{(m+2)} + \|\Phi^{(k)}\|_{p,R_{k,T}}^{(m+2)}\right) \leqslant \\ c\left(\|\varphi\|_{p,\Gamma_T}^{(m+1-1/p)} + \|\psi\|_{p,\Gamma_T}^{(m+1-1/p)}\right).\end{gathered} \tag{10}$$

Доказательство. Продолжим известные функции в задаче (1) на Γ_∞. Пусть $\varphi_1,\ \psi_1 \in \underset{0}{W}{}_p^{m+1-1/p,m/2+1/2-1/2p}(\Gamma_\infty)$ таковы, что

$$\varphi_1\big|_{t\leqslant T} = \varphi, \quad \psi_1\big|_{t\leqslant T} = \psi,$$

$$\varphi_1\big|_{t\geqslant T+\varepsilon} = 0, \quad \psi_1\big|_{t\geqslant T+\varepsilon} = 0, \quad \varepsilon > 0,$$

и

$$\|\psi_1\|_{p,\Gamma_\infty}^{(m+1-1/p)} \leqslant c\|\psi\|_{\Gamma_T}^{(m+1-1/p)}, \quad \|\varphi_1\|_{p,\Gamma_\infty}^{(m+1-1/p)} \leqslant c\|\varphi\|_{\Gamma_T}^{(m+1-1/p)}.$$

Продолжая все функции нулем на $t < 0$, воспользуемся преобразованием Фурье–Лапласа (2) и перейдем к задаче (3). Введем обозначения

$$A_1 = \frac{1}{d_1 r_1 + d_2 r_2}, \quad A_2 = \frac{b_{1n} r_1 - i\vec{b}'_1 \cdot \xi}{\mu(d_1 r_1 + d_2 r_2)},$$
$$A_3 = -\frac{b_{1n} r_1 + b_{2n} r_2 + (\vec{b}'_2 - \vec{b}'_1) \cdot \xi i}{\mu(d_1 r_1 + d_2 r_2)}, \quad A_4 = -\frac{d_1 r_1}{\mu(d_1 r_1 + d_2 r_2)}, \tag{11}$$

тогда согласно формулам (4), (6), решение задачи (3) запишется в виде

$$\widetilde{u}^{(k)} = \frac{A_1 s + A_2}{s + \mathcal{D}}\, \widetilde{\varphi}_1(\xi, s) e^{-r_k |x_n|} + \frac{A_3}{s + \mathcal{D}}\, \widetilde{\psi}_1(\xi, s) e^{-r_k |x_n|},$$
$$\widetilde{\Phi}^{(k)} = \frac{A_4}{s + \mathcal{D}}\, \widetilde{\varphi}_1(\xi, s) e^{-r_k |x_n|} + \frac{1}{\mu(s + \mathcal{D})} \widetilde{\psi}_1(\xi, s) e^{-r_k |x_n|}. \tag{12}$$

Решение задачи (1) $u^{(k)}$, $\Phi^{(k)}$, $k = 1, 2$ находится с помощью обратного преобразования Фурье–Лапласа. Единственность решения задачи (1) на $R_{k,T}$ можно доказать также, как это было сделано для параболических задач при доказательстве теоремы 11.1 работы [14]. Проверим, что это решение удовлетворяет оценке (10).

Доказательство опирается на теорему о мультипликаторах П. И. Лизоркина [8] являющуюся обобщением результатов С. Г. Михлина, а также на результат Л. Р. Волевича [9]. Сформулируем эти теоремы, используя для удобства дальнейшего применения обозначения данной статьи ($\xi_n \longleftrightarrow s$). Применение преобразования Лапласа по переменной t вместо преобразования Фурье обуславливает наличие в оценках весового множителя $e^{-s_1 t}$.

Определение. *Назовем функцию $g(\xi, s)$, $\xi \in \mathbb{R}^{n-1}$, $s = s_1 + is_2$, $s_2 \in \mathbb{R}$, $s_1 \geqslant 0$ мультипликатором Фурье класса (p, p) если для $\forall v \in C_0^\infty$ имеет место оценка*

$$\|e^{-ts_1} F^{-1} g(\xi, s) F v\|_p \leqslant c \|e^{-ts_1} v\|_p, \quad 1 \leqslant p < +\infty,$$

где через F^{-1} обозначено интегральное преобразование обратное к преобразованию Фурье–Лапласа F, определяемому формулой (2).

Введем обозначение

$$\mathcal{M}_p^p(g) = \sup_{v \in C_0^\infty} \frac{\|e^{-ts_1} F^{-1} g(\xi, s) F v\|_p}{\|e^{-ts_1} v\|_p}.$$

Теорема 2 ([9]). *Пусть $\eta(x,t) \in L_p(\mathbb{R}^n_{+,\infty})$, $\mathcal{N}(\xi, x_n, s)$ является мультипликатором Фурье класса (p,p) и имеет место оценка*

$$\mathcal{M}_p^p(\mathcal{N}(\cdot, x_n, \cdot) \leqslant \frac{c}{x_n}. \tag{13}$$

Тогда для функции

$$\mathcal{H}\eta = \int\limits_0^{+\infty} F^{-1}[\mathcal{N}(\xi, x_n + y, s) F\eta(\xi, y, s)]dy$$

имеет место оценка

$$\|e^{-s_1 t}\mathcal{H}\eta\|_{p,\mathbb{R}^n_{+,\infty}} \leqslant c\|e^{-s_1 t}\eta\|_{p,\mathbb{R}^n_{+,\infty}}. \tag{14}$$

Замечание. Теорема 2 очевидным образом может быть переформулирована для функции

$$\mathcal{H}\eta = \int\limits_{-\infty}^{0} F^{-1}[\mathcal{N}(\xi, x_n + y, s) F\eta(\xi, y, s)]dy.$$

Теорема 3 ([8]). *Пусть функция $g(\xi, s)$ ($\xi \in \mathbb{R}^{n-1}, s = s_1 + is_2$, $s_1 \geqslant 0$, $s_2 \in \mathbb{R}$) и все ее смешанные частные производные*

$$\frac{\partial^l g(\xi, s)}{\partial \xi_{k_1} \dots \partial \xi_{k_l}}, \quad \frac{\partial^l g(\xi, s)}{\partial \xi_{k_1}, \dots, \partial \xi_{k_{l-1}} ds}$$

($l \geqslant 1, k_1, \dots, k_l$ различны)
непрерывны при $|s| + \xi^2 > 0$ и удовлетворяют оценкам

$$\left|\xi_{k_1} \dots \xi_{k_l} \frac{\partial^l g(\xi, s)}{\partial \xi_{k_1} \dots \partial \xi_{k_l}}\right| \leqslant \mathcal{M}, \tag{15.1}$$

$$\left|\xi_{k_1} \dots \xi_{k_{l-1}} s \frac{\partial^l g(\xi, s)}{\partial \xi_{k_1} \dots \partial \xi_{k_{l-1}} ds}\right| \leqslant \mathcal{M}, \quad \mathcal{M} > 0. \tag{15.2}$$

Тогда $g(\xi, s)$ является мультипликатором Фурье класса (p,p) и $\mathcal{M}_p^p(g) \leqslant C\mathcal{M}$.

На основании теоремы 3 докажем следующую лемму.

Лемма. *Пусть $w(\xi,s)$, $r(\xi,s)$, $B(\xi,s)$ ($|s|+\xi^2>0$, $\operatorname{Re} s>0$) – гладкие функции, удовлетворяющие условиям однородности*

$$B(\lambda\xi,\lambda^2 s)=\lambda B(\xi,s),\quad r(\lambda\xi,\lambda^2 s)=\lambda r(\xi,s),\quad \lambda>0$$

(однородные функции порядка 1), $w(\lambda\xi,\lambda^2 s)=\lambda^2 w(\xi,s)$, $\lambda>0$ (однородная функция порядка 2) и следующим неравенствам

$$\operatorname{Re}(r(\xi,s))\geqslant c|r(\xi,s)|\geqslant c(|s|+\xi^2)^{1/2}, \tag{16}$$

$$\operatorname{Re}(B(\xi,s))\geqslant c|B(\xi,s)|\geqslant c(|s|+\xi^2)^{1/2}. \tag{17}$$

Тогда функция $\mathcal{R}=\frac{w}{s+B}e^{-rx}$, где $x>0$ является мультипликатором Фурье класса (p,p) и

$$\mathcal{M}_p^p(\mathcal{R})\leqslant\frac{c}{x}. \tag{18}$$

Доказательство леммы. Так как непрерывность функции $\mathcal{R}(\xi,s)$ и ее смешанных производных при $|s|+\xi^2>0$ непосредственно вытекает из условий леммы, для этого достаточно показать, что выполняются оценки (15) с $\mathcal{M}=\frac{C}{x}$.

Ниже будем обозначать всякую гладкую однородную функцию порядка k через $\mathcal{U}_{\{k\}}$. Через D_ξ^α, где $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1})$, $\alpha_i\in\{0,1\}$, $i=1,\dots,n-1$ обозначим оператор дифференцирования $\frac{\partial^l}{\partial\xi_{k_1}\dots\partial\xi_{k_l}}$, $l=|\alpha|$.

Производная $D_\xi^\alpha\mathcal{R}$ представляется в виде линейной комбинации функций $D_\xi^{\beta_1}w\,D_\xi^{\beta_2}\left(\frac{1}{s+B}\right)D_\xi^{\beta_3}e^{-rx}$, где $|\beta_1|+|\beta_2|+|\beta_3|=l$ и, вследствие того, что w – однородная функция второго порядка, а B и r – однородные функции первого порядка, является линейной комбинацией функций

$$\mathcal{U}_{\{2-|\beta_1|\}}\mathcal{U}_{\{m-|\beta_2|\}}\frac{1}{(s+B)^{m+1}}x^j\mathcal{U}_{\{j-|\beta_3|\}}e^{-rx},$$

где $0<m\leqslant|\beta_2|$, $0<j\leqslant|\beta_3|$ при $|\beta_2|$, $|\beta_3|>0$, $m=0$ при $|\beta_2|=0$, $j=0$ при $|\beta_3|=0$.

Так как функция B удовлетворяет оценке (17), при $\operatorname{Re} s>0$ имеем

$$\frac{1}{|s+B|}\leqslant\frac{1}{\operatorname{Re}(s+B)}\leqslant c\frac{1}{(|s|+\xi^2)^{1/2}}$$

и, домножая $D_\xi^\alpha \mathcal{R}$ на $\xi_{k_1}\dots\xi_{k_l}$, приходим к оценке

$$|\xi_{k_1}\dots\xi_{k_l} D_\xi^\alpha \mathcal{R}(\xi,s)| \leqslant$$

$$\leqslant c\sum_{m=0}^{l}\sum_{j=0}^{l-m}|\xi|^l \left|\mathcal{U}_{\{2+m+j-l\}}\frac{1}{(s+B)^{m+1}}\,x^j\,e^{-rx}\right| \leqslant$$

$$\leqslant c\sum_{m=0}^{l}\sum_{j=0}^{l-m}|\xi|^{l-2-m-j}|\mathcal{U}_{\{2+m+j-l\}}|\frac{|\xi|^{m+1}}{(|s|+\xi^2)^{(m+1)/2}}\times \tag{19}$$

$$\times x^j|\xi|^{j+1}e^{-\operatorname{Re} rx} \leqslant c\sum_{j=0}^{l}(|s|+\xi^2)^{(j+1)/2}x^j e^{-\operatorname{Re} rx}.$$

Так же как это было сделано при выполнении аналогичных оценок в работе [10], воспользуемся неравенством

$$y^j e^{-yz} \leqslant \frac{c}{z^j}, \quad j\in\mathbb{N}, \quad y>0, \quad z>0,$$

из которого в частности следует

$$(\operatorname{Re} r)^j x^{j-1} e^{-\operatorname{Re} rx} \leqslant \frac{c}{x}, \quad j\in\mathbb{N}. \tag{20}$$

Учитывая (16), оценим правую часть неравенства (19) с помощью неравенства (20) и получим (15.1):

$$|\xi_{k_1}\dots\xi_{k_l} D_\xi^\alpha \mathcal{R}(\xi,s)| \leqslant \frac{c}{x}.$$

Перейдем к доказательству (15.2).

$$s\frac{\partial\mathcal{R}}{\partial s} = s\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{w}{s+B}e^{-rx}\right) = \left(\frac{s\frac{\partial w}{\partial s}}{s+B} - \frac{sw\left(1+\frac{\partial B}{\partial s}\right)}{(s+B)^2} - \frac{swx\frac{\partial r}{\partial s}}{s+B}\right)e^{-rx} =$$

$$= \frac{\mathcal{U}_{\{2\}}}{s+B}\,e^{-rx} + \frac{\mathcal{U}_{\{3\}}}{(s+B)^2}\,e^{-rx} + \frac{\mathcal{U}_{\{3\}}\,x}{s+B}\,e^{-rx}.$$

Первое слагаемое имеет такую же структуру как и $\mathcal{R}$ и следовательно для него верна оценка (15.1). Оценим производные второго слагаемого. $D_\xi^\alpha\left(\frac{\mathcal{U}_{\{3\}}e^{-rx}}{(s+B)^2}\right)$ представляется в виде линейной комбинации функций

$$D_\xi^{\beta_1}\mathcal{U}_{\{3\}}\,D_\xi^{\beta_2}\left(\frac{1}{(s+B)^2}\right)D_\xi^{\beta_3}\,e^{-rx},$$

где $|\beta_1|+|\beta_2|+|\beta_3|=l$ и, в силу однородности функций B и r, оценивается следующим образом:

$$\left|\xi_{k_1}\ldots\xi_{k_l}D_\xi^\alpha\left(\frac{\mathcal{U}_{\{3\}}e^{-rx}}{(s+B)^2}\right)\right|\leqslant$$

$$\leqslant c\sum_{m=0}^{l}\sum_{j=0}^{l-m}|\xi|^l|\mathcal{U}_{\{3-|\beta_1|\}}\mathcal{U}_{\{m-|\beta_2|\}}\frac{1}{(s+B)^{m+2}}x^j\mathcal{U}_{\{j-|\beta_3|\}}e^{-rx}|\leqslant$$

$$\leqslant c\sum_{m=0}^{l}\sum_{j=0}^{l-m}|\xi|^{l-3-m-j}|\mathcal{U}_{\{3+m+j-l\}}|\frac{|\xi|^{m+2}}{(|s|+\xi^2)^{m/2+1}}x^j|\xi|^{j+1}e^{-\operatorname{Re}rx}\leqslant$$

$$\leqslant c\sum_{j=0}^{l}(|s|+\xi^2)^{(j+1)/2}x^je^{-\operatorname{Re}rx}\leqslant\frac{c}{x}.$$

Аналогично оцениваются и производные третьего слагаемого:

$$\left|\xi_{k_1}\ldots\xi_{k_l}D_\xi^\alpha\left(\frac{\mathcal{U}_{\{3\}}x}{s+B}\,e^{-rx}\right)\right|\leqslant$$

$$\leqslant c\sum_{m=0}^{l}\sum_{j=0}^{l-m}|\xi|^l|\mathcal{U}_{\{3+m+j-l\}}\frac{1}{(|s|+\xi^2)^{(m+1)/2}}\,x^{j+1}e^{-\operatorname{Re}rx}\leqslant$$

$$\leqslant c\sum_{j=0}^{l}(|s|+\xi^2)^{(j+2)/2}x^{j+1}e^{-\operatorname{Re}rx}\leqslant\frac{c}{x}.$$

Итак, для смешанных производных функции $s\frac{\partial\mathcal{R}}{\partial s}$ имеют место оценки (15.1), что и означает наличие оценок (15.2) для производных функции $\mathcal{R}$ с $\mathcal{M}=\frac{C}{x}$. По теореме 3 функиця $\mathcal{R}(\xi,s)$ является мультипликатором Фурье класса (p,p) и $\mathcal{M}_p^p(\mathcal{R})\leqslant\frac{C}{x}$.

Продолжим доказательство теоремы 1.

Пусть $\mathcal{G}_k$, $\mathcal{H}_k\in\overset{\ }{\underset{0}{W}}{}_p^{m+1,m/2+1/2}(R_{k,\infty})$ – продолжения функций φ_1, ψ_1 в полупространства $R_{k,\infty}$, $k=1,2$, причем

$$\begin{aligned}&\|\mathcal{G}_k\|_{p,R_{k,\infty}}^{(m+1)}\leqslant c\|\varphi_1\|_{p,\Gamma_\infty}^{(m+1-1/p)},\\&\|\mathcal{H}_k\|_{p,R_{k,\infty}}^{(m+1)}\leqslant c\|\psi_1\|_{p,\Gamma_\infty}^{(m+1-1/p)}.\end{aligned}\tag{21}$$

Применив формулу Ньютона–Лейбница, получим из (12) интегральные представления для $\widetilde{u}^{(k)}$, $\widetilde{\Phi}^{(k)}$. Например,

$$\widetilde{u}^{(k)}(\xi,x_n,s)=-\int\limits_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{A_1s+A_2}{s+\mathcal{D}}\,\widetilde{\mathcal{G}}_k(\xi,(-1)^ky,s)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{A_3}{s+\mathcal{D}}\,\widetilde{\mathcal{H}}_k(\xi,(-1)^ky,s)\right)e^{-r_k(|x_n|+|y|)}\right]dy=$$

$$=(-1)^k\int\limits_0^{+\infty}\left[\frac{A_1s+A_2}{s+\mathcal{D}}\,r_k\widetilde{\mathcal{G}}_k(\xi,(-1)^ky,s)+\right.$$

$$\left.+\frac{A_3}{s+\mathcal{D}}\,\widetilde{\mathcal{H}}_k(\xi,(-1)^ky,s)\right]e^{-r_k(|x_n|+|y|)}dy-$$

$$-\int\limits_0^{+\infty}\left[\frac{A_1s+A_2}{s+\mathcal{D}}\,\frac{\partial}{\partial y}\widetilde{\mathcal{G}}_k(\xi,(-1)^ky,s)+\right.$$

$$\left.+\frac{A_3}{s+\mathcal{D}}\,\frac{\partial}{\partial y}\,\widetilde{\mathcal{H}}_k(\xi,(-1)^ky,s)\right]e^{-r_k(|x_n|+|y|)}dy.$$

Следовательно, при $j=2,\dots,m+2$

$$F^{-1}(r_k^jFu^{(k)})=\int\limits_0^{+\infty}F^{-1}\left[\frac{A_1s+A_2}{s+\mathcal{D}}\,r_k^2e^{-r_k(|x_n|+|y|)}\left((-1)^kr_k^{j-1}\widetilde{\mathcal{G}}_k-\right.\right.$$

$$\left.\left.-r_k^{j-2}\frac{\partial\widetilde{\mathcal{G}}_k}{\partial y}\right)+\frac{A_3}{s+\mathcal{D}}\,r_k^2e^{-r_k(|x_n|+|y|)}\left((-1)^kr_k^{j-1}\widetilde{\mathcal{H}}_k-r_k^{j-2}\frac{\partial\widetilde{\mathcal{H}}_k}{\partial y}\right)\right]dy. \tag{22}$$

Аналогично

$$F^{-1}(r_k^jF\Phi^{(k)})=\int\limits_0^{+\infty}F^{-1}\left[\frac{A_4}{s+\mathcal{D}}\,r_k^2e^{-r_k(|x_n|+|y|)}\times\right.$$

$$\times\left((-1)^kr_k^{j-1}\widetilde{\mathcal{G}}_k-r_k^{j-2}\frac{\partial\widetilde{\mathcal{G}}_k}{\partial y}\right)+$$

$$\left.+\frac{1}{\mu(s+\mathcal{D})}\,r_k^2e^{-r_k(|x_n|+|y|)}\left((-1)^kr_k^{j-1}\widetilde{\mathcal{H}}_k-r_k^{j-2}\frac{\partial\widetilde{\mathcal{H}}_k}{\partial y}\right)\right]dy. \tag{23}$$

Проверим, что функции

$$\begin{gathered}\frac{A_1 s+A_2}{s+\mathcal{D}}\, r_k^2 e^{-r_k|x_n|}, \qquad \frac{A_3}{s+\mathcal{D}}\, r_k^2 e^{-r_k|x_n|},\\ \frac{A_4}{s+\mathcal{D}}\, r_k^2 e^{-r_k|x_n|}, \qquad \frac{1}{\mu(s+\mathcal{D})}\, r_k^2 e^{-r_k|x_n|}\end{gathered} \tag{24}$$

являются мультипликаторами Фурье класса (p,p) и для $\mathcal{M}_p^p(\cdot)$ верна оценка (13), для чего покажем, что они удовлетворяют условиям леммы. Очевидно, что функции $r_k(\xi,s)$, $k=1,2$, $\mathcal{D}(\xi,s)$ являются однородными порядка 1, функции $A_2 r_k^2$, $A_3 r_k^2$, $A_4 r_k^2$ являются однородными порядка 2, гладкими при $|s|+\xi^2>0$ (см. (5), (7), (11)).

Можно показать, что из положительной определенности квадратичной формы $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\xi_i\xi_j$ следует положительность $\operatorname{Re}\left(\frac{D^{(k)}}{4}\right)$ при $\operatorname{Re} s>0$ и оценка (16) для r_k, $k=1,2$.

Согласно формуле (7), $\operatorname{Re}\mathcal{D}=I_1+I_2$, где

$$I_1=\frac{(d_2 b_{1n}-d_1 b_{2n})}{\mu}\cdot\frac{(d_1|r_1|^2\operatorname{Re} r_2+d_2|r_2|^2\operatorname{Re} r_1)}{|d_1 r_1+d_2 r_2|^2},$$

$$I_2=-\frac{d_1 d_2}{\mu}(\vec{b}\,'_1-\vec{b}\,'_2)\cdot\xi\,\frac{\operatorname{Im}(r_1\bar{r}_2)}{|d_1 r_1+d_2 r_2|^2}.$$

Из условия (8) теоремы 1 и неравенства (16) для r_k следует оценка

$$I_1\geqslant c(\operatorname{Re} r_1+\operatorname{Re} r_2)\geqslant c(|s|+\xi^2)^{1/2}. \tag{25}$$

Слагаемое I_2 не является знакоопределенным и может быть оценено за счет малости нормы $\|\vec{b}\,'_1-\vec{b}\,'_2\|$. Как видно из неравенства (16) для r_k, найдется такая положительная постоянная C^*, что

$$d_2|\xi|\leqslant C^*|r_1| \quad \text{и} \quad d_1|\xi|\leqslant C^*|r_2| \tag{26}$$

и, если выполнено условие (9) теоремы 1, приходим к оценке

$$|I_2|\leqslant\|\vec{b}\,'_1-\vec{b}\,'_2\|\frac{d_1 d_2|\xi|}{\mu|d_1 r_1+d_2 r_2|^2}(|r_1|\operatorname{Re} r_2+|r_2|\operatorname{Re} r_1)\leqslant$$

$$\|\vec{b}\,'_1-\vec{b}\,'_2\|\frac{C^*}{\mu|d_1 r_1+d_2 r_2|^2}(d_1|r_1|^2\operatorname{Re} r_2+d_2|r_2|^2\operatorname{Re} r_1)\leqslant\frac{I_1}{2}. \tag{27}$$

Таким образом,

$$\operatorname{Re}\mathcal{D} \geqslant I_1 - |I_2| \geqslant \frac{I_1}{2} \geqslant c(|s| + \xi^2)^{1/2}. \tag{28}$$

Учитывая (16), (25), (27) оценим $\operatorname{Im}\mathcal{D}$:

$$|\operatorname{Im}\mathcal{D}| \leqslant \frac{d_2 b_{1n} - d_1 b_{2n}}{\mu |d_1 r_1 + d_2 r_2|^2} \left(d_1 |r_1|^2 |\operatorname{Im} r_2| + d_2 |r_2|^2 |\operatorname{Im} r_1|\right) + \frac{1}{\mu} \|\vec{b}'_1\| |\xi| +$$

$$+ \frac{\|\vec{b}'_1 - \vec{b}'_2\| t |\xi|}{\mu |d_1 r_1 + d_2 r_2|^2} (d_1^2 |r_1|^2 + d_1 d_2 |\operatorname{Re}(r_1 \bar{r}_2)|) \leqslant \tag{29}$$

$$\leqslant c(I_1 + \|\vec{b}'_1\|\, |\xi|) \leqslant c \operatorname{Re}\mathcal{D}.$$

Из (28), (29) следует, что для $\mathcal{D}(\xi, s)$ выполнено условие (17) леммы. По лемме функции

$$\frac{A_m}{s + \mathcal{D}}\, r_k^2 e^{-r_k |x_n|}, \quad m = 2, 3, 4,$$

$\frac{r_k^2}{\mu(s+\mathcal{D})} e^{-r_k |x_n|}$, $k = 1, 2$ являются мультипликаторами Фурье класса (p, p) и имеет место оценка (18).

Функцию $\frac{s A_1 r_k^2}{s + \mathcal{D}} e^{-r_k |x_n|}$ представим в виде

$$A_1 r_k^2 e^{-r_k |x_n|} - \frac{A_1 \mathcal{D} r_k^2}{s + \mathcal{D}}\, e^{-r_k |x_n|}. \tag{30}$$

Поскольку $A_1 r_k^2$ является однородной функцией порядка 1, к первому слагаемому в (30) применима лемма 3.2 работы И. Ш. Могилевского [10]. Функция $A_1 \mathcal{D} r_k^2$ является однородной порядка 2 и ко второму слагаемому в (30) применима доказанная выше лемма. Итак, все функции (24) являются мультипликаторами Фурье класса (p, p) и для $\mathcal{M}_p^p(\cdot)$ выполнено условие (13) теоремы 2. По теореме 2 из интегральных представлений (22), (23) следуют оценки

$$\|e^{-s_1 t} F^{-1}(r_k^j F u^{(k)})\|_{p, R_{k,\infty}} \leqslant c(\|e^{-s_1 t} F^{-1}(r_k^{j-1} F \mathcal{G}_k)\|_{p, R_{k,\infty}} +$$

$$+ \left\| e^{-s_1 t} F^{-1} \left(r_k^{j-2} \frac{\partial}{\partial x_n} F \mathcal{G}_k \right) \right\|_{p, R_{k,\infty}} + \|e^{-s_1 t} F^{-1}(r_k^{j-1} F \mathcal{H}_k)\|_{p, R_{k,\infty}} +$$

$$+ \left\| e^{-s_1 t} F^{-1} \left(r_k^{j-2} \frac{\partial}{\partial x_n} F \mathcal{H}_k \right) \right\|_{p, R_{k,\infty}} \equiv \mathcal{F}, \tag{31}$$

$$\|e^{-s_1 t}F^{-1}(r_k^j F\Phi^{(k)}\|_{p,R_{k,\infty}} \leqslant c\mathcal{F}.$$

Очевидно (см. (12)), что

$$\frac{\partial^j F^{-1}(Fu^{(k)})}{\partial x_n^j} = F^{-1}\left(\frac{\partial^j}{\partial x_n^j}(Fu^{(k)})\right) = F^{-1}((-1)^{j(k-1)}r^j Fu^{(k)}), \quad (32)$$

$$\frac{\partial^j F^{-1}(F\Phi^{(k)})}{\partial x_n^j} = F^{-1}((-1)^{j(k-1)}r^j F\Phi^{(k)}), \quad j = 1, 2, \ldots, m+2.$$

Воспользуемся эквивалентной нормировкой соболевских пространств, связанной с преобразованием Фурье–Лапласа и получим из (31), (32), (21) оценку нормы $\|u^{(2)}\|_{p,R_{2,T}}^{(m+2)}$.

$$\|u^{(2)}\|_{p,R_{2,T}}^{(m+2)} \leqslant c\|e^{-s_1 t}u^{(2)}\|_{p,R_{2,\infty}}^{(m+2)} = c\|e^{-s_1 t}F^{-1}Fu^{(2)}\|_{p,R_{2,\infty}}^{(m+2)} \leqslant$$

$$\leqslant c\sum_{j\leqslant m}\left(\|e^{-s_1 t}F^{-1}r_2^{j+2}Fu^{(2)}\|_{p,R_{2,\infty}} + \left\|e^{-s_1 t}\frac{\partial^{j+2}F^{-1}Fu^{(2)}}{\partial x_n^{j+2}}\right\|_{p,R_{2,\infty}}\right) \leqslant$$

$$\leqslant c\sum_{j\leqslant m}(\|e^{-s_1 t}F^{-1}(r^{j+1}F\mathcal{G}_2)\|_{p,R_{2,\infty}} + \left\|e^{-s_1 t}F^{-1}\left(r^j\frac{\partial}{\partial x_n}F\mathcal{G}_2\right)\right\|_{p,R_{2,\infty}} +$$

$$+\|e^{-s_1 t}F^{-1}(r^{j+1}F\mathcal{H}_2)\|_{p,R_{2,\infty}} + \left\|e^{-s_1 t}F^{-1}\left(r^j\frac{\partial}{\partial x_n}F\mathcal{G}_2\right)\right\|_{p,R_{2,\infty}} \leqslant$$

$$\leqslant c(\|\mathcal{G}_2\|_{p,R_{2,\infty}}^{(m+1)} + \|\mathcal{H}_2\|_{p,R_{2,\infty}}^{(m+1)}) \leqslant c(\|\varphi_1\|_{p,\Gamma_\infty}^{(m+1-1/p)} + \|\psi_1\|_{p,\Gamma_\infty}^{(m+1-1/p}) \leqslant$$

$$\leqslant c(\|\varphi\|_{p,\Gamma_T}^{(m+1-1/p)} + \|\psi\|_{p,\Gamma_T}^{(m+1-1/p)}).$$

Нормы $\|u^{(1)}\|_{p,R_{1,T}}^{(m+2)}$, $\|\Phi^{(k)}\|_{p,R_{k,T}}^{(m+2)}$, $k = 1, 2$ оцениваются аналогично. Итак, решение задачи (1) $u^{(k)}$, $\Phi^{(k)}$, $k = 1, 2$ удовлетворяет оценке (10) и теорема 1 доказана.

Замечание. При доказательстве классической разрешимости задачи Веригина [1–3] предполагается, что в начальный момент времени давления $u_0^{(1)}$, $u_0^{(2)}$ удовлетворяют условию

$$\frac{\partial u_0^{(2)}}{\partial n} - \frac{\partial u_0^{(1)}}{\partial n} > 0 \quad (33)$$

на Γ_0, где Γ_0 – начальное положение свободной границы, $\vec{n}$ – единичный вектор нормали, внешней по отношению к области $\Omega_0^{(1)}$.

Предполагая выполненным условие (33), мы придем к модельной задаче (1), коэффициенты которой удовлетворяют условию (8) теоремы 1. Условие (9) теоремы 1 также не является ограничительным и естественно получается при применении к решению задачи со свободной границей схемы, предложенной в [7].

Автор выражает благодарность профессору В. А. Солоннникову за постоянное внимание к этой работе и полезные замечания.

Литература

1. Е. В. Радкевич, *О разрешимости общих нестационарных задач со свободной границей.* — Некоторые приложения функционального анализа к задачам математической физики. Новосибирск, 1986, с. 85–111.
2. Е. В. Радкевич, А. С. Меликулов, *Краевые задачи со свободной границей.* Ташкент, ФАН (1988).
3. Б. В. Базалий, С. П. Дегтярев, *О разрешимости многомерной задачи фильтрации со свободной границей.* — Препринт ИПММ АН УССР. Донецк 89.10, 1989, с. 3–49.
4. E. I. Hanzawa, *Classical solution of the Stefan problem.* Tohoku Math. J., **33** (1981), 297–335.
5. О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.* М., Наука (1967).
6. Г. И. Бижанова, В. А. Солонников, *О некоторых модельных задачах для параболических уравнений второго порядка с производной по времени в краевых условиях.* Алгебра и анализ, **6**, вып. 6 (1994), 30–50.
7. В. А. Солонников, Е. В. Фролова, *L_p-теория для задачи Стефана.* Зап. научн. семин. ПОМИ, **243** (1997), 299–323.
8. П. И. Лизоркин, *Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и функциональные пространства $\mathbb{L}_p^{(r)}(\mathbb{R}^n)$.* Мат. Сб., **60**, No. 3 (1963), 325–353.
9. Л. Р. Волевич, *Разрешимость краевых задач для общих эллиптических систем.* Мат. сб., **68**, No. 3 (1965), 373–416.
10. И. Ш. Могилевский, *Оценки решения общей начально-краевой задачи для линейной нестационарной системы уравнений Навье–Стокса в полупространстве.* Зап. научн. семин. ЛОМИ, **84** (1979), 147–173.
11. Е. В. Фролова, *L_p-оценки решений модельных задач с производной по времени в краевом условии или в условии сопряжения.* Извести СПГЭТУ, вып. 501 (1996), 69–79.
12. E. V. Frolova, *Solvability in Sobolev spaces of a problem for a second order parabolic equation with time derivative in the boundary condition.* — Partugalial Matematica **56**, No. **4** (1999).
13. H. Koch, *Classical solutions to phase transition problems are smooth.* Preprint SFB 359 No. 96-46 (1996).
14. М. С. Агранович, М. И. Вишик, *Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида.* Успехи мат. наук, **19**, No. 3 (1964), 53–161.

Frolova E. V. L_p-estimates of a solution of the model Verigin problem.

The model problem related to free boundary Verigin problem is considered. L_p-estimates of its solution are obtained with the help of some results on Fourier multipliers. The obtained estimates may be usefull in proving the solvability of Verigin problem in Sobolev function spaces.

С.-Петербургский Государственный
Электротехнический университет

Поступило 19 апреля 1999 г.