Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 260, 1999 г.

Н. Н. Амосова

НЕОБХОДИМОСТЬ УСЛОВИЙ КРАМЕРА, ЛИННИКА И СТАТУЛЯВИЧУСА ДЛЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ

Пусть $X_1, X_2, \dots$ последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, имеющих $\mathbf{E}X_1 = 0$ и $\mathbf{D}X_1 = 1$. Обозначим через $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, через $\Phi(x)$ – функцию распределения (0,1) нормального распределения и через $\Gamma_m\{X\}$ – семиинвариант m-го порядка случайной величины X.

Будем говорить, что выполнено условие Крамера, если существует положительная постоянная A такая, что

$$\mathbf{E}\exp\{hX_1\} < \infty, \quad |h| < A. \tag{1}$$

Говорят, что выполнено условие Линника, если существуют постоянные $C_\alpha > 0$ и $\delta > 0$ такие, что

$$\mathbf{E}\exp\{\delta |X_1|^{\frac{4\alpha}{2\alpha+1}}\} \leqslant C_\alpha < \infty, \quad 0 < \alpha < 1/2. \tag{2}$$

И наконец, будем говорить, что выполнено условие Статулявичуса, если существуют постоянные $\gamma \geqslant 0$ и $\Delta > 0$ такие, что

$$|\Gamma_m\{X_1\}| \leqslant \frac{(m!)^{1+\gamma}}{\Delta^{m-2}}, \quad m = 3, 4, \dots \tag{3}$$

Если выполнено условие Крамера (1), то для $x \geqslant 0$, $x = o(\sqrt{n})$, имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{P}(S_n > x\sqrt{n})}{1-\Phi(x)} &= \exp\left\{\frac{x^3}{\sqrt{n}}\lambda\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right\}\left(1 + O\left(\frac{x+1}{\sqrt{n}}\right)\right), \\ \frac{\mathbf{P}(S_n < -x\sqrt{n})}{\Phi(-x)} &= \exp\left\{-\frac{x^3}{\sqrt{n}}\lambda\left(-\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right\}\left(1 + O\left(\frac{x+1}{\sqrt{n}}\right)\right), \end{aligned} \tag{4}$$

где $\lambda(t) = \sum_{k=0}^\infty \lambda_k t^k$ – известный ряд Крамера, сходящийся при всех достаточно малых значениях $|t|$, коэффициенты которого определяются кумулянтами величины X_1 ([1], с. 269).

Здесь и далее все пределы указаны при $n \to \infty$.

Если выполнено условие Линника (2) с $\delta = 1$, то в интервале $0 \leqslant x \leqslant n^{\alpha}/\rho(n)$, где $\rho(n) \to \infty$ сколь угодно медленно, имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{P}(S_n > x\sqrt{n})}{1-\Phi(x)} &= 1 + o(1), \\ \frac{\mathbf{P}(S_n < -x\sqrt{n})}{\Phi(-x)} &= 1 + o(1), \end{aligned} \tag{5}$$

если $0 < \alpha \leqslant 1/6$, и

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{P}(S_n > x\sqrt{n})}{1-\Phi(x)} &= \exp\{L_\alpha(x)\}(1 + o(1)), \\ \frac{\mathbf{P}(S_n < -x\sqrt{n})}{\Phi(-x)} &= \exp\{L_\alpha(-x)\}(1 + o(1)), \end{aligned} \tag{6}$$

если $1/6 < \alpha < 1/2$, где

$$L_\alpha(x) = \sum_{3 \leqslant k < \frac{2}{1-2\alpha}} c_k x^k,$$

причем выражения коэффициентов c_k через семиинварианты случайной величины $S_n/\sqrt{n}$ совпадают с выражениями соответствующих коэффициентов ряда Крамера, и

$$|c_k| \leqslant \frac{2}{k}\left(\frac{64 C_\alpha e^{\beta}\beta^{3\beta}}{\sqrt{n}}\right)^{k-2}((k+1)!)^{\frac{1-2\alpha}{4\alpha}}, \quad k = 3, 4, \dots,$$

где $\beta = \frac{1+2\alpha}{4\alpha}$.

Этот результат можно найти в [2].

Заметим, что из приведенных результатов легко следует, что при выполнении условия Линника с $\delta = 1$ соотношения (5) имеют место и в случае $1/6 < \alpha < 1/2$, если все семиинварианты случайной величины X_1, $\Gamma_m\{X_1\}$, равны нулю для $m < 2/(1-2\alpha)$. Этот результат был получен Ю. В. Линником и его можно найти, например, в [1], с. 306–307.

Если выполнено условие Статулявичуса (3), то в интервале $0 \leqslant x \leqslant n^{\frac{1}{2(1+2\gamma)}}/\rho(n)$, где $\rho(n) \to \infty$ сколь угодно медленно, имеют место соотношения (5), если $\gamma \geqslant 1$, и соотношения (6), если $0 \leqslant \gamma < 1$, с заменой $L_\alpha(x)$ на

$$L_\gamma(x) = \sum_{3 \leqslant k < p} c_k x^k,$$

где

$$p = \begin{cases} 1/\gamma + 2, & \text{если} \quad \gamma > 0, \\ \infty, & \text{если} \quad \gamma = 0, \end{cases} \tag{7}$$

а выражения коэффициентов c_k через семиинварианты случайной величины $S_n/\sqrt{n}$ также совпадают с выражениями соответствующих коэффициентов ряда Крамера и

$$|c_k| \leqslant \frac{2}{k}\left(\frac{16}{\Delta\sqrt{n}}\right)^{k-2}((k+1)!)^{\gamma}, \quad k = 3, 4, \ldots .$$

Приведенный результат легко следует из результатов, полученных в [3] и [4].

В настоящей работе будет доказано, что условие Крамера (1), условие Линника (2) и условие Статулявичуса (3) необходимы для выполнения соответствующих соотношений вида (4)–(6). Кроме того, мы покажем, что условие Статулявичуса обобщает как условие Крамера (1), так и условие Линника (2).

Прежде всего заметим, что в случае $\gamma = 0$ условие Статулявичуса равносильно условию Крамера.

Действительно, если выполнено условие Статулявичуса, то

$$|\log \mathbf{E} e^{hX_1}| = \left|\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\Gamma_k(X_1) h^k}{k!}\right| \leqslant h^2 \sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{h}{\Delta}\right)^{k-2} < \infty,$$

если $|h| < \Delta$, и, значит, выполнено условие Крамера. Если же выполнено условие Крамера, то существует положительная постоянная a такая, что $\mathbf{E} e^{a|X_1|} < \infty$ ([1], с. 71). Значит, существует положительная постоянная L такая, что

$$\frac{a^k \mathbf{E}|X_1|^k}{k!} \leqslant L, \quad k = 1, 2, \ldots$$

и $\mathbf{E}|X_1|^k \leqslant \frac{Lk!}{a^k}$. Следовательно, для $k \geqslant 3$ имеем

$$\mathbf{E}|X_1|^k \leqslant (L_1/a)^{k-2} k!,$$

где $L_1 = 1$, если $L/a^2 \leqslant 1$ и $L_1 = L/a^2$, если $L/a^2 > 1$, и в силу леммы 2 из [3], получаем оценку

$$|\Gamma_k(X_1)| \leqslant (k!)(2\max\{L_1/a, 1\})^{k-2}, \quad k = 3, 4, \ldots .$$

Таким образом, выполнено условие Статулявичуса.

В случае $\gamma > 0$ условие Статулявичуса будет равносильно условию Линника (2).

Действительно, из выполнения условия (2) следует, что

$$\frac{\delta_1^k \mathbf{E}|X_1|^{k/\beta}}{k!} \leqslant C_a, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где $\beta = \frac{1+2\alpha}{4\alpha}$, а $\delta_1 = \min(\delta, 1)$.

Отсюда вытекает, что для любого целого $m \geqslant 1$ и фиксированного $\beta > 1$ найдется целое число $k \geqslant 1$, определяемое из неравенств $m \leqslant k/\beta < m+1$ такое, что

$$\mathbf{E}|X_1|^m \leqslant (\mathbf{E}|X_1|^{k/\beta})^{\frac{m\beta}{k}} \leqslant \left(\frac{C_\alpha k!}{\delta_1^k}\right)^{\frac{m\beta}{k}} \leqslant \frac{2C_\alpha e^\beta \beta^{m\beta}(m!)^\beta}{\delta_1^{m\beta}}.$$

Следовательно, для $m \geqslant 3$ имеем

$$\mathbf{E}|X_1|^m \leqslant \left(\frac{2C_\alpha e^\beta \beta^{3\beta}}{\delta_1^{3\beta}}\right)^{m-2} (m!)^\beta.$$

Тогда, учитывая лемму 2 из [3], получаем оценку

$$|\Gamma_m\{X_1\}| \leqslant \left(4C_\alpha e^\beta \left(\frac{\beta}{\delta_1}\right)^{3\beta}\right)^{m-2} (m!)^\beta.$$

Таким образом, выполнено условие Статулявичуса с $\gamma = \beta - 1$ и

$$\Delta = \left(4C_\alpha e^\beta \left(\frac{\beta}{\delta_1}\right)^{3\beta}\right)^{-1}.$$

Ниже будет показано, что из выполнения условия Статулявичуса (3) следует выполнение условия Линника (2).

Справедливы следующие результаты. Доказательство приведенных ниже теорем 1–4 можно найти в [5].

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{E}X_1 = 0$ *и* $\mathbf{D}X_1 = 1$. *Условие Статулявичуса* (3) *необходимо и достаточно для выполнения соотношений*

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(S_n > x\sqrt{n}) &= \exp\left\{-\frac{x^2}{2}(1+o(1))\right\}, \\ \mathbf{P}(S_n < -x\sqrt{n}) &= \exp\left\{-\frac{x^2}{2}(1+o(1))\right\} \end{aligned} \tag{8}$$

в области $\rho(n) \leqslant x \leqslant n^{\frac{1}{2(1+2\gamma)}}/\rho_1(n)$, *где* $\rho(n) \to \infty$ *и* $\rho_1(n) \to \infty$ *сколь угодно медленно.*

Следствие 1. *Пусть* $\mathbf{E}X_1 = 0$ *и* $\mathbf{D}X_1 = 1$. *Условие Крамера* (1) *необходимо и достаточно для выполнения соотношений* (8) *в области* $\rho(n) \leqslant x \leqslant \sqrt{n}/\rho_1(n)$, *где* $\rho(n) \to \infty$ *и* $\rho_1(n) \to \infty$ *сколь угодно медленно.*

Следствие 2. *Пусть* $\mathbf{E}X_1 = 0$ *и* $\mathbf{D}X_1 = 1$. *Условие Линника* (2) *необходимо и достаточно для выполнения соотношений* (8) *в области* $\rho(n) \leqslant x \leqslant n^{\alpha}/\rho_1(n)$, *где* $\rho(n) \to \infty$ *и* $\rho_1(n) \to \infty$ *сколь угодно медленно.*

Действительно, из выполнения условия (2) следует выполнение условия Статулявичуса (3) с $\gamma = \beta - 1$ и некотором Δ, откуда следует выполнение (8) в области $\rho(n) \leqslant x \leqslant n^{\alpha}/\rho_1(n)$, где $\rho(n) \to \infty$ и $\rho_1(n) \to \infty$ сколь угодно медленно. Наоборот, из выполнения соотношений (8) в области $\rho(n) \leqslant x \leqslant n^{\alpha}/\rho_1(n)$, где $\rho(n) \to \infty$ и $\rho_1(n) \to \infty$, следует, что в этой области

$$\mathbf{P}(|S_n| > x\sqrt{n}) \leqslant e^{-\beta x^2} \tag{9}$$

для некоторого $\beta > 0$ т всех достаточно больших n. Откуда следует выполнение условие (2) (см. леммы 8 и 9 из [5]).

Таким образом, если случайная величина X_1 удовлетворяет условию Статулявичуса (3), то в области $\rho(n) \leqslant x \leqslant n^{\alpha}/\rho_1(n)$, где $\rho(n) \to \infty$ и $\rho_1(n) \to \infty$, имеет место соотношение (9) для всех достаточно больших n и некоторого $\beta > 0$, откуда следует выполнение условия Линника (2).

Значит, условие Статулявичуса в случае $\gamma > 0$ равносильно условию Линника (2).

Теорема 2. *Пусть* $\mathbf{E}X_1 = 0$ *и* $\mathbf{D}X_1 = 1$. *Условие Статулявичуса* (3) *необходимо и достаточно для выполнения соотношения* (9) *в области* $\rho(n) \leqslant x \leqslant n^{\frac{1}{2(1+2\gamma)}}/\rho_1(n)$, *для всех достаточно больших* n *и некоторого* $\beta > 0$, *где* $\rho(n) \to \infty$ *и* $\rho_1(n) \to \infty$.

Заметим, что в теореме 2 $\rho(n)$ и $\rho_1(n)$ – произвольные функции, стремящиеся к бесконечности, такие, что $\rho(n) < n^{\frac{1}{2(1+2\gamma)}}/\rho_1(n)$, а β не зависит от выбора этих функций.

Следствие 1. *Пусть* $\mathbf{E}X_1 = 0$ *и* $\mathbf{D}X_1 = 1$. *Условие Крамера* (1) *необходимо и достаточно для выполнения соотношения* (9) *в области* $\rho(n) \leqslant x \leqslant \sqrt{n}/\rho_1(n)$, *для всех достаточно больших* n *и некоторого* $\beta > 0$, *где* $\rho(n) \to \infty$ *и* $\rho_1(n) \to \infty$.

Следует отметить, что последний результат можно найти в [6], и теперь он легко следует из теоремы 2.

Следствие 2. *Пусть* $\mathbf{E}X_1 = 0$ *и* $\mathbf{D}X_1 = 1$. *Условие Линника* (2) *необходимо и достаточно для выполнения соотношения* (9) *в области* $\rho(n) \leqslant x \leqslant n^{\alpha}/\rho_1(n)$, *для всех достаточно больших* n *и некоторого положительного* β, *где* $\rho(n) \to \infty$ *и* $\rho_1(n) \to \infty$.

Теорема 3. *Пусть* $\gamma \geqslant 1$. *Для выполнения соотношений* (5) *в области* $0 \leqslant x \leqslant n^{\frac{1}{2(1+2\gamma)}}/\rho(n)$, *где* $\rho(n) \to \infty$ *сколь угодно медленно, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

1) *условие Статулявичуса,*
2) $\mathbf{E}X_1 = 0$ *и* $\mathbf{D}X_1 = 1$.

Следствие. *Пусть* $0 < \alpha \leqslant 1/6$. *Для выполнения соотношений* (5) *в области* $0 \leqslant x \leqslant n^{\alpha}/\rho(n)$, *где* $\rho(n) \to \infty$ *сколько угодно медленно, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

1) *условие Линника,*
2) $\mathbf{E}X_1 = 0$ *и* $\mathbf{D}X_1 = 1$.

Теорема 4. *Пусть* $0 \leqslant \gamma < 1$. *Для выполнения соотношений* (6) *с заменой* $L_{\alpha}(x)$ *на* $L_{\gamma}(x)$ *в области* $0 \leqslant x \leqslant n^{\frac{1}{2(1+2\gamma)}}/\rho(n)$, *где* $\rho(n) \to \infty$ *сколь угодно медленно, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

1) *условие Статулявичуса,*
2) $\mathbf{E}X_1 = 0$ *и* $\mathbf{D}X_1 = 1$.

Здесь

$$L_{\gamma}(x) = \sum_{3 \leqslant k < p} c_k\, x^k,$$

где p *определяется соотношениями* (7), *а* $|c_k| = O\big(\big(\frac{B}{\sqrt{n}}\big)^{k-2}\big)$ *для некоторого* $B > 0$.

Следствие 1. *Для выполнения соотношений* (6) *с заменой* $L_{\alpha}(x)$ *на* $L_0(x)$ *в области* $0 \leqslant x \leqslant \sqrt{n}/\rho(n)$, *где* $\rho(n) \to \infty$ *сколько угодно медленно, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

1) *условие Крамера,*
2) $\mathbf{E}X_1 = 0$ *и* $\mathbf{D}X_1 = 1$.

Здесь $L_0(x) = \sum_{k=3}^{\infty} c_k\, x^k$, *а* $\sqrt{n}\sum_{k=3}^{\infty} c_k\, x^{k-3}$ – *некоторый ряд, сходящийся при всех достаточно малых значениях* $|x|/\sqrt{n}$.

Замечание 1. Ряд $\frac{x^3}{\sqrt{n}}\lambda\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)$ совпадает с рядом $L_0(x)$, так как $\lambda_k = \frac{c_{k+3}}{n^{(k+1)/2}}$ ([7]). Здесь выражения коэффициентов c_k через семиинварианты случайной величины $S_n/\sqrt{n}$ совпадают с выражениями соответствующих коэффициентов ряда Крамера, а $\lambda(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k\, t^k$ – ряд Крамера.

Замечание 2. Пусть $\mathbf{E}X_1 = 0$ и $\mathbf{D}X_1 = 1$. В [6] было показано, что если соотношения (4) справедливы в области $0 \leqslant x \leqslant \sqrt{n}/\rho(n)$ для любой функции $\rho(n) \to \infty$, где

$$\lambda(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k\, t^k$$

– некоторый ряд, сходящийся при всех достаточно малых значениях $|t|$, то ряд $\lambda(t)$ будет совпадать с рядом Крамера.

Следствие 2. *Пусть $1/6 < \alpha < 1/2$. Для выполнения соотношений (6) в области $0 \leqslant x \leqslant n^{\alpha}/\rho(n)$ для любой функции $\rho(n) \to \infty$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*
1) *условие Линника,*
2) $\mathbf{E}X_1 = 0$ *и* $\mathbf{D}X_1 = 1$.

Здесь

$$L_{\alpha}(x) = \sum_{3 \leqslant k < \frac{2}{1-2\alpha}} c_k\, x^k,$$

где

$$|c_k| = O\left(\left(\frac{B}{\sqrt{n}}\right)^{k-2}\right)$$

для некоторого $B > 0$.

Литература

1. В. В. Петров, *Суммы независимых случайных величин.* Наука, М. (1972).
2. Н. Н. Амосова, *О необходимости условия Линника в одной теореме о вероятностях больших уклонений.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **228** (1996), 9–15.
3. Р. Рудзкис, Л. Саулис, В. Статулявичус, *Общая лемма о вероятностях больших уклонений.* — Литовский математический сборник **XYIII**, No. 2 (1978), 99–116.
4. Л. Саулис, В. Статулявичус, *Предельные теоремы о больших уклонениях.* Мокслас, Вильнюс (1989).

5. Н. Н. Амосова, *О необходимости условия Статулявичуса в предельных теоремах для вероятностях больших уклонений.* — Lit. Matem. Rink. **39**, No. 3 (1999), 293–303.
6. Н. Н. Амосова, *К вопросу о необходимости условия Крамера.* В сб.: Кольца и модули. Предельные теоремы теории вероятностей. 1 (1986), 131–134. Издательство СПбГУ.
7. Л. В. Розовский, *О коэффициентах ряда Крамера.* — Теория вероятн. и ее применен. **43**, No. 1 (1998), 161–166.

Amosova N. N. Necessity of Cramer's, Linnik's and Statulevičius conditions for large deviation probabilities.

In this paper the necessity of Cramer's, Linnik's and Statulevičius conditions is considered in theorems for large deviations probabilities. It is shown also that Statulevičius condition is a generalization of Cramer's and Linnik's conditions.

С.-Петербургский государственный
Технический университет

Поступило 8 сентября 1999 г.