Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 260, 1999 г.

А. Н. Бородин

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ, ОСТАНОВЛЕННОГО В МОМЕНТ, ОБРАТНЫЙ К РАЗМАХУ

0. В работе получены результаты, позволяющие вычислять распределения некоторых функционалов от процесса броуновского движения, остановленного в момент, обратный к размаху процесса. Различные задачи, связанные с размахом броуновского движения и с процессом, обратным к размаху, изучались многими авторами. Отметим, например, интересные работы [1] и [2].

Пусть W_s, $s \in (0,\infty)$, – процесс броуновского движения, и пусть $\theta_v = \min\{t : \sup\limits_{0\leqslant s\leqslant t} W_s - \inf\limits_{0\leqslant s\leqslant t} W_s = v\}$ – первый момент, когда размах процесса W_s достигает заданного значения v. Момент остановки θ_v называется обратным к размаху процесса W_s. В работе рассматриваются два класса функционалов от броуновского движения. К первому относятся аддитивные функционалы вида

$$A(f,\vec{x},t) := \int\limits_0^t f(W_s)ds + \sum_{j=1}^k \gamma_j \ell(t,x_j), \qquad \gamma_j \geqslant 0,$$

где $\ell(t,y)$ – броуновское локальное время, определяемое как предел

$$\ell(t,y) := \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_0^t \mathbb{I}_{[y,y+\varepsilon)}(W_s)ds.$$

Этот предел существует (см. [3]) с вероятностью единица и является непрерывным процессом по $(t,y) \in [0,\infty)\times\mathbf{R}^1$. Второй класс функционалов составляют интегральные функционалы от броуновского локального времени

$$B(f,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\ell(t,y))dy.$$

Работа поддержана грантом РФФИ 99-01-00112.

Нас интересуют методы вычисления распределений функционалов A и B от броуновского движения, остановленного в момент θ_v, т.е. методы вычисления распределений величин $A(f,\vec{x},\theta_v)$ и $B(f,\theta_v)$.

Оказывается, что задача о вычислении распределений функционалов от броуновского движения, остановленного в момент θ_v, обратный к размаху процесса W_s, может быть трансформирована к задаче о вычислении таких же функционалов от процесса W_s, остановленного в момент первого выхода из конечного интервала, т.е. в момент $H_{a,b} = \min\{s : W_s \notin (a,b)\}$. Этот факт является основополагающим при доказательстве многих результатов о распределении функционалов для момента θ_v.

Для любой случайной величины η и события G обозначение $\mathbf{E}\{\eta; G\}$ служит компактной записью для $\mathbf{E}\{\eta \mathbb{I}_G\}$. Будем обозначать $\mathbf{P}_x$ и $\mathbf{E}_x$ вероятность и математическое ожидание по процессу броуновского движения $W(s), s \geqslant 0$, при условии $W(0) = x$.

1. Сформулируем хорошо известный результат (см., например, [4], гл. II, §2, теорема 2.4) о распределении аддитивных функционалов типа A для момента первого выхода $H_{a,b}$.

Теорема 1.1. *Пусть $f(x)$, $x \in [a,b]$, – кусочно-непрерывная неотрицательная функция. Тогда функция*

$$u(x) := \mathbf{E}_x\{\exp(-A(f,\vec{x},H_{a,b})); W_{H_{a,b}} = a\} \tag{1.1}$$

является единственным непрерывным решением задачи

$$\frac{1}{2}u''(x) - f(x)u(x) = 0, \quad x \in (a,b) \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_k\}, \tag{1.2}$$

$$u'(x_j + 0) - u'(x_j - 0) = 2\gamma_j u(x_j), \quad j = 1, 2, \dots, k, \tag{1.3}$$

$$u(a+0) = 1, \qquad u(b-0) = 0. \tag{1.4}$$

Замечание 1.1. Для кусочно-непрерывной функции f уравнение (1.2) должно трактоваться следующим образом: оно имеет место во всех точках непрерывности функции f, а в точках разрыва его решение непрерывно вместе с первой производной.

Замечание 1.2. Если в определении функции $u(x)$ положить $W_{H_{a,b}} = b$, то граничными условиями вместо (1.4) будут $u(a+0) = 0$, $u(b-0) = 1$.

Применяя теорему 1.1, несложно вычислить, что

$$\mathbf{P}_x(W_{H_{a,b}}=a)=\frac{b-x}{b-a},\quad \mathbf{P}_x(W_{H_{a,b}}=b)=\frac{x-a}{b-a},\tag{1.5}$$

$$\mathbf{E}_x\{e^{-\alpha H_{a,b}};W_{H_{a,b}}=a\}=\frac{\operatorname{sh}((b-x)\sqrt{2\alpha})}{\operatorname{sh}((b-a)\sqrt{2\alpha})}.\tag{1.6}$$

Дифференцируя (1.6) по α в точке ноль, получим, что

$$\mathbf{E}_x\{H_{a,b};W_{H_{a,b}}=a\}=\frac{(b-x)(x-a)}{3(b-a)}(2b-x-a).\tag{1.7}$$

Кроме того, нам понадобится следующая формула (см. [5], формула 1.3.3.5 (a))

$$\mathbf{E}_x\{e^{-\eta\ell(H_{a,b},g)};W_{H_{a,b}}=a\}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{b-x}{b-a+2\eta(b-g)(g-a)}, & g\leqslant x\leqslant b,\\ \dfrac{b-x+2\eta(b-g)(g-x)}{b-a+2\eta(b-g)(g-a)}, & a\leqslant x\leqslant g.\end{cases}\tag{1.8}$$

Из этой формулы следует, что

$$\mathbf{E}_x\{\ell(H_{a,b},g);W_{H_{a,b}}=a\}=\frac{2(b-g)^2(x-a)}{(b-a)^2},\quad a<x<g<l.\tag{1.9}$$

Аналогичные формулы имеют место и при условии $W_{H_{a,b}}=b$.

Следующий результат является ключевым для вычисления условных распределений функционалов $A(f,\vec{x},t)$ для моментов θ_v, при условии $W_{\theta_v}=z$.

Теорема 1.2. *Пусть $f(x)$ – кусочно-непрерывная неотрицательная функция. Тогда при $x-v<z<x$*

$$\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{E}_x\{\exp(-A(f,\vec{x},\theta_v));W_{\theta_v}<z\}=$$

$$=\frac{\partial}{\partial v}\mathbf{E}_x\{\exp(-A(f,\vec{x},H_{z,z+v}));W_{H_{z,z+v}}=z\}.\tag{1.10}$$

Замечание 1.3. Аналогичный результат верен и при $x<z<x+v$. Нужно лишь в правой части (1.10) момент $H_{z,z+v}$ заменить на момент $H_{z-v,z}$.

Доказательство. Положим $H_z = \min\{s : W_s = z\}$. Пусть δ достаточно малое положительное число. Обозначим через D_δ множество тех траекторий броуновского движения, которые начинаясь в точке x, достигают уровня $z+v$ раньше, чем z, и затем из точки $z+v$ достигают уровня $z+\delta$ раньше, чем $z+v+\delta$. Обозначим через C_δ множество тех траекторий броуновского движения, которые начинаясь в точке x, достигают уровня $z+v$ раньше, чем $z+\delta$, затем из точки $z+v$ достигают уровня $z+\delta$ раньшем, чем $z+v+\delta$, и, наконец, из точки $z+\delta$ достигают уровня z раньше, чем $z+v$. Несложно понять, что

$$C_\delta \subset \{W_{\theta_v} \in [z, z+\delta)\} \subset D_\delta, \tag{1.11}$$

$$C_\delta \subset \{\sup_{0<s<H_z} W_s \in [z+v, z+v+\delta)\} \subset D_\delta. \tag{1.12}$$

Принимая во внимание строго марковское свойство броуновского движения и формулу (1.5), получим

$$\mathbf{P}_x(D_\delta \setminus C_\delta) \leqslant 2\mathbf{P}_{z+v}(W_{H_{z+\delta,z+v+\delta}} = z+\delta)\mathbf{P}_{z+\delta}(W_{H_{z,z+v}} = z+v) = \frac{2\delta^2}{v^2}. \tag{1.13}$$

В силу (1.11)–(1.13),

$$\mathbf{E}_x\{\exp(-A(f,\vec{x},\theta_v)); W_{\theta_v} \in [z, z+\delta)\} = \tag{1.14}$$

$$= \mathbf{E}_x\{\exp(-A(f,\vec{x},\theta_v)); \sup_{0<s<H_z} W_s \in [z+v, z+v+\delta)\} + O\Big(\frac{\delta^2}{v^2}\Big) =$$

$$= \mathbf{E}_x\{\exp(-A(f,\vec{x},H_z)); \sup_{0<s<H_z} W_s \in [z+v, z+v+\delta)\} + I_1(\delta) + O\Big(\frac{\delta^2}{v^2}\Big),$$

где

$$\begin{aligned} I_1(\delta) = \mathbf{E}_x\{&\exp(-A(f,\vec{x},\theta_v)) - \\ &- \exp(-A(f,\vec{x},H_z)); \sup_{0<s<H_z} W_s \in [z+v, z+v+\delta)\} = \\ &= \mathbf{E}_x\{\exp(-A(f,\vec{x},\theta_v)) - \exp(-A(f,\vec{x},H_z)); C_\delta\} + O\Big(\frac{\delta^2}{v^2}\Big). \end{aligned}$$

Поскольку функция $f(x)$ кусочно-непрерывна, то она является ограниченной на любом конечном интервале, и справедлива следующая оценка

$$|I_1(\delta)| \leqslant \mathbf{E}_x\{|A(f,\vec{x},H_z)-A(f,\vec{x},\theta_v)|;C_\delta\}+O\Big(\frac{\delta^2}{v^2}\Big)\leqslant$$
$$\leqslant \max_{y\in[z,z+v]} f(y)\mathbf{E}_x\{|H_z-\theta_v|;C_\delta\}+$$
$$+\sum_{j=1}^{k}\gamma_j\mathbf{E}_x\{(\ell(H_z,x_j)-\ell(\theta_v,x_j));C_\delta\}+O\Big(\frac{\delta^2}{v^2}\Big). \qquad (1.15)$$

Применяя строго марковское свойство броуновского движения и оценки (1.5), (1.7), получим

$$\mathbf{E}_x\{|H_z-\theta_v|;C_\delta\}\leqslant$$
$$\leqslant \mathbf{P}_{z+v}(W_{H_{z+\delta,z+v+\delta}}=z+\delta)\mathbf{E}_{z+\delta}\{H_{z,z+v};W_{H_{z,z+v}}=z\}=$$
$$=\frac{\delta}{v}\frac{(v-\delta)\delta}{3v}(2v-\delta)\leqslant\frac{2}{3}\delta^2.$$

В силу строго марковского свойства броуновского движения и оценок (1.5), (1.9)

$$\mathbf{E}_x\{(\ell(H_z,x_j)-\ell(\theta_v,x_j));C_\delta\}\leqslant \mathbf{P}_{z+v}(W_{H_{z+\delta,z+v+\delta}}=z+\delta)\times$$
$$\times\mathbf{E}_{z+\delta}\{\ell(H_{z,z+v},x_j);W_{H_{z,z+v}}=z\}=\frac{\delta}{v}\frac{2(z+v-x_j)^2\delta}{v^2}\leqslant\frac{2\delta^2}{v}.$$

В результате имеем, что $I_1(\delta)=O(\delta^2)$. Поскольку

$$\mathbf{E}_x\{\exp(-A(f,\vec{x},H_z));\ \sup_{0<s<H_z}W_s\in[z+v,z+v+\delta)\}=$$
$$=\mathbf{E}_x\{\exp(-A(f,\vec{x},H_{z,z+v+\delta}));W_{H_{z,z+v+\delta}}=z\}-$$
$$-\mathbf{E}_x\{\exp(-A(f,\vec{x},H_{z,z+v}));W_{H_{z,z+v}}=z\},$$

то поделив правую и левую части равенства (1.14) на δ и устремив δ к нулю, получим (1.10). Нужно еще убедиться, что производная, стоящая в правой части (1.10), существует. Положим

$$u_v(x)=\mathbf{E}_x\{\exp(-A(f,\vec{x},H_{z,z+v}));W_{H_{z,z+v}}=z\}. \qquad (1.16)$$

Тогда, в силу (1.2)–(1.4), функцию $u_v(x)$ можно представить в виде

$$u_v(x)=\frac{\psi(z+v)\varphi(x)-\psi(x)\varphi(z+v)}{\psi(z+v)\varphi(z)-\psi(z)\varphi(z+v)},\quad x\in(z,z+v), \qquad (1.17)$$

где $\psi(x)$ и $\varphi(x)$ – фундаментальные решения задачи

$$\frac{1}{2}u''(x) - f(x)u(x) = 0, \qquad x \in R^1 \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_k\}, \tag{1.18}$$

$$u'(x_j + 0) - u'(x_j - 0) = 2\gamma_j u(x_j), \quad j = 1, 2, \dots, k. \tag{1.19}$$

Из формулы (1.17) следует дифференцируемость функции $u_v(x)$ по v. Дифференцируемость имеет место даже, если $z{+}v$ совпадает с какой-нибудь из точек x_j. Теорема 1.2 доказана.

Пусть $\omega := \psi'(x)\varphi(x) - \psi(x)\varphi'(x)$ – вронскиан, который для задачи (1.18), (1.19) является постоянной величиной. Определим

$$\rho(x,y) := \psi(x)\varphi(y) - \psi(y)\varphi(x).$$

Легко проверить, что для любых a, b и c

$$\frac{\partial}{\partial b}\rho(a,b)\rho(b,c) - \rho(a,b)\frac{\partial}{\partial b}\rho(b,c) = -\omega\rho(a,c). \tag{1.20}$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial}{\partial v}u_v(x) = \frac{\partial}{\partial v}\frac{\rho(z+v,x)}{\rho(z+v,z)} = -\frac{\partial}{\partial v}\frac{\rho(x,z+v)}{\rho(z+v,z)} = \frac{\omega\rho(x,z)}{\rho^2(z+v,z)}.$$

Проделав аналогичные действия для $x < z < x+v$, окончательно получаем

$$\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{E}_x\{\exp(-A(f,\vec{x},\theta_v)); W_{\theta_v} < z\} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\omega\rho(x,z)}{\rho^2(z+v,z)}, & x - v < z \leqslant x, \\ \dfrac{\omega\rho(z,x)}{\rho^2(z,z-v)}, & x \leqslant z < x+v. \end{cases} \tag{1.21}$$

В результате для произвольной кусочно-непрерывной функции $F(z)$, имеем

$$\mathbf{E}_x\big\{F(W_{\theta_v})\exp(-A(f,\vec{x},\theta_v))\big\} =$$

$$= \omega\int\limits_x^{x+v}\frac{F(z)\rho(z,x) + F(z-v)\rho(x,z-v)}{\rho^2(z,z-v)}\,dz. \tag{1.22}$$

2. В этом параграфе дается описание броуновского локального времени $\ell(\theta_v, y)$ как процесса по параметру y. Оказывается, что при условии $W_{\theta_v} = z$, процесс $\ell(\theta_v, y)$ является диффузионным процессом.

Теорема 2.1. *Пусть x – начальная точка броуновского движения W_s, и пусть $z < x$. Тогда при условии $W_{\theta_v} = z$ процесс $\ell(\theta_v, y)$, $y \in [z, z+v)$, является марковским процессом, для которого*

$$\ell(\theta_v, y) = l_1(y) \qquad \text{при} \quad x \leqslant y \leqslant z+v,$$
$$\ell(\theta_v, -y) = l_2(y) \quad \text{при} \quad -x \leqslant y \leqslant -z,$$

где $l_1(y)$ и $l_2(y)$ являются независимыми диффузионными процессами с общим начальным значением $l_1(x) = l_2(-x)$, распределенным по формуле

$$\mathbf{P}_x(\ell(\theta_v, x) \in dt | W_{\theta_v} = z) = \\ = \frac{v^2 t}{4(v-|x-z|)^2(z-x)^2} \exp\Big(-\frac{t}{2(v-|x-z|)} - \frac{t}{2|x-z|}\Big) dt. \tag{2.1}$$

и производящими операторами

$$\mathbb{L}_1 = 2t\frac{d^2}{dt^2} + \Big(4 - \frac{2t}{z+v-y}\Big)\frac{d}{dt}, \quad \mathbb{L}_2 = 2t\frac{d^2}{dt^2} + \Big(2 + \frac{2t}{y+z}\Big)\frac{d}{dt} \tag{2.2}$$

соответственно.

Замечание. При $x < z$ справедлив аналогичный результат:

$$\ell(\theta_v, y) = l_3(y) \qquad \text{при} \quad x \leqslant y \leqslant z,$$
$$\ell(\theta_v, -y) = l_4(y) \quad \text{при} \quad -x \leqslant y \leqslant v-z,$$

где $l_3(y)$ и $l_4(y)$ являются независимыми диффузионными процессами с общим начальным значением $l_3(x) = l_4(-x)$, распределенным по формуле (2.1) и производящими операторами

$$\mathbb{L}_3 = 2t\frac{d^2}{dt^2} + \Big(2 - \frac{2t}{z-y}\Big)\frac{d}{dt}, \quad \mathbb{L}_4 = 2t\frac{d^2}{dt^2} + \Big(4 + \frac{2t}{y+z-v}\Big)\frac{d}{dt}$$

соответственно.

Это утверждение несложно вывести из теоремы 2.1, основываясь на свойстве симметрии броуновского движения ($-W_s$ тоже является броуновским движением).

Доказательство. Пусть $f(x)$ – произвольная непрерывная ограниченная функция и y – произвольное вещественное число. Положим $f^+(x) = f(x)\mathbb{I}_{[y,\infty)}(x)$, $f(x) = f^-(x)\mathbb{I}_{(-\infty,y)}(x)$. Для доказательства марковости процесса $\ell(\theta_v, y)$ при условии $W_{\theta_v} = z$ достаточно установить, что для любых $x, y \in [z, z+v)$

$$\mathbf{E}_x\Big\{\exp\Big(-\int\limits_0^{\theta_v} f(W_s)ds\Big)\Big|\ell(\theta_v, y) = t,\, W_{\theta_v} = z\Big\} =$$

$$= \mathbf{E}_x\Big\{\exp\Big(-\int\limits_0^{\theta_v} f^+(W_s)ds\Big)\Big|\ell(\theta_v, y) = t,\, W_{\theta_v} = z\Big\}\times$$

$$\times\, \mathbf{E}_x\Big\{\exp\Big(-\int\limits_0^{\theta_v} f^-(W_s)ds\Big)\Big|\ell(\theta_v, y) = t,\, W_{\theta_v} = z\Big\}. \qquad (2.3)$$

Это соотношение характеризует для процесса $\ell(\theta_v, y)$, $y \in [z, z+v)$, независимость прошлого от будущего при фиксированном настоящем, поскольку, в силу определения локального времени,

$$\int\limits_0^{\theta_v} f(W_s)ds = \int\limits_z^{z+v} f(q)\ell(\theta_v, q)dq, \qquad \int\limits_0^{\theta_v} f^\pm(W_s)ds = \int\limits_z^{z+v} f^\pm(q)\ell(\theta_v, q)dq.$$

Соотношение (2.3) эквивалентно следующему:

$$\mathbf{E}_x\Big\{\exp\Big(-\int\limits_0^{\theta_v} f(W_s)ds\Big); \ell(\theta_v, y) \in dt,\, W_{\theta_v} \in dz\Big\}\times$$
$$\times\, \mathbf{P}_x(\ell(\theta_v, y) \in dt, W_{\theta_v} \in dz) =$$

$$= \mathbf{E}_x\Big\{\exp\Big(-\int\limits_0^{\theta_v} f^+(W_s)ds\Big); \ell(\theta_v, y) \in dt,\, W_{\theta_v} \in dz\Big\}\times$$

$$\times\, \mathbf{E}_x\Big\{\exp\Big(-\int\limits_0^{\theta_v} f^-(W_s)ds\Big); \ell(\theta_v, y) \in dt,\, W_{\theta_v} \in dz\Big\}. \qquad (2.4)$$

Для вычисления вероятности $\mathbf{P}_x(\ell(\theta_v, y) \in dt, W_{\theta_v} \in dz)$ воспользуемся формулой 1.3.3.6 (a) из [5]. Положим в этой формуле

$a=z$, $b=z+v$ и применим теорему 1.2. Тогда

$$\mathbf{P}_x(\ell(\theta_v,y)\in dt, W_{\theta_v}\in dz)=\frac{\partial}{\partial v}\mathbf{P}_x(\ell(H_{z,z+v},y)\in dt, W_{H_{z,z+v}}=z)dz=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{x-z}{2(y-z)^2}\exp\Big(-\dfrac{t}{2(y-z)}\Big)\dfrac{\partial}{\partial v}\exp\Big(-\dfrac{t}{2(z+v-y)}\Big)dt\,dz, & z\leqslant x\leqslant y,\\ \dfrac{1}{2(y-z)}\exp\Big(-\dfrac{t}{2(y-z)}\Big)\dfrac{\partial}{\partial v}\Big(\dfrac{z+v-x}{z+v-y}\exp\Big(-\dfrac{t}{2(z+v-y)}\Big)\Big)dt\,dz, & \\ & y\leqslant x\leqslant z+v,\end{cases} \tag{2.5}$$

В частности при $y=x$ из (2.5) после деления на вероятность

$$\mathbf{P}_x(W_{\theta_v}\in dz)=\frac{|z-x|}{v^2}\,dz,\qquad |z-x|\leqslant v, \tag{2.6}$$

получим (2.1).

Для того, чтобы вычислить математические ожидания, входящие в (2.4), сначала вычислим величину

$$U(x)=\mathbf{E}_x\Big\{\exp\Big(-\int\limits_0^{H_{a,b}}f(W_s)ds-\gamma\ell(H_{a,b},y)\Big);W_{H_{a,b}}=a\Big\}, \tag{2.7}$$

и аналогичные величины $U^-(x)$ и $U^+(x)$ для функций f^- и f^+ соответственно. Затем мы обратим преобразования Лапласа по γ и воспользуемся теоремой 1.2. Пусть $\varphi(x)$ убывающее, а $\psi(x)$ возрастающее линейно независимые решения уравнения

$$\frac12\phi''(x)-f(x)\phi(x)=0, \tag{2.8}$$

и $\omega=\psi'(x)\,\varphi(x)-\varphi'(x)\psi(x)$ их вронскиан, являющийся постоянной величиной. Положим

$$\bar\varphi_b(x)=\frac{\psi(b)\varphi(x)-\psi(x)\varphi(b)}{\psi(b)\varphi(a)-\psi(a)\varphi(b)},\qquad \bar\psi(x)=\psi(x)\varphi(a)-\psi(a)\varphi(x).$$

Тогда $\bar\varphi_b(a)=1$, $\bar\varphi_b(b)=\bar\psi(a)=0$, и $\bar\varphi_b(x)$, $\bar\psi(x)$ тоже являются линейно независимыми решениями уравнения (2.8). Их вронскиан $\bar\omega=\bar\psi'(x)\bar\varphi_b(x)-\bar\psi(x)\varphi_b'(x)$, в силу формулы (1.20), равен

$$\bar\omega=\frac{1}{\rho(b,a)}\Big[\frac{\partial}{\partial x}\rho(x,a)\rho(b,x)-\rho(x,a)\frac{\partial}{\partial x}\rho(b,x)\Big]=\omega\frac{\rho(b,a)}{\rho(b,a)}=\omega.$$

Важно, что $\bar\omega$ – постоянная величина, не зависящая от b.

Применяя теорему 1.1, получим следующее выражение для функции $U(x)$:

$$U(x)=\begin{cases}\bar\varphi_b(x)-\dfrac{\bar\varphi_b(y)\bar\psi(x)}{\bar\psi(y)}+\dfrac{\omega\bar\varphi_b(y)\bar\psi(x)}{\bar\psi(y)(\omega+2\gamma\bar\varphi_b(y)\bar\psi(y))}, & a\leqslant x\leqslant y,\\ \dfrac{\omega\bar\varphi_b(x)}{\omega+2\gamma\bar\varphi_b(y)\bar\psi(y)}, & y\leqslant x\leqslant b.\end{cases}$$

Обращая преобразование Лапласа по γ, получаем

$$\mathbf{E}_x\Big\{\exp\Big(-\int\limits_0^{H_{a,b}} f(W_s)\,ds\Big);\ell(H_{a,b},y)\in dt,\,W_{H_{a,b}}=a\Big\}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\omega\bar\psi(x)}{2\bar\psi^2(y)}\exp\Big(-\dfrac{t\bar\psi'(y)}{2\bar\psi(y)}+\dfrac{t\bar\varphi_b'(y)}{2\bar\varphi_b(y)}\Big)dt, & a\leqslant x\leqslant y,\\ \dfrac{\omega\bar\varphi_b(x)}{2\bar\varphi_b(y)\bar\psi(y)}\exp\Big(-\dfrac{t\bar\psi'(y)}{2\bar\psi(y)}+\dfrac{t\bar\varphi_b'(y)}{2\bar\varphi_b(y)}\Big)dt, & y\leqslant x\leqslant b.\end{cases}\tag{2.9}$$

Подставляя в это выражение $a=z$, $b=z+v$, дифференцируя по v и применяя теорему 1.2, получаем

$$\mathbf{E}_x\Big\{\exp\Big(-\int\limits_0^{\theta_v} f(W_s)ds\Big);\ell(\theta_v,y)\in dt,\,W_{\theta_v}\in dz\Big\}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\omega\bar\psi(x)}{2\bar\psi^2(y)}\exp\Big(-\dfrac{t\bar\psi'(y)}{2\bar\psi(y)}\Big)\dfrac{\partial}{\partial v}\exp\Big(\dfrac{t\bar\varphi_{z+v}'(y)}{2\bar\varphi_{z+v}(y)}\Big)dt\,dz, & z\leqslant x\leqslant y,\\ \dfrac{\omega}{2\bar\psi(y)}\exp\Big(-\dfrac{t\bar\psi'(y)}{2\bar\psi(y)}\Big)\dfrac{\partial}{\partial v}\Big(\dfrac{\bar\varphi_{z+v}(x)}{\bar\varphi_{z+v}(y)}\exp\Big(\dfrac{t\bar\varphi_{z+v}'(y)}{2\bar\varphi_{z+v}(y)}\Big)\Big)dt\,dz, & \\ & y\leqslant x\leqslant z+v.\end{cases}\tag{2.10}$$

Для функции $U^-(x)$ с помощью теоремы 1.1 имеем

$$U^-(x)=\begin{cases}\bar\varphi_b(x)-\dfrac{\bar\varphi_b(y)\bar\psi(x)}{\bar\psi(y)}+\dfrac{\omega\bar\psi(x)}{2\bar\psi^2(y)\Big(\dfrac{\bar\psi'(y)}{2\psi(y)}+\dfrac{1}{2(b-y)}+\gamma\Big)}, & a\leqslant x,\ x\leqslant y\\ \dfrac{\omega(b-x)}{2(b-y)\bar\psi(y)\Big(\dfrac{\bar\psi'(y)}{2\psi(y)}+\dfrac{1}{2(b-y)}+\gamma\Big)}, & y\leqslant x\leqslant b.\end{cases}$$

Обращая преобразование Лапласа по γ, получаем

$$\mathbf{E}_x\Big\{\exp\Big(-\int\limits_0^{H_{a,b}} f^-(W_s)ds\Big);\ell(H_{a,b},y)\in dt,\,W_{H_{a,b}}=a\Big\}=$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\omega\bar\psi(x)}{2\bar\psi^2(y)} \exp\Big(-\dfrac{t\bar\psi'(y)}{2\bar\psi(y)} - \dfrac{t}{2(b-y)}\Big)dt, & a \leqslant x \leqslant y, \\ \dfrac{\omega(b-x)}{2(b-y)\bar\psi(y)} \exp\Big(-\dfrac{t\bar\psi'(y)}{2\bar\psi(y)} - \dfrac{t}{2(b-y)}\Big)dt, & y \leqslant x \leqslant b. \end{cases}$$

Полагая в этом выражении $a = z$, $b = z+v$, дифференцируя по v и применяя теорему 1.2, получаем

$$\mathbf{E}_x\Big\{\exp\Big(-\int\limits_0^{\theta_v} f^-(W_s)ds\Big); \ell(\theta_v, y) \in dt,\, W_{\theta_v} \in dz\Big\} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\omega\bar\psi(x)}{2\bar\psi^2(y)} \exp\Big(-\dfrac{t\bar\psi'(y)}{2\bar\psi(y)}\Big) \dfrac{\partial}{\partial v}\, \exp\Big(-\dfrac{t}{2(z+v-y)}\Big)dt\,dz, & z \leqslant x, \\ & x \leqslant y \\ \dfrac{\omega}{2\bar\psi(y)} \exp\Big(-\dfrac{t\bar\psi'(y)}{2\bar\psi(y)}\Big) \dfrac{\partial}{\partial v}\Big(\dfrac{z+v-x}{z+v-y}\, \exp\Big(-\dfrac{t}{2(z+v-y)}\Big)\Big)dt dz, & \\ & y \leqslant x \leqslant z+v. \end{cases} \tag{2.11}$$

Для функции $U^+(x)$ с помощью теоремы 1.1 имеем

$$U^+(x) = \begin{cases} \dfrac{y-x}{y-a} + \dfrac{x-a}{2(y-a)^2\Big(\dfrac{1}{2(y-a)} - \dfrac{\bar\varphi_b'(y)}{2\bar\varphi_b(y)} + \gamma\Big)}, & a \leqslant x \leqslant y, \\ \dfrac{\bar\varphi_b(x)}{2(y-a)\bar\varphi_b(y)\Big(\dfrac{1}{2(y-a)} - \dfrac{\bar\varphi_b'(y)}{2\bar\varphi_b(y)} + \gamma\Big)}, & y \leqslant x \leqslant b. \end{cases}$$

Обращая преобразование Лапласа по γ, получаем

$$\mathbf{E}_x\Big\{\exp\Big(-\int\limits_0^{H_{a,b}} f^+(W_s)ds\Big); \ell(H_{a,b}, y) \in dt,\, W_{H_{a,b}} = a\Big\} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{x-a}{2(y-a)^2}\, \exp\Big(-\dfrac{t}{2(y-a)} + \dfrac{t\bar\varphi_b'(y)}{2\bar\varphi_b(y)}\Big)dt, & a \leqslant x \leqslant y, \\ \dfrac{\bar\varphi_b(x)}{2(y-a)\bar\varphi_b(y)}\, \exp\Big(-\dfrac{t}{2(y-a)} + \dfrac{t\bar\varphi_b'(y)}{2\bar\varphi_b(y)}\Big)dt, & y \leqslant x \leqslant b. \end{cases}$$

Полагая в этом выражении $a = z$, $b = z+v$, дифференцируя по v и применяя теорему 1.2, получаем

$$\mathbf{E}_x\Big\{\exp\Big(-\int\limits_0^{\theta_v} f^+(W_s)ds\Big); \ell(\theta_v, y) \in dt,\, W_{\theta_v} \in dz\Big\} =$$

$$
= \begin{cases} \dfrac{x-z}{2(y-z)^2} \exp\Big(-\dfrac{t}{2(y-z)}\Big) \dfrac{\partial}{\partial v} \exp\Big(\dfrac{t\bar{\varphi}'_{z+v}(y)}{2\bar{\varphi}_{z+v}(y)}\Big) dt\, dz, \\ \hfill z \leqslant x \leqslant y, \\ \dfrac{1}{2(y-z)} \exp\Big(-\dfrac{t}{2(y-z)}\Big) \dfrac{\partial}{\partial v} \Big(\dfrac{\bar{\varphi}_{z+v}(x)}{\bar{\varphi}_{z+v}(y)} \exp\Big(\dfrac{t\bar{\varphi}'_{z+v}(y)}{2\bar{\varphi}_{z+v}(y)}\Big)\Big) dt\, dz, \\ \hfill x \leqslant z+v. \end{cases} \tag{2.12}
$$

Теперь заметим, что произведение выражения, стоящего в правой части формулы (2.10) на выражение в правой части (2.5) равно произведению выражения, стоящего в правой части формулы (2.11) на выражение в правой части (2.12). А это и означает, что выполняется равенство (2.4). Тем самым верно (2.3), и, следовательно, марковость процесса $\ell(\theta_v, y)$ при условии $W_{\theta_v} = z$, когда $z \leqslant x \leqslant z+v$, доказана.

Для того, чтобы вычислить производящие операторы процессов $l_1(y)$ и $l_2(y)$, сначала вычислим выражение

$$
u(y,t) = \mathbf{E}_x\{e^{-\eta\ell(\theta_v, g)} | \ell(\theta_v, y) = t,\, W_{\theta_v} = z\}.
$$

Для того, чтобы вычислить функцию $u(y,t)$ при $x \leqslant y \leqslant g \leqslant z+v$, воспользуемся формулой (2.12). В качестве функции $f^+(x)$ возьмем δ-функцию точки g, домноженную на η. В этом случае решение $\bar{\varphi}_b(x)$ будет непрерывным решением следующей задачи:

$$
\frac{1}{2}\phi''(x) = 0, \qquad x \neq g, \tag{2.13}
$$

$$
\phi'(g+0) - \phi'(g-0) = 2\eta\phi(g), \tag{2.14}
$$

$$
\phi(a) = 1, \quad \phi(b) = 0. \tag{2.15}
$$

Такое решение задается формулой (1.8). Подставляя это решение при $x \leqslant y$ в (2.12), найдем, что

$$
\mathbf{E}_x\{e^{-\eta\ell(\theta_v, g)}; \ell(\theta_v, y) \in dt,\, W_{\theta_v} \in dz\} =
$$

$$
= \frac{x-z}{2(y-z)^2} \exp\Big(-\frac{t}{2(y-z)}\Big) \frac{\partial}{\partial v} \exp\Big(-\frac{t(1+2\eta(z+v-g))}{2(z+v-y+2\eta(z+v-g)(g-y))}\Big) dt dz.
$$

Поделив правую часть этого выражения на (2.5), получим, что

$$
u(y,t) = \frac{(z+v-y)^2}{(z+v-y+2\eta(z+v-g)(g-y))^2} \times
$$

$$
\times \exp\Big(-\frac{t\eta(z+v-g)^2}{(z+v-y)(z+v-y+2\eta(z+v-g)(g-y))}\Big).
$$

В силу определения, производящий оператор $\mathbb{L}_1$ процесса $l_1(y)$ можно вычислить из равенства $-\frac{\partial}{\partial y}\,u = \mathbb{L}_1 u$. Несложно проверить, что

$$-\frac{\partial}{\partial y}\,u = 2t\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,u + 4\frac{\partial}{\partial t}\,u - \frac{2t}{z+v-y}\,\frac{\partial}{\partial t}\,u.$$

Отсюда следует, что $\mathbb{L}_1 = 2t\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Bigl(4 - \frac{2t}{z+v-y}\Bigr)\frac{\partial}{\partial t}$.

Найдем производящий оператор процесса $l_2(y)$. Для этого вычислим функцию $u(y,t)$ при $z \leqslant g \leqslant y \leqslant x$. Воспользуемся формулой (2.11), где в качестве $f^-(x)$ выступает δ-функция точки g, домноженная на η. В этом случае $\bar\psi(x)$ будет непрерывным решением задачи (2.13), (2.14) с одним граничным условием $\bar\psi(a) = 0$. Такое решение имеет вид

$$\bar\psi(x) = \begin{cases} x-a, & a \leqslant x \leqslant g, \\ x-a+2\eta(x-g)(g-a), & g \leqslant x \leqslant b. \end{cases}$$

Подставив это решение при $y \leqslant x$ в (2.11), найдем, что

$$\mathbf{E}_x\{e^{-\eta\ell(\theta_v,g)};\ell(\theta_v,y)\in dt,\,W_{\theta_v}\in dz\} = \frac{1}{2(y-z+2\eta(y-g)(g-z))}\times$$
$$\times\exp\Bigl(-\frac{t(1+2\eta(g-z))}{2(y-z+2\eta(y-g)(g-z))}\Bigr)\frac{\partial}{\partial v}\Bigl(\frac{z+v-x}{z+v-y}\,\exp\Bigl(-\frac{t}{2(z+v-y)}\Bigr)\Bigr)dt\,dz.$$

Поделив правую часть этого равенства на (2.5), получим

$$u(y,t) = \frac{y-z}{y-z+2\eta(y-g)(g-z)}\exp\Bigl(-\frac{t\eta(g-z)^2}{(y-z)(y-z+2\eta(y-g)(g-z))}\Bigr).$$

Непосредственным дифференцированием можно проверить, что эта функция удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial y}\,u = 2t\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,u + 2\frac{\partial}{\partial t}\,u - \frac{2t}{y-z}\,\frac{\partial}{\partial t}\,u. \tag{2.16}$$

Для того, чтобы выписать производящий оператор процесса $\ell(\theta_v,-y)$, у которого время течет в обратном направлении, нужно в выражении для функции $u(y,t)$ сделать замену переменных y на $-y$ и g на $-g$. Обозначим эту новую функция $\bar u(y,t)$. Тогда производящий оператор $\mathbb{L}_2$ процесса $l_2(y) = \ell(\theta_v,-y)$, $-x \leqslant y \leqslant -z$, можно определить из равенства $-\frac{\partial}{\partial y}\,\bar u = \mathbb{L}_2\bar u$. В силу (2.16) функция $\bar u(y,t)$ удовлетворяет соотношению

$$-\frac{\partial}{\partial y}\,\bar u = 2t\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,\bar u + 2\frac{\partial}{\partial t}\,\bar u + \frac{2t}{y+z}\,\frac{\partial}{\partial t}\,\bar u.$$

Следовательно $\mathbb{L}_2 = 2t\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Big(2 + \frac{2t}{y+z}\Big)\frac{\partial}{\partial t}$. Теорема 2.1 доказана.

3. Рассмотрим вопрос о вычислении распределения функционала

$$B(f,\theta_v) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\ell(\theta_v, y))dy.$$

Следующий результат позволяет вычислять совместное распределение функционалов $B(f,\theta_v)$ и $\sup\limits_{y\in R^1} \ell(\theta_v, y)$.

Теорема 3.1. *Пусть $f(t)$, $t \in [0,h]$, – неотрицательная кусочно-непрерывная функция, $f(0) = 0$. Тогда*

$$\int\limits_0^\infty e^{-\alpha v}\mathbf{E}_x\Big\{\exp\Big(-\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\ell(\theta_v, y))dy\Big); \sup_{y\in R^1} \ell(\theta_v, y) < h\Big\}dv =$$

$$= \int\limits_0^h R(t)Q(t)dt, \tag{3.1}$$

где для $t \in (0,h)$ функции R, Q являются единственными непрерывными решениями задачи

$$2tR''(t) - (\alpha + f(t))R(t) = 0, \qquad R(0) = 1, \tag{3.2}$$

$$2tQ''(t) + 2Q'(t) - (\alpha + f(t))Q(t) = 0, \quad \lim_{t\downarrow 0} Q(t)/\ln t = -1, \tag{3.3}$$

$$R(h-0) = 0, \quad Q(h-0) = 0. \tag{3.4}$$

Замечание 3.1. В случае $h = \infty$ граничные условия (3.4) должны быть заменены следующими:

$$\limsup_{t\to\infty} t^{-1/4}e^{\sqrt{2\alpha t}}R(t) < \infty, \quad \limsup_{t\to\infty} t^{1/4}e^{\sqrt{2\alpha t}}Q(t) < \infty. \tag{3.5}$$

Замечание 3.2. Для кусочно-непрерывной функции f уравнения (3.2), (3.3) должны трактоваться точно так же, как уравнение (1.2) в замечании 1.1.

Доказательство. Предположим сначала, что $h = \infty$, и $f(x)$ – ограниченная дважды непрерывно дифференцируемая функция с ограниченными первыми и вторыми производными. Пусть $z <$

$x < z+v$. Используя марковское свойство процесса $\ell(\theta_v, y)$ и (2.1), получим

$$\mathbf{E}_x\Big\{\exp\Big(-\int\limits_z^{z+v} f(\ell(\theta_v, y))dy\Big)\Big|W_{\theta_v} = z\Big\} = \int\limits_0^\infty \mathbf{P}_x(\ell(\theta_v, x) \in dt\big|W_{\theta_v} = z)\times$$

$$\times\mathbf{E}_x\Big\{\exp\Big(-\int\limits_z^{z+v} f(\ell(\theta_v, y)dy\Big)\Big|\ell(\theta_v, x) = t,\, W_{\theta_v} = z\Big\} = \tag{3.6}$$

$$= \int\limits_0^\infty \frac{v^2 t}{4(z+v-x)^2(x-z)^2}\exp\Big(-\frac{t}{2(z+v-x)} - \frac{t}{2(x-z)}\Big)\bar{q}(x,t)\bar{r}(x,t)dt.$$

где при $z \leqslant g \leqslant x$

$$\bar{q}(g,t) = \mathbf{E}_x\Big\{\exp\Big(-\int\limits_z^{g} f(\ell(\theta_v, y))dy\Big)\Big|\ell(\theta_v, g) = t,\, W_{\theta_v} = z\Big\},$$

и при $x \leqslant g \leqslant z+v$

$$\bar{r}(g,t) = \mathbf{E}_x\Big\{\exp\Big(-\int\limits_g^{z+v} f(\ell(\theta_v, y))dy\Big)\Big|\ell(\theta_v, g) = t,\, W_{\theta_v} = z\Big\}.$$

Поскольку при условии $W_{\theta_v} = z$ процесс $\ell(\theta_v, y)$ является диффузией, описание которой приведено в теореме 2.1, то, применяя известный результат (см., например, [6], гл. VIII, §5, теорему 2), получим, что функции $\bar{q}$ и $\bar{r}$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial}{\partial g}\bar{q}(g,t) = 2t\frac{\partial^2}{\partial t^2}\bar{q}(g,t) + \Big(2 - \frac{2t}{g-z}\Big)\frac{\partial}{\partial t}\bar{q}(g,t) - f(t)\bar{q}(g,t), \tag{3.7}$$

$$-\frac{\partial}{\partial g}\bar{r}(g,t) = 2t\frac{\partial^2}{\partial t^2}\bar{r}(g,t) + \Big(4 - \frac{2t}{z+v-g}\Big)\frac{\partial}{\partial t}\bar{r}(g,t) - f(t)\bar{r}(g,t), \tag{3.8}$$

и граничным условиям

$$\lim_{g\downarrow z}\bar{q}(g,t) = 1, \qquad \lim_{g\uparrow z+v}\bar{r}(g,t) = 1. \tag{3.9}$$

Важным является то обстоятельство, что функции $\bar{q}(g,t)$ и $\bar{r}(g,t)$ не зависят от x. Кроме того, $\bar{q}(g,t) \to \bar{q}(x,t)$ при $g \uparrow x$, и $\bar{r}(g,t) \to$

$\bar r(x,t)$ при $g\downarrow x$. Поэтому функции $\bar q(x,t)$ и $\bar r(x,t)$ удовлетворяют уравнениям (3.7) и (3.8) при $g=x$. Замена

$$q(x-z,t)=\frac{1}{x-z}\,\exp\Big(-\frac{t}{2(x-z)}\Big)\bar q(x,t),$$
$$r(z+v-x,t)=\frac{t}{2(z+v-x)^2}\,\exp\Big(-\frac{t}{2(z+v-x)}\Big)\bar r(x,t),$$

приводит к уравнениям

$$\frac{\partial}{\partial y}\,q(y,t)=2t\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,q(y,t)+2\frac{\partial}{\partial t}\,q(y,t)-f(t)q(y,t), \tag{3.10}$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\,r(y,t)=2t\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,r(y,t)-f(t)r(y,t), \tag{3.11}$$

и граничным условиям при $y\downarrow 0$

$$y\exp\Big(\frac{t}{2y}\Big)q(y,t)\to 1,\qquad 2y^2\exp\Big(\frac{t}{2y}\Big)r(y,t)\to t. \tag{3.12}$$

Положим

$$Q(t)=\int\limits_0^\infty e^{-\alpha y}q(y,t)dy,\qquad R(t)=\int\limits_0^\infty e^{-\alpha y}r(y,t)dy.$$

Тогда, принимая во внимание свойство симметрии броуновского движения и учитывая (3.6) и (2.6), получим

$$\int\limits_0^\infty e^{-\alpha v}\mathbf{E}_x\Big(-\int\limits_{-\infty}^\infty f(\ell(\theta_v,y))dy\Big)dv=$$
$$=\int\limits_0^\infty e^{-\alpha v}\Big(\int\limits_{x-v}^{x}\mathbf{E}_x\Big\{\exp\Big(-\int\limits_z^{z+v}f(\ell(\theta_v,y))dy\Big);W_{\theta_v}\in dz\Big\}+$$
$$+\int\limits_x^{x+v}\mathbf{E}_x\Big\{\exp\Big(-\int\limits_{z-v}^{z}f(\ell(\theta_v,y))dy\Big);W_{\theta_v}\in dz\Big\}\Big)dv=$$
$$=2\int\limits_0^\infty e^{-\alpha v}\int\limits_{x-v}^{x}\mathbf{E}_x\Big\{\exp\Big(-\int\limits_z^{z+v}f(\ell(\theta_v,y))dy\Big);W_{\theta_v}\in dz\Big\}dv=$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{x} dz \frac{x-z}{v^2} \int\limits_{x-z}^{\infty} dv\, e^{-\alpha v} \mathbf{E}_x \Big\{ \exp\Big(- \int\limits_{z}^{z+v} f(\ell(\theta_v, y)) dy \Big) \Big| W_{\theta_v} = z \Big\} =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{x} dz e^{-\alpha(x-z)} \int\limits_{x-z}^{\infty} dv e^{-\alpha(z+v-x)} \int\limits_{0}^{\infty} dt\, q(x-z,t) r(z+v-x,t) =$$

$$= \int\limits_{0}^{\infty} Q(t) R(t) dt.$$

Применяя преобразование Лапласа по переменной y к обеим частям уравнений (3.10), (3.11), несложно убедиться, что функции $Q(t)$ и $R(t)$ удовлетворяют уравнениям (3.3) и (3.2) соответственно. Принимая во внимание граничные условия (3.12), получаем, что при $t \downarrow 0$

$$Q(t) = \int\limits_{0}^{\infty} e^{-\alpha y} \frac{1}{y} e^{-t/2y} (1 + o(1)) dy \sim 2K_0\Big(\sqrt{2\alpha t}\Big) \sim -\ln t,$$

$$R(t) = \int\limits_{0}^{\infty} e^{-\alpha y} \frac{t}{2y^2}\, e^{-t/2y} (1 + o(1)) dy \sim 1.$$

С другой стороны, при больших t, так как $|\bar{q}| \leqslant 1$, $|\bar{r}| \leqslant 1$, имеем

$$|Q(t)| \leqslant \int\limits_{0}^{\infty} e^{-\alpha y} \frac{1}{y} e^{-t/2y} dy = 2K_0\Big(\sqrt{2\alpha t}\Big) \approx \sqrt{\pi} \Big(\frac{2}{\alpha t}\Big)^{1/4} e^{-\sqrt{2\alpha t}},$$

$$|R(t)| \leqslant \int\limits_{0}^{\infty} e^{-\alpha y} \frac{t}{2y^2}\, e^{-t/2y} dy = \sqrt{2\alpha t} K_1\Big(\sqrt{2\alpha t}\Big) \approx \sqrt{\pi} \Big(\frac{\alpha t}{2}\Big)^{1/4} e^{-\sqrt{2\alpha t}}.$$

Таким образом, выполнены граничные условия (3.2), (3.3) и (3.5).

Для кусочно-непрерывных функций f при $h = \infty$ теорема 3.1 может быть доказана с помощью предельного перехода в задаче (3.2), (3.3), (3.5), для последовательности непрерывных функций, аппроксимирующих функцию f. Аналогичный предельный переход детально описан в [4], гл. II, §2, и мы его приводить не будем.

Доказательство теоремы 3.1 для $h < \infty$ основано на почти очевидном соотношении

$$\int_0^\infty e^{-\alpha v}\mathbf{E}_x\Big\{\exp\Big(-\int_{-\infty}^{\infty} f(\ell(\theta_v, y))dy\Big);\ \sup_{y\in R^1}\ell(\theta_v, y) < h\Big\}dv =$$

$$= \lim_{\gamma\to\infty}\int_0^\infty e^{-\alpha v}\mathbf{E}_x\exp\Big(-\int_{-\infty}^{\infty}(f(\ell(\theta_v, y)) + \gamma\mathbb{I}_{(h,\infty)}(\ell(\theta_v, y)))dy\Big)dv.$$

Аналогичный предельный переход осуществлен в [4], гл. II, §4, и мы его тоже опускаем. Результатом такого предельного перехода будет теорема 3.1 в полном объеме.

4. Рассмотрим один пример применения теоремы 3.1. Вычислим распределение величины $\sup\limits_{y\in R^1}\ell(\theta_v, y)$.

Сформулируем один вспомогательный результат.

Лемма 4.1. *Пусть $X(t)$, $Y(t)$, $t \geqslant 0$, – решения уравнений*

$$2tX''(t) - \alpha X(t) = 0,$$
$$2tY''(t) + 2Y'(t) - \alpha Y(t) = 0.$$

Тогда

$$\alpha\int X(t)Y(t)dt = tX(t)Y'(t) + \frac{\alpha}{2}tX(t)Y(t) - t^2X'(t)Y'(t). \qquad (4.1)$$

Формула (4.1) легко проверяется дифференцированием.

Применим теорему 3.1 для $f = 0$. Решения задачи (3.2)–(3.4) в этом случае имеют вид:

$$R(t) = \sqrt{2\alpha t}\Big(K_1(\sqrt{2\alpha t}) - \frac{K_1(\sqrt{2\alpha h})}{I_1(\sqrt{2\alpha h})}I_1(\sqrt{2\alpha t})\Big), \qquad 0 \leqslant t \leqslant h,$$

$$Q(t) = 2\Big(K_0(\sqrt{2\alpha t}) - \frac{K_0(\sqrt{2\alpha h})}{I_0(\sqrt{2\alpha h})}I_0(\sqrt{2\alpha t})\Big), \qquad 0 \leqslant t \leqslant h,$$

где $I_l(x)$, $K_l(x)$, $l = 0, 1$, – модифицированные функции Бесселя порядка l. Принимая во внимание граничные условия (3.4), получаем, что

$$R'(h) = -\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{2h}I_1(\sqrt{2\alpha h})}, \qquad Q'(h) = -\frac{1}{hI_0(\sqrt{2\alpha h})}.$$

Кроме того, при $t \downarrow 0$

$$tQ'(t) \sim -2tK_1\big(\sqrt{2\alpha t}\big)\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{2t}} \sim -1.$$

Используя (3.1) и лемму 4.1, найдем

$$\alpha\int\limits_0^\infty e^{-\alpha v}\mathbf{P}_x\Big(\sup_{y\in R^1}\ell(\theta_v,y)<h\Big)dv = 1-\frac{\sqrt{\alpha h}}{\sqrt{2}I_0(\sqrt{2\alpha h})I_1(\sqrt{2\alpha h})}. \qquad (4.2)$$

Применяя формулу обратного преобразования Лапласа, основанную на теории вычетов, получаем

$$\mathbf{P}_x\Big(\sup_{y\in R^1}\ell(\theta_v,y)<h\Big)=\sum_{k=1}^\infty\Big(\frac{1}{J_1^2(j_{0,k})}\,e^{-j_{0,k}^2v/2h}-\frac{1}{J_0^2(j_{1,k})}\,e^{-j_{1,k}^2v/2h}\Big),$$

где $J_l(x)$ – функции Бесселя порядка l, и $0<j_{0,k}<j_{1,k}$, $k=1,2,\dots,$ – положительные нули функций Бесселя $J_0(x)$ и $J_1(x)$ соответственно.

5. Рассмотрим броуновское движение с линейным сносом $W_s^{(\mu)}= =\mu s+W_s$. Из доказательства теоремы 1.2 несложно понять, что она верна для широкого класса диффузионных процессов, в частности, для броуновского движения с линейным сносом.

Положим далее $\theta_v=\min\{t:\ \sup\limits_{0\leqslant s\leqslant t}W_s^{(\mu)}-\inf\limits_{0\leqslant s\leqslant t}W_s^{(\mu)}=v\}$, $H_{a,b}= \min\{s:W_s^{(\mu)}\notin(a,b)\}$ и

$$u_v(x)=\mathbf{E}_x\{\exp(-A^{(\mu)}(f,\vec{x},H_{z,z+v}));W^{(\mu)}_{H_{z,z+v}}=z\}, \qquad (5.1)$$

где индекс (μ) у функционала A означает, что это – функционал от броуновского движения с линейным сносом μ.

Как и в случае броуновского движения функцию $u_v(x)$ можно представить в виде (1.17), где $\psi(x)$ и $\varphi(x)$ – фундаментальные решения задачи

$$\frac12u''(x)+\mu u'(x)-f(x)u(x)=0, \quad x\in R^1\setminus\{x_1,x_2,\dots,x_k\}, \qquad (5.2)$$

$$u'(x_j+0)-u'(x_j-0)=2\gamma_ju(x_j), \quad j=1,2,\dots,k. \qquad (5.3)$$

Вронскиан $\omega(x):=\psi'(x)\varphi(x)-\psi(x)\varphi'(x)$ при наличии сноса равен $\omega e^{-2\mu x}$, где ω некоторая постоянная величина. Проделав те же действия, что и для броуновского движения, получим

$$\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{E}_x\big\{\exp(-A^{(\mu)}(f,\vec{x},\theta_v));W^{(\mu)}_{\theta_v}<z\big\}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\omega e^{-2\mu(z+v)}\rho(x,z)}{\rho^2(z+v,z)}, & x-v<z\leqslant x,\\ \dfrac{\omega e^{-2\mu(z-v)}\rho(z,x)}{\rho^2(z,z-v)}, & x\leqslant z<x+v.\end{cases}\tag{5.4}$$

Интегрируя эту формулу, получаем, что для произвольной кусочно-непрерывной функции $F(z)$ справедливо выражение

$$\mathbf{E}_x\big\{F(W^{(\mu)}_{\theta_v})\exp(-A^{(\mu)}(f,\vec{x},\theta_v))\big\}=$$
$$=\omega\int\limits_x^{x+v}\frac{F(z)e^{-2\mu(z-v)}\rho(z,x)+F(z-v)e^{-2\mu z}\rho(x,z-v)}{\rho^2(z,z-v)}\,dz.\tag{5.5}$$

Применяя формулы (5.4), (5.5), несложно получить, что

$$\mathbf{P}_x(W^{(\mu)}_{\theta_v}\in dz)=\frac{|\mu|e^{\mu(z-x)}\mathrm{sh}\,(|z-x||\mu|)}{\mathrm{sh}^2(v|\mu|)}\,dz,\qquad |z-x|\leqslant v,\tag{5.6}$$

$$\mathbf{E}_x e^{-\alpha\theta_v}=\frac{\sqrt{2\alpha+\mu^2}}{\mathrm{sh}^2(v\sqrt{2\alpha+\mu^2})}\Big(\frac{\mathrm{ch}\,(v(\sqrt{2\alpha+\mu^2}+\mu))-1}{\sqrt{2\alpha+\mu^2}+\mu}+$$
$$+\frac{\mathrm{ch}\,(v(\sqrt{2\alpha+\mu^2}-\mu))-1}{\sqrt{2\alpha+\mu^2}-\mu}\Big).\tag{5.7}$$

Формула (5.7) является частным случаем более общей формулы, полученной в работе [7], с помощью предельного перехода в соответствующей формуле для несимметричного случайного блуждания. Обозначим $\bar{H}(\theta_v)$ положение точки экстремума до момента, обратного размаху, т.е. такой точки, для которой $|W^{(\mu)}_{\bar{H}(\theta_v)}-W^{(\mu)}_{\theta_v}|=v$. Тогда (см. [7])

$$\mathbf{E}_x\exp\big(-\alpha(\theta_v-\bar{H}(\theta_v))-\beta\bar{H}(\theta_v)-\gamma W^{(\mu)}_{\theta_v}\big)=$$

$$=\frac{e^{-\gamma x}\sqrt{2\alpha+\mu^2}}{\mathrm{sh}\,(v\sqrt{2\alpha+\mu^2})\mathrm{sh}\,(v\sqrt{2\beta+\mu^2})}\Big(\frac{\mathrm{ch}\,(v(\sqrt{2\beta+\mu^2}+\mu-\gamma))-1}{\sqrt{2\beta+\mu^2}+\mu-\gamma}+$$
$$+\frac{\mathrm{ch}\,(v(\sqrt{2\beta+\mu^2}-\mu+\gamma))-1}{\sqrt{2\beta+\mu^2}-\mu+\gamma}\Big).\tag{5.8}$$

Эту формулу тоже можно получить описанным выше методом.

6. Доказательства многих результатов о распределении функционалов от броуновского движения с линейным сносом аналогичны доказательству соответствующих результатов для броуновского движения.

Следующий результат описывает локальное время броуновского движения с линейным сносом $\ell^{(\mu)}(\theta_v, y)$ как процесса по параметру y при условии $W^{(\mu)}_{\theta_v} = z$ и приводится без доказательства.

Теорема 6.1. *Пусть x – начальная точка броуновского движения $W^{(\mu)}_s$, и пусть $z < x$. Тогда при условии $W^{(\mu)}_{\theta_v} = z$ процесс $\ell^{(\mu)}(\theta_v, y)$, $y \in [z, z+v)$, является марковским процессом, для которого*

$$\ell^{(\mu)}(\theta_v, y) = l_5(y) \qquad \text{при} \quad x \leqslant y \leqslant z+v,$$
$$\ell^{(\mu)}(\theta_v, -y) = l_6(y) \quad \text{при} \quad -x \leqslant y \leqslant -z,$$

где $l_5(y)$ и $l_6(y)$ являются независимыми диффузионными процессами с общим начальным значением $l_5(x) = l_6(-x)$, распределенным по формуле

$$\mathbf{P}_x(\ell^{(\mu)}(\theta_v, x) \in dt | W^{(\mu)}_{\theta_v} = z) = \frac{\mu^2 \mathrm{sh}^2(v|\mu|)t}{4\mathrm{sh}^2((v-|x-z|)|\mu|)\mathrm{sh}^2(|z-x||\mu|)} \times$$
$$\times \exp\Big(-\frac{t|\mu|}{2}\mathrm{cth}\,((v-|x-z|)|\mu|) - \frac{t|\mu|}{2}\mathrm{cth}\,(|x-z||\mu|)\Big)dt. \tag{6.1}$$

и производящими операторами

$$\mathbb{L}_5 = 2t\frac{d^2}{dt^2} + \big(4 - 2t|\mu|\mathrm{cth}\,((z+v-y)|\mu|)\big)\frac{d}{dt}, \tag{6.2}$$
$$\mathbb{L}_6 = 2t\frac{d^2}{dt^2} + \big(2 + 2t|\mu|\mathrm{cth}\,((y+z)|\mu|)\big)\frac{d}{dt} \tag{6.3}$$

соответственно.

Замечание. При $x < z$ справедлив аналогичный результат:

$$\ell^{(\mu)}(\theta_v, y) = l_7(y) \qquad \text{при} \quad x \leqslant y \leqslant z,$$
$$\ell^{(\mu)}(\theta_v, -y) = l_8(y) \quad \text{при} \quad -x \leqslant y \leqslant v-z,$$

где $l_7(y)$ и $l_8(y)$ являются независимыми диффузионными процессами с общим начальным значением $l_7(x) = l_8(-x)$, распределенным по формуле (6.1) и производящими операторами

$$\mathbb{L}_7 = 2t\frac{d^2}{dt^2} + \big(2 - 2t|\mu|\mathrm{cth}\,((z-y)|\mu|)\big)\frac{d}{dt}, \tag{6.4}$$
$$\mathbb{L}_8 = 2t\frac{d^2}{dt^2} + \big(4 + 2t|\mu|\mathrm{cth}\,((y+z-v)|\mu|)\big)\frac{d}{dt} \tag{6.5}$$

соответственно.

Следующий результат позволяет вычислять совместное распределение функционалов

$$B(f,\theta_v)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\ell^{(\mu)}(\theta_v,y))dy, \qquad \text{и} \qquad \sup_{y\in R^1}\ell^{(\mu)}(\theta_v,y).$$

Теорема 6.2. *Пусть $f(t)$, $t\in[0,h]$ – неотрицательная кусочно-непрерывная функция, $f(0)=0$. Тогда*

$$\int_0^\infty e^{-\alpha v}\mathbf{E}_x\Big\{\exp\Big(-\int_{-\infty}^{\infty} f(\ell^{(\mu)}(\theta_v,y))dy\Big);\sup_{y\in R^1}\ell^{(\mu)}(\theta_v,y)<h\Big\}dv=$$

$$=\frac12\int_0^h R(t)\big(Q_\mu(t)+Q_{-\mu}(t)\big)dt, \tag{6.6}$$

где для $t\in(0,h)$ функции R, Q_μ являются единственными непрерывными решениями задачи

$$2tR''(t)-\big(\alpha+\frac{\mu^2t}{2}+f(t)\big)R(t)=0, \qquad R(0)=1, \tag{6.7}$$

$$2tQ''(t)+2Q'(t)-\big(\alpha+\frac{\mu^2t}{2}-\mu+f(t)\big)Q(t)=0, \quad \lim_{t\downarrow 0}\frac{Q(t)}{\ln t}=-1, \tag{6.8}$$

$$R(h)=0, \quad Q(h)=0. \tag{6.9}$$

Замечание 6.2. В случае $h=\infty$ граничные условия (6.9) должны быть заменены следующими:

$$\limsup_{t\to\infty} t^{-\alpha/2|\mu|}e^{t|\mu|/2}R(t)<\infty, \qquad \limsup_{t\to\infty} t^{(\alpha-\mu)/2|\mu|+1/2}e^{t|\mu|/2}Q(t)<\infty.$$

Литература

1. J. P. Imhof, *On the range of Brownian motion and its inverse process.* — Ann. Prob. **13** (1985), 1011–1017.
2. P. Vallois, *Decomposing the Brownian path via the range process.* — Stoch. Proc. Appl. **55** (1995), 211–226.
3. P. Lévy, *Sur certains processus stochastiques homogines.* — Compositio Math. **7** (1939), 283–339.

4. А. Н. Бородин, И. А. Ибрагимов, *Предельные теоремы для случайных блужданий.* Труды Математического ин-та им. В. А. Стеклова РАН, Наука, С.Петербург (1994).
5. A. N. Borodin, P. Salminen, *Handbook of Brownian Motion – Facts and Formulae.* Birkhäuser, Basel-Boston-Berlin, 1996.
6. И.И.Гихман, А. В. Скороход, *Введение в теорию случайных процессов.* Наука, Москва (1965).
7. K. S. Chong, R. Cowan, L. Holst, *The ruin problem and cover times of asymmetric random walks and brownian motions.* — J. Appl. Probab. **37, No. 1** (2000).

Borodin A. N. On distributions of functionals of Brownian motion stopped at inverse range time.

Methods for calculation of distributions of functionals of Brownian motion stopped at the inverse range time are developed. Some interesting examples of applications of these methods are considered.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 11 марта 1999 г.