Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 260, 1999 г.

П. Деовельс, В. Б. Невзоров

БУТСТРЕП ДЛЯ МАКСИМУМОВ И РЕКОРДОВ

1. Введение

В 1979 г. Эфрон [4] предложил для оценивания функций распределения сложных по структуре статистик использовать так называемый бутстреп (bootstrap) метод. Этот метод быстро завоевал популярность, и появилось большое число работ, посвященных изучению бутстреп-аналогов различных типов статистик (подробное изложение теории бутстрепа можно найти в работе [5]). В нашей заметке мы ограничимся рассмотрением асимптотического поведения бутстреп-вариантов максимумов и рекордных величин.

Пусть $X_1, X_2, \ldots$ – независимые случайные величины с общей непрерывной функцией распределения (ф.р.) F, и $X_{1,n} \leq \cdots \leq X_{n,n}$, $n = 1, 2, \ldots$, – соответствующие порядковые статистики. Для удобства через $M(n)$ обозначим максимальную порядковую статистику $X_{n,n}$. Рекордные моменты $L(n)$ и рекордные величины $X(n)$ в последовательности $X_1, X_2, \ldots$ определяются следующим образом:

$$L(1) = 1, \quad L(n+1) = \min\{j : j > L(n); X_j > X_{L(n)}\}, \quad n = 1, 2, \ldots; \tag{1}$$

$$X(n) = X_{L(n)} = M(L(n)) = X_{L(n),L(n)}, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{2}$$

Нам потребуются также слабые рекордные моменты $L^\omega(n)$ и слабые рекордные величины $X^\omega(n)$, отличие которых от обычных рекордов состоит в том, что в определении (1) знак неравенства $>$ заменяется на $\geq$, т. е. в этом случае повторение предыдущего рекорда засчитывается как новый рекорд. Подробно теория рекордов излагается, например, в недавно опубликованном обзоре Невзорова и Балакришнана [1].

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (гранты 99-01-00724 и 99-15-00732).

Пусть F_n обозначает эмпирическую функцию распределения, построенную по наблюдениям $X_1, \cdots, X_n$, и $X_1^*, \ldots, X_m^*$ обозначает бутстреп-выборку объема m, соответствующую случайной функции распределения F_n, т.е. при фиксированных значениях $X_1, \ldots, X_n$ каждая из величин $X_1^*, \ldots, X_m^*$ независимо друг от друга может с равными вероятностями принимать одно из этих значений. По наблюдениям $X_1^*, \ldots, X_m^*$ строим бутстреп-вариант эмпирической функции распределения

$$F_m^*(x) = (1/m) \sum_{r=1}^{m} 1_{\{X_r^* < x\}}.$$

Таким образом, мы имеем дело с тремя функциями распределения F, F_n и F_m^*, две из которых являются случайными. Обозначим через H, H_n и H_m^* функции, обратные соответственно функциям F, F_n и F_m^*. С помощью этих функций удобно вводить квантили $\xi_p = H(p)$, выборочные квантили $\xi_{pn,n} = H_n(p)$ и бутстреп-квантили $\xi_{pm}^* = H_m^*(p)$, где $0 < p < 1$, а также максимальные порядковые статистики $M(n) = H_n(1)$ и бутстреп-максимумы $M^*(m) = H_m^*(1) = X_{m,m}^*$.

В работах [2, 6, 7, 9, 10, 13, 15] рассматривались различные вопросы, связанные с бутстреп-моделированием порядковых статистик. Как пример, приведем типичный результат для бутстреп-квантилей. Один из результатов Сингха [15] можно переформулировать следующим образом: для любого p: $(0 < p < 1)$ почти наверное справедлива оценка

$$\sup_x |\mathbf{P}\{n^{1/2}(\xi_{pn}^* - \xi_{pn,n}) < x | F_n\} - P\{n^{1/2}(\xi_{pn,n} - \xi_p) < x\}| \\ = O((\log\log n)^{1/2}/n^{1/4}),\ n \to \infty. \qquad (3)$$

Различные теоремы для бутстреп-вариантов некоторых линейных комбинаций порядковых статистик (в частности, усеченных средних вида $T_n = (1/n)\sum_{i=k(n)+1}^{n-m(n)} X_{i,n}$) можно найти в работах [3, 8], бутстреп-аналоги обобщенных квантилей и L-статистик изучаются в статьях [10–12]. Мы опускаем здесь изложение этих результатов, тесно связанных с порядковыми статистиками, и акцентируем внимание на бутстреп-результатах для максимумов и рекордных величин.

2. Экстремумы

Из соотношения (3) и ему подобных видно, что часто бывает естественным для бутстреп-приближений порядковых статистик использовать выборки того же объема, что и исходная. Однако еще в работе Бикела и Фридмана [2] было отмечено, что подобный подход для максимумов может окончиться неудачей. Ими был построен следующий пример.

Пример 1 [2]. Пусть исходная выборка $X_1, X_2, \ldots, X_n$ берется из равномерного распределения на интервале $[0, \theta]$. Известно, что тогда надлежащим образом центрированный и нормированный максимум $M(n)$ сходится к стандартному экспоненциальному распределению, а именно, при $n \to \infty$ для любого $x > 0$ выполняется соотношение

$$\mathbf{P}\{n(\theta - M(n))/\theta < x\} \to 1 - \exp(-x). \tag{4}$$

Следуя (3), где вместо $M(n) = H_n(1)$ берется $\xi_{pn,n} = H_n(p)$, а максимальной точке носителя распределения $\theta = H(1)$ соответствует квантиль $\xi_p = H(p)$, было бы естественным центрированный и нормированный максимум $M(n)$ в левой части (4) приближать его бутстреп-аналогом, имеющим вид $n(M(n) - M^*(n))/M(n)$, и получать асимптотические соотношения типа

$$\sup_x |\mathbf{P}\{n(M(n) - M^*(n))/M(n) < x | F_n\} - \mathbf{P}\{n(\theta - M(n))/\theta < x\}| \to 0, \tag{5}$$

справедливые почти наверное. Однако выясняется, что соотношения (5) не получить, поскольку, как не трудно проверить, с вероятностью 1 при $n \to \infty$ выполняется соотношение

$$\mathbf{P}\{n(M(n) - M^*(n))/M(n) = 0 | F_n\} =$$
$$= \mathbf{P}\{M^*(n) = M(n) | F_n\} = 1 - ((n-1)/n)^n \to 1 - \exp(-1) > 0,$$

которое противоречит (5).

Выяснилось [3, 17], что подобные проблемы решаются, если уменьшить объем бутстреп-выборки по сравнению с объемом исходной выборки. Оказывается, что для рассматриваемого равномерного распределения почти наверное при $n \to \infty$ справедливо соотношение

$$\sup_x |\mathbf{P}\{r(n)(M(n) - M^*(r(n)))/M(n) < x | F_n\} -$$

$$-\mathbf{P}\{n(\theta - M(n))/\theta < x\}| \to 0, \tag{6}$$

если объем бутстреп-выборки $r(n)$ выбран таким образом, что $r(n) \to \infty$ и $r(n) = o(n/\log\log n)$ при $n \to \infty$. В [3] показано также, что при более слабом ограничении $r(n) = o(n)$, $n \to \infty$, в (6) гарантируется сходимость по вероятности. Там же получены и другие результаты, обобщающие (6) на случай, когда исходная функция распределения F принадлежит области притяжения любого из трех типов предельных распределений максимумов.

Еще один подход к бутстреп-моделированию экстремумов [16, 18] основан на использовании нормированных разностей (спейсингов) между максимальными порядковыми статистиками. В [16] рассмотрение ограничивается функциями распределения F, принадлежащими области притяжения $D(G)$ предельного распределения экстремумов $G(x) = \exp(-\exp(-x))$. Пусть $d_r = r(X_{n-r+1,n} - X_{n-r,n})$, $r = 1, 2, \ldots, k$. Используется тот факт, что для любого фиксированного k и F, принадлежащих $D(G)$, нормированные спейсинги $d_1, \ldots, d_k$ асимптотически независимы и одинаково распределены при $n \to \infty$. По выборке $d_1, \ldots, d_k$ строится бутстреп-выборка $d_1^*, \ldots, d_k^*$, а затем для моделирования экстремальных порядковых статистик используется соотношение

$$X^*_{n-j+1,n} = X_{n-k,n} + \sum_{r=j}^{k} d_r^*/r, \quad j = 1, 2, \ldots, k.$$

Этот подход носит несколько ограничительный характер, так как предполагается a priori, что F берется из $D(G)$. Преимущество же этого метода состоит в том, что для бутстреп-моделирования можно использовать цензурированные выборки, содержащие лишь несколько максимальных членов вариационного ряда.

С экстремальными порядковыми статистиками тесно связаны, как это видно из определения (2), рекордные величины $X(n)$, бутстреп-аналоги которых мы рассмотрим в следующем параграфе.

3. Рекордные величины

Несмотря на то, что исходная функция распределения F предполагается непрерывной и поэтому с вероятностью единица существует любой рекордный момент $L(n)$ и определена любая рекордная величина $X(n)$, возникают проблемы с определением бутстреп-рекордов. Действительно, при любых фиксированных значениях $X_1, X_2, \ldots, X_n$ случайные величины в последовательности $X_1^*, X_2^*, \ldots$ могут принимать не более n значений (а если вспомнить, что с вероятностью 1 среди исходных величин нет совпадающих, то можно говорить о том, что каждая из величин X_k^* может принимать с равными вероятностями одно из n значений). Поэтому для любого фиксированного n можно гарантировать существование с вероятностью единица лишь первого бутстреп- рекорда $X^*(1) = X_1^*$. Если же это значение совпадает с $M(n) = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$, то уже появление второго рекорда становится невозможным. Пусть $e_n = \mathbf{E}(N^*|F_n)$ – среднее число бутстреп-рекордов в бесконечной последовательности $X_1^*, X_2^*, \ldots$. Очевидно, что e_n зависит лишь от числа различных значений в последовательности $X_1, X_2, \ldots, X_n$, которое с вероятностью единица равно n, и не зависит от конкретных значений исходных случайных величин. Справедлив следующий результат.

Лемма 2. *С вероятностью единица* $e_n = \mathbf{E}(N^*|F_n) = 1 + 1/2 + \cdots + 1/n$ *при* $n = 1, 2, \ldots$ *и, следовательно,* $e_n \sim \ln n$, *если* $n \to \infty$.

Доказательство. Обозначим $e_0 = 0$. Для доказательства леммы воспользуемся тем, что $e_1 = 1$ и справедливо следующее рекуррентное соотношение:

$$e_n = \sum_{r=1}^{n} (1 + e_{n-r})/n, \tag{7}$$

которое становится очевидным, если учесть, что X_1^* с вероятностью $1/n$ может совпадать с любой из величин $X_{1,n}, X_{2,n}, \ldots, X_{n,n}$. Если $X_1^* = X_{r,n}$, то на число новых рекордов в последовательности $X_2^*, X_3^*, \ldots$ влияет лишь порядок появления $(n-r)$ значений $X_{r+1,n}, \ldots, X_{n,n}$, а на значения $X_{1,n}, \ldots, X_{r,n}$ можно уже не обращать внимания. Из равенства (7), переписанного в виде

$$ne_n = \sum_{r=1}^{n} (1 + e_{n-r}),$$

получаем, что

$$ne_n = \sum_{r=1}^{n} (1 + e_{n-r}) = 1 + e_{n-1} + \sum_{r=1}^{n-r} (1 + e_{n-1-r}) = 1 + ne_{n-1}$$

и

$$e_n = e_{n-1} + 1/n = \cdots = 1/n + \cdots + 1/2 + e_1 = 1 + 1/2 + \cdots + 1/n.$$

Следующий результат Шоррока [14] позволяет более точно выявить структуру бустреп-рекордов $X^*(1), X^*(2), \ldots$.

Лемма 3 [14]. *Пусть $X, X_1, X_2, \ldots$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, принимающих значения $1, 2, \ldots$ с вероятностями $p_n = \mathbf{P}\{X = n\}$, и пусть индикаторы $\eta_k, k = 1, 2, \ldots,$ определены следующим образом: $\eta_k = 1$, если значение k является рекордным в последовательности $X_1, X_2, \ldots,$ и $\eta_k = 0$ в противоположном случае. Тогда случайные величины $\eta_1, \eta_2, \ldots$ являются независимыми и $\mathbf{P}\{\eta_k = 1\} = 1 - \mathbf{P}\{\eta_k = 0\} = p_k / \sum_{m=k}^{\infty} p_m$.*

Из леммы 3 следует, что в последовательности бутстреп-рекордов $X^*(1), X^*(2), \ldots$ может появиться любое из n различных значений $X_{1,n}, X_{2,n}, \ldots, X_{n,n}$, причем значение $X_{k,n}$ может стать рекордным независимо от других с вероятностью $1/(n-k+1)$. Отсюда также следует, что для почти всех исходных последовательностей $X_1, \ldots, X_n$ среднее число значений $X_{1,n}, X_{2,n}, \ldots, X_{n,n}$, являющихся рекордными в бутстреп-выборке $X_1^*, X_2^*, \ldots,$ равно $1 + 1/2 + \cdots + 1/n$, т.е. стремится к бесконечности с ростом n, а следовательно, $\mathbf{P}\{N^* \geq m | F_n\} \to 1$ при $n \to \infty$ для любого фиксированного $m = 1, 2, \ldots$. Это означает, что в асимптотической постановке мы можем говорить о существовании с вероятностью 1 любого бутстреп-рекорда $X^*(m)$, однако при фиксированном объеме n исходной выборки нужно дать более точное определение рекордных величин $X^*(1), X^*(2), \ldots,$ при котором, если какая-то из этих величин принимает максимально возможное значение $X_{n,n}$, то и все последующие бутстреп-рекорды принимают это же значение. Такой подход приводит к ситуации, когда для любого n с вероятностью 1 определены все рекордные величины $X^*(1), X^*(2), \ldots$. Чтобы упростить рассуждения мы предлагаем несколько иной подход, рассматривая вместо бутстреп-вариантов обычных рекордных величин слабые бутстреп-рекорды, которые заведомо существуют с вероятностью 1. Если мы при любом фиксированном n рассматриваем бесконечную последовательность случайных величин $X^*(1), X^*(2), \ldots,$ то, очевидно, что значение $X_{n,n}$ в этой последовательности будет встречаться бесконечно часто. Поэтому естественно найти среднее значение числа слабых рекордов N^ω в этой последовательности, которые не совпадают с $X_{n,n}$. Обозначим $e_n^\omega = \mathbf{E}(N^\omega | F_n)$. Как мы уже знаем, распределение N^ω зависит не от конкретных значений случайных величин $X_1, \ldots, X_n$, а только от того, сколько различных значений имеется в наборе $X_1, \ldots, X_n$. Поскольку с вероятностью 1 среди величин $X_1, \ldots, X_n$ нет совпадающих, то e_n^ω представляет собой вырожденную случайную величину.

Лемма 4. *С вероятностью единица* $e_n^\omega = \mathbf{E}(N^\omega | F_n) = E_n$, *где* $E_1 = 0$ *и* $E_n = 1 + 1/2 + \cdots + 1/(n-1)$ *для* $n = 2, 3, \ldots$.

Доказательство. То, что $E_1 = 0$, очевидно. Для нахождения остальных значений E_n нам потребуется следующее рекуррентное соотношение:

$$E_n = \sum_{r=1}^{n-1} (1 + E_{n-r+1})/n, \tag{8}$$

вывод которого аналогичен доказательству равенства (7).

Далее, сравнивая равенства

$$nE_n = \sum_{r=1}^{n-1} (1 + E_{n-r+1})$$

и

$$(n-1)E_{n-1} = \sum_{r=1}^{n-2} (1 + E_{n-r}),$$

приходим к соотношению

$$nE_n = \sum_{r=1}^{n-1} (1 + E_{n-r+1}) = \sum_{r=0}^{n-2} (1 + E_{n-r}) = 1 + E_n + (n-1)E_{n-1},$$

и следовательно,

$$E_n = E_{n-1} + 1/(n-1) = 1 + 1/2 + \cdots + 1/(n-1).$$

Структура слабых бутстреп-рекордов может быть уточнена, если воспользоваться следующим результатом (см., например, [19]).

Лемма 5. *Пусть $X, X_1, X_2, \ldots$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, принимающих значения $1, 2, \ldots$ с вероятностями $p_n = \mathbf{P}\{X = n\}$, и пусть $\mu_k, k = 1, 2, \ldots$, обозначает число слабых рекордных величин в последовательности $X_1, X_2, \ldots$, равных k. Тогда величины $\mu_1, \mu_2, \ldots$ независимы и $\mathbf{P}\{\mu_k = r\} = (1 - q_k)q_k^r$ для $k = 1, 2, \ldots$ и $r = 0, 1, 2, \ldots$, где $q_k = p_k / \sum_{m=k}^{\infty} p_m$.*

В ситуации, когда мы рассматриваем слабые бутстреп-рекорды, $p_k = 1/n$, $q_k = 1/(n-k+1)$ и $\mathbf{E}\mu_k = 1/(n-k)$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Отсюда также следует, что среднее число слабых бутстреп-рекордов, не совпадающих с максимальным наблюдением, равно $\mathbf{E}(\mu_1 + \cdots + \mu_{n-1}) = 1 + 1/2 + \cdots + 1/(n-1)$.

Рассмотрим теперь асимптотическое распределение слабых бутстреп-рекордов $X_n^{\omega}(m)$, т.е. слабых рекордов в последовательности $X_1^*, X_2^*, \ldots$, в ситуации, когда объем n исходной выборки $X_1, \ldots, X_n$ стремится к бесконечности. Справедлив следующий результат.

Теорема 6. *Для любых $m = 1, 2, \ldots$ и $0 < p < 1$, при $n \to \infty$ с вероятностью 1 справедливо соотношение :*

$$\mathbf{P}\{X_n^{\omega}(m) < H_n(p) | F_n\} \to (1/\Gamma(m)) \int_0^{-\ln(1-p)} x^{m-1}\, exp(-x) dx. \qquad (9)$$

Доказательство. Используя лемму 5, приходим к равенству $\mathbf{P}\{X_n^{\omega}(m) > X_{r,n} | F_n\} = \mathbf{P}\{\mu_1 + \cdots + \mu_r < m\}$, где μ_k – число слабых бутстреп-рекордов в последовательности $X_1^*, X_2^*, \ldots$, совпадающих со значением $X_{k,n}$, причем случайные величины $\mu_1, \mu_2, \ldots$ независимы и μ_k имеет геометрическое распределение с параметром $q_k = 1/(n-k+1), k = 1, 2, \ldots, n-1$. Нас интересует асимптотическое распределение суммы $\nu_n(p) = \mu_1 + \cdots + \mu_{pn}$ при $n \to \infty$ и $0 < p < 1$ (для упрощения выкладок полагаем, что pn является целым числом). Поскольку характеристическая функция случайной величины μ_k имеет вид $f_k(t) = (1 - q_k)/(1 - q_k t) = (n-k)/(n-k+1-\exp(it))$, получаем, что характеристическая функция $g_n(t)$ случайной величины $\nu_n(p)$ удовлетворяет соотношению

$$\ln g_n(t) = -\sum_{k=1}^{np} \ln(1 + (1 - \exp(it))/(n-k+1)) \sim$$

$$\sim (\exp(it)-1)\sum_{k=1}^{np} 1/(n-k+1) \to -\ln(1-p)(\exp(it)-1)$$

и

$$g_n(t) \to \exp\{\lambda(\exp(it)-1)\},$$

где $\lambda = -\ln(1-p)$, т.е. при любом фиксированном p $(0 < p < 1)$ последовательность случайных величин $\nu_n(p)$ сходится при $n \to \infty$ к пуассоновскому распределению с параметром $\lambda = -\ln(1-p)$. Утверждение теоремы становится очевидным, если вспомнить теперь известное равенство

$$\sum_{k=0}^{m-1} \exp(-\lambda)\lambda^k/k! = \int_{\lambda}^{\infty} (1/\Gamma(m))\exp(-x)x^{m-1}dx.$$

Следствие 7. *Для любого фиксированного $m = 1, 2, \ldots,$ с вероятностью 1 при $n \to \infty$ выполняется следующее соотношение:*

$$\sup_x |\mathbf{P}\{X_n^\omega(m) < x|F_n\} - \mathbf{P}\{X(m) < x\}| \to 0. \qquad (10)$$

Соотношение (10) следует из (9), если вспомнить, что исходная функция распределения F является непрерывной. В этом случае почти наверное $H_n(p) \to H(p) = F^{-1}(p)$ для любого $p(0 < p < 1)$, а функция распределения рекордной величины $X(m)$ имеет вид

$$\mathbf{P}\{X(m) < x\} = (1/\Gamma(m)) \int_0^{-\ln(1-F(x))} t^{m-1}\ exp(-t)dt.$$

Результат, аналогичный теореме 6, имеет место и для обычных (сильных) бутстреп-рекордов, если их определение уточнить таким образом, чтобы при любом $m = 1, 2, \ldots$ и любом объеме n исходной выборки эти случайные величины существовали с вероятностью единица. Пусть в последовательности $X_1^*, X_2^*, \ldots$ имеется лишь r рекордных величин $X^*(1), \ldots, X^*(r)$. С вероятностью 1 максимальная из этих величин должна совпадать с $X_{n,n}$. В такой ситуации все последующие рекордные величины $X^*(r+1), X^*(r+2), \ldots$ мы приравниваем $X_{n,n}$. Тогда справедливы утверждения теоремы 6 и следствия 7 с заменой слабых рекордов $X_n^\omega(m)$ рекордными величинами $X^*(m)$. Доказательство отличается лишь тем, что вместо случайных величин $\mu_1, \mu_2, \ldots$ нужно использовать индикаторы $\eta_1, \eta_2, \ldots$ из леммы 3.

Литература

1. N. Balakrishnan, V. B. Nevzorov, *A record of records*. Handbook of Statistics, **16**, (eds.: N. Balakrishnan and C. R. Rao), Elsevier Science (1998), 515–570.
2. P. J. Bickel, D. A. Freedman, *Some asymptotics for the bootstrap*. Ann. Statist., **9** (1981), 1196–1217.
3. P. Deheuvels, D. M. Mason, and G. R. Shorack, *Some results on the influence of extremes on the bootstrap*. Ann. Inst. Henri Poincare, **29** (1993), 83–103.
4. B. Efron, *Bootstrap methods: Another look at the jacknife*. Ann. Statist., **7** (1979), 1–26.
5. B. Efron, R. Tibshirani, *An introduction to the Bootstrap*. Chapman and Hall, NY (1993).
6. P. Embrechts, T. Mikosch, *A bootstrap procedure for estimating the adjustment coefficient*. Insurance: Math. and Econ., **10** (1992), 181–190.
7. M. Falk, *On the accuracy of the bootstrap approximation of the joint distribution of sample quantiles*. Commun. Statist. – Theory Meth., **15** (1986), 2867–2876.
8. N. V. Gribkova, *On bootstrap L-statistics*. Abstracts of communications of international conference "Asymptotic Methods in Probability and Mathematical Statistics", St.-Petersburg, June 24–28, 1998, 103–106.
9. P. Hall, T. J. DiCiccio, J. P. Romano, *On smoothing and the bootstrap*. Ann. Statist., **17** (1989), 692–702.
10. P. Hall, M. A. Martin, *Exact convergence rate of bootstrap quantile variance estimator*. Prob. Theory Rel. Fields, **80** (1988), 261–268.
11. R. Helmers, P. Janssen, and R. Serfling, *Berry–Esseen and bootstrap results for generalized L-statistics*. Scand. J. Statist., **17** (1990), 65–77.
12. R. Helmers, P. Janssen, and N. Veraverbeke, *Bootstrapping U-quantiles*. Exploring the limits of bootstrap (eds.: E. Le Page and L. Billard), Wiley, NY (1990), 145–155.
13. C. Ma, J. Robinson, *Approximations to distributions of sample quantiles*. Handbook of Statistics, **16** (eds.: N. Balakrishnan and C.R.Rao), Elsevier Science (1998), 463–484.
14. R. W. Shorrock, *On record values and record times*. J. Appl. Probab., **9** (1972), 316–326.
15. K. Singh, *On the asymptotic accuracy of Efron's bootstrap*. Ann. Statist., **9** (1981), 1187–1195.
16. R. L. Strawderman, D. Zelterman, *A semiparametric bootstrap for simulating extreme order statistics*. Handbook of Statistics, **16** (eds.: N. Balakrishnan and C. R. Rao), Elsevier Science (1998), 441–462.
17. J. W. H. Swanepoel, *A note in proving that the (modified) bootstrap works*. Commun. Statist. – Theory Meth., **15** (1986), 3193–3203.

18. D. Zelterman, *A semiparametric bootstrap technique for simulating extreme order statistics.* J. Amer. Statist. Assoc., **88** (1993), 477–485.

19. А. В. Степанов, *Предельные теоремы для слабых рекордов.* Теория вероятностей и прим., **37** (1992), 586–590.

Deheuvels P., Nevzorov V. B. Bootstrap for maxima and records.

Asymptotic properties of bootstrapping maxima and record values are investigated.

Universite Pierre
et Marie Curie Paris–6
С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 1 декабря 1998 г.