Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 260, 1999 г.

М. С. Ермаков

О БАЙЕСОВСКОМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОМ ОЦЕНИВАНИИ ПАРАМЕТРА СДВИГА НЕГЛАДКОЙ ПЛОТНОСТИ

Резюме. Рассматривается задача оценивания параметра сдвига плотности, являющейся негладкой в некоторых точках. Таким образом для плотности не определено информационное количество Фишера. В этой постановке задачи последовательное оценивание дает обычно "существенный выигрыш" по сравнению с оцениванием с фиксированным объемом выборки. В работе доказывается асимптотическая эффективность байесовских планов последовательного оценивания и указывается их предельное распределение.

Введение. Асимптотическая теория регулярных статистических экспериментов является в настоящее время одной из базовых моделей иатематической статистики. Наибольший вклад в эту теорию обычно связывают с именами Ле Кама (1964), (1970), (1972) и Гайека (1970), (1972). Необходимо также обратить особое внимание на дальнейшие работы Ле Кама (1986) по переносу данных результатов на более общие структуры математической статистики.

В случае регулярных конечнопараметрических экспериментов асимптотические задачи статистических выводов сводятся ко всего навсего одной модели нормального распределения. Как следствие возникает стандартный вопрос: как увеличить число моделей и на основе их изучения попытаться глубже понять структуру асимптотической теории оценивания. Систематическое исследование этого вопроса было предпринято Ибрагимовым и Хасьминским (1981). Для широкого класса нерегулярных статистических экспериментов они нашли задание предельного распределения нормированного отношения правдоподобия и изучили предельное поведение байесовских оценок и оценок мак-

Работа поддержана грантом РФФИ 99-01-00111.

симума правдоподобия. Отметим, что их работам предшествовали исследования Чернова и Рубина (1965), П. Рао (1968) и др. (см. Ибрагимов и Хасьминский (1981)). В наших работах (см. Ермаков (1980), (1988), (1989)) нами предложена одна из интерпретаций результатов Ибрагимова и Хасьминского.

Используя тот факт, что для асимптотической модели, соответствующей регулярным статистическим экспериментам, задача сводится к оцениванию параметра сдвига гауссовского случайного вектора, и, таким образом, имеет естественную достаточную статистику ввиде выборочного среднего. Ле Кам ввел понятие асимптотической достаточности и на этой основе предложил содержательную интерпретацию задач асимптотически эффективных статистических выводов. Нам удалось найти аналогичную интерпретацию для статистических экспериментов, не удовлетворяющих условиям регулярности. Предельные модели статистических выводов рассматриваются как задачи оценивания параметра сдвига некоторых автомодельных случайных мер, что позволяет также ввести понятие асимптотической достаточности для нерегулярных статистических экспериментов. В наших публикациях (1988), (1989) также доказано, что для любых двух асимптотически эффективных последовательностей оценок нормированная разность этих оценок стремится к нулю при увеличении объема выборки. Таким образом оказалось, что регулярные и нерегулярные статистические эксперименты обладают целым рядом неожиданных общих свойств и самые глубокие понятия теории Гайека-Ле Кама допускают распространение и на нерегулярные статистические эксперименты.

В работах (1988), (1989) нами также изучалась структура асимптотически эффективных планов последовательного оценивания. В этих работах была доказана асимптотическая эффективность эквивариантных планов последовательного оценивания и найдено их предельное распределение. Интерес к данному вопросу был во многом вызван тем фактом, что для нерегулярных статистических экспериментов последовательное оценивание имеет существенное преимущество по сравнению с оцениванием с фиксированным объемом выборки (см. Ибрагимов и Хасьминский (1974) и Ермаков (1977), (1980), (1989)).

Данная работа может рассматриваться как продолжение наших статей (1988), (1989). В ней мы доказываем асимптотическую эффективность байесовских планов последовательного оценивания. Укажем условия, при которых будет доказан данный результат.

Предположения о виде плотности

Мы ограничимся случаем последовательного оценивания неизвестного параметра сдвига. Будем предполагать, что плотность $f(x)$ удовлетворяет тем же самым условиям, что и в монографии Ибрагимова и Хасьминского (1981) гл. V, VI или Ермакова (1988), (1989). Для облегчения понимания мы приведем их при некоторых несущественных дополнительных ограничениях на гладкость плотности.

Пусть $X_1, X_2, \dots$ последовательность независимых случайных величин, имеющих функцию распределения $F(x-\theta_0)$, $x \in R^1$, $\theta_0 \in R^1$, где параметр θ_0 неизвестен. Предположим, что $F(x)$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега и имеет плотность распределения $f(x)$.

Допустим также, что плотность $f(x)$ не является гладкой в некоторых точках $x_1, \dots, x_e$, называемых особенностями. В некоторой окрестности особенностей $x_1, \dots, x_{e_1}, \dots, x_e$ плотность $f(x)$ допускает следующее представление

$$f(x) = \begin{cases} p(x)\,|x-x_i|^{\alpha}, & x < x_i, \\ q(x)\,|x-x_i|^{\alpha}, & x > x_i, \end{cases}$$

для $1 \leqslant i \leqslant e_1$, $-1 < \alpha < 1$ и

$$f(x) = \begin{cases} h_j(x)\exp\{a_j(x)\,|x-x_j|^{\beta}\}, & x < x_j, \\ h_j(x)\exp\{b_j(x)\,|x-x_j|^{\beta}\}, & x > x_j, \end{cases}$$

для $e_1 < j \leqslant e$, $\beta = \alpha/2$, $0 < \alpha < 1$.

Значение α является общим для всех особенностей. Если $\alpha \leqslant 0$, то мы полагаем $e = e_1$. Функции p_i, q_j, h_j, a_j, b_j непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности особенностей x_i, x_j, $1 \leqslant i \leqslant e_1$, $e_1 < j \leqslant e$ и $h_j(x_j) > 0$, $|a_j(x_j)| + |b_j(x_j)| > 0$, $p_i(x_i) + q_i(x_i) > 0$. Если $\alpha = 0$, то $p_i(x_i) \neq q_i(x_i)$ для $1 \leqslant i \leqslant e$.

Существует $\lambda > 1+\alpha$ такоя, что для всякой окрестности G точек $x_1, \dots, x_e$ имеет место

$$\int\limits_{\bar G} \left| f^{1/\lambda}(x-u) - f^{1/\lambda}(x) \right|^{\lambda} dx = \mathrm{O}\left(|u|^{\lambda}\right) \tag{1}$$

при $u \to 0$. Здесь $\bar{G}$ обозначает дополнение множества G.

Предположим также, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|^{\delta} f(x)dx < \infty$$

для некоторого $\delta > 0$.

Более слабые условия на гладкость функций a_j, b_j, h_j, p_i, q_i можно найти в монографии Ибрагимова и Хасьминского (1981).

Заметим, что условие (1) позволяет плотности $f(x)$ не быть гладкой не только в точках особенностей.

Как уже говорилось, в работе изучается асимптотическое поведение байесовских планов последовательного оценивания. Мы будем предполагать, что априорная плотность $\pi(\theta)$ непрерывная ограниченная функция,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \pi(\theta)d\theta = 1$$

и $\pi(\theta) \neq 0$ для всех $\theta \in R^1$.

Основные определения

Мы постараемся сохранить основные обозначения и определения наших предыдущих работ (см. Ермаков (1988), (1989)) и монографии Ибрагимова и Хасьминского (1981). Результаты этих работ и монографии будут использоваться в существенной мере.

Пусть $V_k = V_k(X_1, \ldots, X_k)$ последовательность оценок и τ момент остановки. Пара $[V_k, \tau]$ называется планом последовательного оценивания. На его основе мы берем в качестве оценки неизвестного параметра значение статистики V_τ. В качестве функции потерь возьмем $|V_\tau - \theta|^a + c\tau$, где $a \geq 1$, $c > 0$ некоторые постоянные. Если задача последовательного оценивания будет рассматриваться при дополнительном условии $E\tau < b$, $b > 0$, то в качестве функции потерь будем брать $|V_\tau - \theta|^a$.

Назовем последовательность планов последовательного оценивания $[V_k^n, \tau_n]$ локально асимптотически минимаксной (эффективной) в точке θ_0, если $E_{\theta_0}\tau_n \to \infty$ при $n \to \infty$ и для всякой последовательности планов $[W_k^n, \eta_n]$ такой, что

$$\lim_{\delta\to 0}\lim_{n\to\infty}\sup_{|\theta-\theta_0|<\delta} E_\theta\tau_n\left(\sup_{|\theta-\theta_0|<\delta} E_\theta\eta_n\right)^{-1}\geq 1,$$

имеет место

$$\lim_{\delta\to 0}\lim_{n\to\infty}\sup_{|\theta-\theta_0|<\delta} E_\theta\left|W_{\eta_n}^n-\theta\right|^a\left(\sup_{|\theta-\theta_0|<\delta} E_\theta\left|V_{\eta_n}^n-\theta\right|^a\right)^{-1}\geq 1.$$

Скажем, что план последовательного оценивания является байесовским $[S_k^c, \kappa_c]$ для априорной плотности $\pi(\theta)$, если

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\pi(\theta)E_\theta\left\{\left|S_{\kappa_c}^c-\theta\right|^a+c\kappa_c\right\}d\theta\leqslant\int\limits_{-\infty}^{\infty}\pi(\theta)E_\theta\left\{|W_\kappa-\theta|^a+c\kappa\right\}d\theta$$

для всех планов последовательного оценивания $[W_k, \kappa]$.

Обозначим Φ множество всех планов байесовского последовательного оценивания $[S_k^c, \kappa_c]$, $c>0$. Зададим множество H всех планов последовательного оценивания $[U_k, \tau]$ таких, что для любого плана $[W_k, \gamma]$ имеет место

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\pi(\theta)E_\theta|W_\gamma-\theta|^a d\theta\geq\int\limits_{-\infty}^{\infty}\pi(\theta)E_\theta|U_\tau-\theta|^a d\theta$$

и

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\pi(\theta)E_\theta\gamma d\theta<\int\limits_{-\infty}^{\infty}\pi(\theta)E_\theta\tau d\theta.$$

Хорошо известно, что $H=\Phi$.

План последовательного оценивания $[V_k, \eta]$ называется эквивариантным, если $V_k(X_1+b,\ldots,X_k+b)=V_k(X_1,\ldots,X_k)+b$, $\eta(X_1+b,X_2+b,\ldots)=\eta(X_1,X_2,\ldots)$ для каждого вещественного b с вероятностью единица.

Эквивариантный план последовательного оценивания $[T_k, \sigma]$ называется оптимальным, если для любого эквивариантного плана последовательного оценивания $[V_k, \gamma]$ такого, что $E\gamma<E\sigma$, имеет место $E_\theta|T_\sigma-\theta|^a\leqslant E_\theta|V_\gamma-\theta|^a$.

Оптимальный эквивариантный план последовательного оценивания $[T_k, \sigma]$, для которого $E\sigma=n$, будет обозначаться $[T_k, \sigma_n]$.

Обозначим A множество всех оптимальных эквивариантных планов последовательного оценивания.

Зададим множество $\Re$ всех эквивариантных планов последовательного оценивания $[T_k^c, \sigma_c]$, $c > 0$, обладающих следующим свойством. План $[T_k^c, \sigma_c]$ минимизирует значение E_θ $(|V_\gamma - \theta|^a + c\gamma)$ в классе всех эквивариантных планов последовательного оценивания $[V_k, \gamma]$. Аналогично байесовскому случаю имеем $A = \Re$.

Нами будут использоваться также следующие обозначения.

Мы будем обозначать b, B положительные постоянные, чьи значения могут меняться даже в пределах одной формулы. Если ясно из контекста, то для упрощения символики мы будем опускать индекс n, Например, $S_{\tau_n}^n = S_\tau^n = S_{\tau_n}$. Для любого вещественного числа x будем обозначать $[x]$ его целую часть. Опять таки для простоты обозначений предположим, что $\theta_0 = 0$. Обычно мы будем опускать индекс θ_0 в символах $E_{\theta_0}(\cdot) = E(\cdot)$ и $P_{\theta_0}(\cdot) = P(\cdot)$. Для любого события Ω будем обозначать $\chi(\Omega)$ индикатор этого события.

Основные Результаты

Теорема 1. *Пусть $[S_k^c, \kappa_c]$, и $[T_k^c, \sigma_c]$, $c > 0$, соответственно семейства байесовских и эквивариантных планов последовательного оценивания. Пусть $[R_k^n, \zeta_n]$ произвольная последовательность планов последовательного оценивания такая, что*

$$\limsup_{\delta\to 0}\limsup_{n\to\infty}(2\delta)^{-1}\int_{-\delta}^{\delta} E_\theta \xi_n \, d\theta = \infty.$$

Тогда справедливы следующие три утверждения.

1. $\left(S_{\kappa_c}^c - T_{\sigma_c}^c\right)(E_{\sigma_c})^\varphi \xrightarrow{P} 0$, $(\sigma_c - \kappa_c)/E\sigma_c \xrightarrow{P} 0$ *при* $c \to 0$.

2. *Пусть $c_n > 0$ такая последовательность вещественных чисел, что*

$$\limsup_{\delta\to 0}\limsup_{n\to\infty}\frac{\int_{-\delta}^{\delta} E_\theta \xi_n \, d\theta}{\int_{-\delta}^{\delta} E_\theta \kappa_{c_n} \, d\theta} \leqslant 1.$$

Тогда

$$\limsup_{\delta\to 0}\limsup_{n\to\infty}\frac{\int_{-\delta}^{\delta} E_\theta \left|S_{\tau_n}^c - \theta\right|^a d\theta}{\int_{-\delta}^{\delta} E_\theta \left|R_{\xi_n}^n - \theta\right|^a d\theta} \leqslant 1, \qquad (2)$$

где $\tau_n = \kappa_{c_n}$.

Если левая часть (2) *равна единице, то*

$$\lim_{\delta\to 0}\limsup_{n\to\infty}\frac{\int_{-\delta}^{\delta} E_\theta \left|S^c_{\tau_n} - R^n_{\xi_n}\right|^a d\theta}{\int_{-\delta}^{\delta} E_\theta \left|S^{c_n}_{\tau_n} - \theta\right|^a d\theta} = 0, \qquad (3)$$

$$\lim_{\delta\to 0}\limsup_{n\to\infty}\frac{\int_{-\delta}^{\delta} E_\theta|\tau_n - \xi_n| d\theta}{\int_{-\delta}^{\delta} E_\theta \tau_n d\theta} = 0. \qquad (4)$$

3. *Предположим, что*

$$A. \quad \limsup_{v\to 0}\sup_{\theta\in\Re^1} \pi(\theta+v)/\pi(\theta) < \infty.$$

Тогда последовательность байесовских планов последовательного оценивания $[S^c_k, \kappa_c]$, $c>0$ *является локально асимптотически минимаксной.*

Замечание 1. Как следствие первого утверждения Теоремы 1 и наших предыдущих результатов (см. Ермаков (1988), (1989)) мы получаем, что предельное распределение последовательностей байесовских планов последовательного оценивания совпадает с предельным распределением локально асимптотически минимаксных планов последовательного оценивания. Их предельное распределение указано в нашей работе (1989).

Замечание 2. Утверждение Теоремы 1 справедливо также и для задачи последовательного оценивания параметра сдвига в случае регулярных статистических экспериментов. Естественно при этом надо предположить выполнение других условий, а именно условий Теоремы 3.2.1 монографии Ибрагимова и Хасьминского (1981).

Доказательство Теоремы 1. Для упрощения обозначений доказательство будет дано для последовательности c_n, такой что $E\tau_n = n$, где $\tau_n = \kappa_{c_n}$.

План доказательства следующий. Сначала будет доказано второе утверждение Теоремы 1 (см. Лемма 1). Лемма 2 содержит несколько неожиданную оценку байесовского риска последовательных планов оценивания, позволяющую существенно упростить доказательство. Лемма 3 содержит аналоги первого и третьего утверждений Теоремы 1 для класса последовательностей планов последовательного оценивания, имеющих моменты остановки γ_n, удовлетворяющие условию $\gamma_n > \varepsilon n$, $\varepsilon > 0$. Ее доказательство базируется на Леммах 4 и 5. В Лемме 4 мы показываем, что нормированные разности эквивариантных и байесовских рисков стремятся к нулю при $n \to \infty$. В Лемме 5 аналогичные результаты доказаны для апостериорных условных математических ожиданий эквивариантных и байесовских рисков. Таким образом задача сводится к аналогичной задаче для эквивариантных планов последовательного оценивания, рассмотренной в нашей предыдущей работе (см. Ермаков (1989)). В Леммах 6, 8 мы доказываем, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{n \to \infty} n^{a\varphi} E \left|S_{\tau_n}\right|^a \chi(\tau_n < \varepsilon n) = 0, \tag{5}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{n \to \infty} P(\tau_n < \varepsilon n) = 0. \tag{6}$$

Основная трудность доказательства (5) состоит в том, что мы не можем непосредственно применить асимптотические методы для оценивания $n^{a\varphi} E \left|S_{\tau_n}\right|^a \chi(\tau_n < b)$, $b > 0$. Как следствие мы были вынуждены разработать специальную довольно сложную аналитическую технику для оценивания этого слагаемого. Из Лемм 3, 6, 8 сразу получаем первое и третье утверждение Теоремы 1.

Доказательство Теоремы 1 использует последовательный аналог аналитической техники, развитой Ибрагимовым и Хасьминским (1981), гл. 1–5 для исследования асимптотического поведения байесовских оценок и оценок максимума правдоподобия. Основные оценки, которые позволяют применять такую технику, доказаны у Ермакова (1989), Леммы 1–3. Эти оценки аналогичны оценкам для оценивания с фиксированным объемом выборки монографии Ибрагимова и Хасьминского (1981), гл. 1–5. Нами также используются мартингальные свойства отношения правдоподобия и апостериорных рисков.

Во всех Леммах мы предполагаем, что выполнены условия Теоремы 1. Поэтому мы их не будем оговаривать специально.

Лемма 1. *Справедливо утверждение* II *Теоремы* 1.

Доказательство. Имеем

$$\limsup_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \pi(v) E_v \left(n^{a\varphi} \left|S_{\tau_n} - v\right|^a + c_n \tau_n - n^{a\varphi} \left|T_{\sigma_n} - v\right|^a - c_n \sigma_n\right) \leqslant 0. \tag{7}$$

Используя аналитическую технику, аналогичную доказательству (10) у Ермакова (1989), имеем

$$\limsup_{\delta\to 0}\limsup_{n\to\infty}(2\delta)^{-1}\int\limits_{\theta-\delta}^{\theta+\delta} dvE_v\,(n^{a\varphi}\,|W_{\gamma_n}-v|^a+c_n\gamma_n-$$
$$n^{a\varphi}\,|T_{\sigma_n}-v|^a-c_n\sigma_n)\geqslant 0 \qquad (8)$$

для любой последовательности планов последовательного оценивания $[W_k^n,\gamma_n]$ и $\theta\in R^1$.

Так как θ является параметром сдвига, из (8) следует, что существует последовательность $\delta_n\to 0$ при $n\to\infty$ такая, что

$$(2\delta_n)^{-1}\int\limits_{\theta-\delta_n}^{\theta+\delta_n} dvE_v\,(n^{a\varphi}\,|W_{\gamma_n}-v|^a+c_n\gamma_n-n^{a\varphi}\,|T_{\sigma_n}-v|^a-c_n\sigma_n)\geqslant b_n$$

равномерно по $\theta\in R^1$, $0<\delta_n<\delta_0$.

Отсюда, используя (7), получаем, что существует такая последовательность $\theta_n\to 0$ при $n\to\infty$, что

$$\lim_{\delta\to 0}\limsup_{n\to\infty}(2\delta)^{-1}\int\limits_{\theta_n-\delta}^{\theta_n+\delta} dvE_v\,(n^{a\varphi}\,|S_{\tau_n}-v|^a+c_n\tau_n-$$
$$n^{a\varphi}\,|T_{\sigma_n}-v|^a-c_n\sigma_n)=0.$$

Это означает

$$\lim_{\delta\to 0}\limsup_{n\to\infty}(2\delta)^{-1}\int\limits_{-\delta}^{\delta} dvE_v\,(n^{a\varphi}\,|S_{\tau_n}-v|^a+c_n\tau_n-$$
$$n^{a\varphi}\,|T_{\sigma_n}-v|^a-c_n\sigma_n)=0. \qquad (9)$$

Пусть $[U_k,\xi_n]$ последовательность байесовских планов последовательного оценивания, имеющая априорные плотности $(2\delta_n)^{-1}$ $\chi(v\in(-\delta_n,\,\delta_n))$, где $\delta_n\to 0$, $n^\varphi\delta_n\to\infty$ при $n\to\infty$. Используя те же методы, что и при доказательстве (10) у Ермакова (1989), получаем

$$\lim_{n\to\infty}(2\delta_n)^{-1}\int\limits_{-\delta_n}^{\delta_n} dvE_v\,(n^{a\varphi}\,|U_{\xi_n}-v|^a+c_n\xi_n-$$

$$-n^{a\varphi}\left|T_{\sigma_n}-v\right|^a-c_n\sigma_n)=0.$$

Следовательно

$$\lim_{n\to\infty}(2\delta_n)^{-1}\int\limits_{-\delta_n}^{\delta_n}dvE_v\left(n^{a\varphi}\left|S_{\tau_n}-v\right|^a+c_n\tau_n-\right.$$

$$\left.-n^{a\varphi}\left|U_{\xi_n}-v\right|^a-c_n\xi_n\right)=0. \tag{10}$$

Из (10) легко получается (3),(4). Доказательство этого аналогично доказательству Теоремы 1 у Ермакова (1988). Основное различие в доказательствах состоит в том, что соображения типа эквивариантности заменяются аргументами типа байесовости. Мы опустим это доказательство.

Для любого k и $u\in R^1$ положим

$$Z_n(u,k)=\prod_{j=1}^{k}\frac{f(X_j-u\,n^{-\varphi})}{f(X_j)},$$

$$p_n(u,k)=\frac{Z_n(u,k)}{\int_{-\infty}^{\infty}Z_n(u,k)\,du},$$

$$q_n(u,k)=\frac{Z_n(u,k)\pi_n(u)}{\int_{-\infty}^{\infty}Z_n(u,k)\pi_n(u)\,du},$$

где $\pi_n(u)=\pi(u\,n^{-\varphi})$.

Определим σ-алгебру $\Im_k$ порожденную случайными величинами $X_1,\ldots,X_k$. Обозначим

$$R_\pi(i_n)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}q_n(u,i_n)E_{u\,n^{-\varphi}}\left(n^{a\varphi}\left|S^c_{\tau_n}-\theta\right|^a+c_n\tau_n\middle|\Im_{i_n}\right),$$

$$R(i_n)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}p_n(u,i_n)E_{u\,n^{-\varphi}}\left(n^{a\varphi}\left|T_{\sigma_n}-\theta\right|^a+c_n\sigma_n\middle|\Im_{i_n}\right)$$

Лемма 2. *Существует такая постоянная $\tau > 0$, что для любой последовательности i_n*

$$R_\pi(i_n) < \tau + c_n i_n.$$

Доказательство. Так как $[T_k, \sigma_n]$ является планом минимаксного последовательного оценивания, то

$$R_\pi(i_n) \leqslant c_n i_n +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} q_n(u, i_n) E_{u\,n^{-\varphi}} \left(n^{a\varphi} \left| T^c_{\sigma_n} - u\,n^{-\varphi} \right|^a + c_n(\sigma_n - i_n) \middle| \Im_{i_n} \right) du \leqslant$$

$$\leqslant c_n i_n + \int_{-\infty}^{\infty} q_n(u, i_n) E_{u\,n^{-\varphi}} \left(n^{a\varphi} \left| T^c_{\sigma_n} - u\,n^{-\varphi} \right|^a + c_n \sigma_n \right) du \leqslant c_n i_n + \tau.$$

Для любого $\varepsilon > 0$ определим моменты остановки $\zeta_n = \max\{\sigma_n, [\varepsilon\, n]\}$ и $\eta_n = \max\{\tau_n, [\varepsilon\, n]\}$. Обозначим $s_k(\pi) = s_k = n^\varphi S_k$, $\ell_k = n^\varphi T_k$.

Лемма 3.

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{n \to \infty} E \left| \ell_{\zeta_n} - s_{\eta_n} \right|^a = 0$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{n \to \infty} n^{-1} E \left| \zeta_n - \eta_n \right| = 0.$$

Доказательство. Рассуждая аналогично доказательству Леммы 4 у Ермакова (1989), получаем

$$\lim_{n \to \infty} E \left| s_{\eta_n} \right|^a < \infty, \qquad \lim_{n \to \infty} E \left| \ell_{\zeta_n} \right|^a < \infty. \tag{11}$$

Следовательно достаточно доказать, что $\left| s_{\eta_n} - \ell_{\zeta_n} \right| \to_P 0$, $n^{-1} \left| \eta_n - \zeta_n \right| \to_P 0$ при $n \to \infty$.

Для любого k обозначим

$$\triangle_n(k) = \inf_t \int_{-\infty}^{\infty} |t - u|^a p_n(u, k)\, du\,,$$

$$\triangle_{n\pi}(k) = \inf_t \int_{-\infty}^{\infty} |t - u|^a q_n(u, k)\, du.$$

Дальнейшие рассуждения будут базироваться на следующих двух леммах.

Лемма 4. *Для любого $\varepsilon > 0$ и любой последовательности моментов остановки $\gamma_n > \varepsilon n$*

$$\lim_{n\to\infty} E\left|\triangle_{n\pi}(\gamma_n) - \triangle_n(\gamma_n)\right| = 0, \tag{12}$$

$$\lim_{n\to\infty} E\left|\ell_{\gamma_n} - s_{\gamma_n}\right|^a = 0. \tag{13}$$

Доказательство (12), (13) базируется на Леммах 1–3 у Ермакова (1989). Данные Леммы позволяют создать последовательный аналог техники, развитой Ибрагимовым и Хасьминским (1981) в гл. 1–5. Доказательство легко получается используя данную технику и будет опущено.

Лемма 5. *$R_\pi(\eta_n) - R(\eta_n) \to_P 0$ при $n \to \infty$.*

Завершим доказательство Леммы 3, а затем докажем Лемму 5.

Из Леммы 5 и (12) следует что

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\triangle_n(\eta_n) + c_n\eta_n - \triangle_n(\zeta_n) - c_n\zeta_n\right) = 0. \tag{14}$$

Согласно Замечанию к Лемме 8 у Ермакова (1988) из (14) следует

$$\left|\ell_{\zeta_n} - \ell_{\eta_n}\right| \to_P 0, \qquad \left|\zeta_n - \eta_n\right|(E\zeta_n)^{-1} \to_P 0 \tag{15}$$

при $n \to \infty$.

Из (11), (13), (15) следует Лемма 3.

Доказательство Леммы 5. Предположим, что $R_\pi(\eta_n) \leqslant R(\eta_n)$. Если $R_\pi(\eta_n) \geqslant R(\eta_n)$, то доказательство аналогично и будет опущено.

Определим момент остановки ξ_n, $\xi_n \geqslant \eta_n$, такой что

$$R_\pi(\eta_n) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} q_n(v, \eta_n) E_{Vn^{-\varphi}} \left\{ \left|s_{\xi_n} - v\right|^a + c_n\xi_n \,\middle|\, \Im_{\eta_n} \right\} dv.$$

Тогда

$$\left|R_\pi(\eta_n) - R(\eta_n)\right| \leqslant \left|K_1 - K_2\right|, \tag{16}$$

где

$$K_1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} L_1(v)\,dv\,, \qquad K_2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} L_2(v)\,dv\,,$$

$$L_1(v) = q_n(v,\eta_n) E_{Vn^{-\varphi}} \triangle_{n\pi}(\xi_n)\,,$$

$$L_2(v) = p_n(v,\eta_n) E_{Vn^{-\varphi}} \triangle_{n}(\xi_n)\,.$$

Зададим последовательность A_n такую, что $A_n \to \infty$, $A_n n^{-\varphi} \to 0$ при $n \to \infty$.

Для $i = 1, 2$ запишем $K_i = I_{i1} + I_{i2}$, где

$$I_{i1} = \int_{-A_n}^{A_n} L_i(v)\,dv\,, \qquad I_{i2} = \int_{|V|>A_n} L_i(v)\,dv\,.$$

Определим последовательность оценок U_k такую, что $U_k\,(X_1,\ldots,X_k) = 0$ для всех выборок $X_1,\ldots,X_k$.

Имеем

$$\begin{aligned} I_{12} &\leqslant \int_{|v|>A_n} p_n(v,\eta_n) E_{vn^{-\varphi}} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |U_{\xi_n} - u|^a\, p_n(u,\xi_n)\,du \middle| \Im_{\eta_n} \right\} \\ &\leqslant \int_{|v|>A_n} p_n(v,\eta_n) \left\{ A_n^a + E_{vn^{-\varphi}} \left\{ \int_{|u|>A_n} |u|^a p_n(u,\xi_n)\,du \middle| \Im_{\eta_n} \right\} \right\} \\ &\leqslant \int_{|V|>A_n} (|V|^a + A_n^a)\, p_n(V,\eta_n)\,dv. \end{aligned} \tag{17}$$

Обозначим

$$Q_{1n} = \int_{|U|>A_n} |\ell_{\xi_n} - u|^a p_n(u,\xi_n)\,du\,,$$

$$Q_{2n} = \int_{|U|>A_n} |s_{\xi_n} - u|^a q_n(u,\xi_n)\,du.$$

Для $i = 1, 2$ запишем $I_{i1} = H_{i1} + H_{i2}$, $H_{11} = J_{11} + J_{12}$, где

$$J_{11} = \int_{-A_n}^{A_n} p_n(v,\eta_n) E_{v\,n^{-\varphi}} \{ Q_{1n} \chi(|\ell_{\xi_n}| < 2\,A_n) | \Im_{\eta_n} \}\,dv\,,$$

$$J_{12} = \int_{-A_n}^{A_n} p_n(v,\eta_n) E_{v\,n^{-\varphi}} \{ Q_{1n} \chi(|\ell_{\xi_n}| > 2\,A_n) | \Im_{\eta_n} \}\,dv\,,$$

$$H_{21} = \int\limits_{-A_n}^{A_n} q_n(v, \eta_n) E_{v\,n-\varphi} \{Q_{2n} | \Im_{\eta_n}\} \, dv \, .$$

Меняя порядки интегрирования и рассуждая аналогично (17), получаем

$$J_{11} < b \int\limits_{|u|>A_n} (|u|^a + A_n^a) \, p_n(u, \eta_n) \, du. \tag{18}$$

Предположим, что $\ell_{\xi_n} > 2\,A_n$. Тогда $|\ell_{\xi_n} - u|^a < |u|^a$, если $u > A_n$. Оценки T_k удовлетворяют уравнению

$$\int\limits_{u>\ell_k} |\ell_k - u|^{a-1} p_n(u, k) \, du = \int\limits_{u<\ell_k} |\ell_k - u|^{a-1} p_n(u, k) \, du. \tag{19}$$

Следовательно

$$\int\limits_{-u>A_n} |\ell_{\xi_n} - u|^a Z_n(u, \xi_n) \, du \leqslant 2^a (N_1 + N_2), \tag{20}$$

где

$$N_1 = \int\limits_{-u>A_n} |u|^a Z_n(u, \xi_n) \, du,$$

$$N_2 = |\ell_{\xi_n}|^a \int\limits_{-u>A_n} Z_n(u, \xi_n) \, du.$$

Используя (12) и

$$|\ell_{\xi_n}|^{a-1} \int\limits_{-u>A_n} Z_n(u, \xi_n) \, du \leqslant \int\limits_{-u>A_n} |\ell_{\xi_n} - u|^{a-1} Z_n(u, \xi_n) \, du,$$

получаем

$$2^a (N_1 + N_2) \leqslant 2^a N_1 + 2^a |\ell_{\xi_n}| \int\limits_{u>\ell_{\xi_n}} |\ell_{\xi_n} - u|^{a-1} Z_n(u, \xi_n) \, du \leqslant$$

$$2^a \int\limits_{u>A_n} |u|^a Z_n(u, \xi_n) \, du. \tag{21}$$

Легко видеть, что аналогичные оценки имеют место, если $\ell_{\xi_n} < -2A_n$. Оценка H_{21} аналогична H_{11} и опускается. Остается оценить $H_{12} - H_{22}$. Согласно Лемме 1 имеем

$$\int\limits_{|v|<A_n} |q_n(v,\eta_n) - p_n(v,\eta_n)|\, dv E_{v\,n-\varphi} \times$$
$$\times \left\{ \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\ell_{\xi_n} - u|^a p_n(u,\xi_n)\, du \middle| \Im_{\eta_n} \right\} \leqslant$$
$$b \sup\{|\pi_n(u) - \pi_n(0)|, |u| < A_n\} + b \int\limits_{|u|>A_n} p_n(u,\eta_n)\, du. \tag{22}$$

В дальнейшем, чтобы упростить обозначения, мы предположим, что $\pi_n(0) = 1$. Это не вызовет каких либо серьезных отличий в доказательстве.

Остается оценить

$$B_{1\,n} = \int\limits_{-A_n}^{A_n} p_n(v,\eta_n)\, dv\, E_0\{G_1 - M | \Im_{\eta_n}\},$$
$$B_{2\,n} = \int\limits_{-A_n}^{A_n} p_n(v,\eta_n)\, dv\, E_0\{M - G_2 | \Im_{\eta_n}\},$$

где

$$G_1 = \int\limits_{-A_n}^{A_n} |s_{\xi_n} - u|^a\, q_n(u,\xi_n)\, du$$
$$G_2 = \int\limits_{-A_n}^{A_n} |\ell_{\xi_n} - u|^a\, p_n(u,\xi_n)\, du$$
$$M = \int\limits_{-A_n}^{A_n} |s_{\xi_n} - u|^a\, p_n(u,\xi_n)\, du.$$

Согласно Лемме 1 $G_1 < b$. Существует такая последовательность $\delta_n > 0$ при $n \to \infty$, что $\sup\{|\pi_n(u) - 1| : |u| < A_n\} < \delta_n$. Следовательно

$$|B_{1\,n}| < \delta_n r +$$

$$+\int\limits_{-A_n}^{A_n} p_n v, \eta_n \, dv E_{v\,n-\varphi}\left\{G_1\int\limits_{-\infty}^{\infty} p_n(u,\xi_n)|\pi_n(u)-1|\,du\middle|\Im_{\eta_n}\right\}\leqslant$$

$$\delta_n r+(1+\delta_n)r\delta_n+(1+\delta_n)rb\times$$

$$\times\int\limits_{-A_n}^{A_n} p_n(v,\eta_n)E_{v\,n-\varphi}\left\{\int\limits_{|u|>A_n} p_n(u,\xi_n)\,du\middle|\Im_{\eta_n}\right\}\leqslant$$

$$3r\delta_n+2rb\int\limits_{|u|>A_n} p_n(u,\eta_n)\,du. \tag{23}$$

В (23) при доказательстве последнего неравенства мы поменяли порядки интегрирования.

Определим события $C_1 = \{X_1,\ldots,X_{\xi_n} : |s_{\xi_n}| > b_{1n}\}$, $C_2 = \{X_1,\ldots,X_{\xi_n} : |\ell_{\xi_n}| > b_{2n}\}$, $\bar{C}_3 = C_1\cup C_2$. Обозначим C_3 дополнение события $\bar{C}_3$.

Имеем $B_2 = D(C_2)+D(C_1\setminus C_2)+D(C_3)$, где

$$D(\Omega)=\int\limits_{-A_n}^{A_n} p_n(v,k)E_{v\,n-\varphi}\times$$

$$\times\left\{\int\limits_{-A_n}^{A_n}(|\ell_{\xi_n}-u|^a-|s_{\xi_n}-u|^a)\,p_n(u,\xi_n)\,du\chi(\Omega)\middle|\Im_{\xi_n}\right\}dv$$

для любого события Ω.

Изучим асимптотику $D(C_2)$, $D(C_2\setminus C_3)$, $D(C_3)$, когда $b_{1\,n}$, $b_{2\,n}$ принимают большие значения.

Имеем

$$D(C_2)\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{-A_n}^{A_n} p_n(v,\eta_n)E_{v\,n-\varphi}\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\ell_{\xi_n}-u|^a\,p_n(u,\xi_n)\,du\,\chi(C_2)\middle|\Im_{\eta_n}\right\}dv\leqslant$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} p_n(v,\eta_n)E_{v\,n-\varphi}\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty}|u|^a p_n(u,\xi_n)\,du\chi(C_2)\middle|\Im_{\eta_n}\right\}dv, \tag{24}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} p_n(v,\eta_n) E^{1/2}_{v\,n-\varphi}\left\{\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} |u|^a p_n(u,\xi_n)\,du\right)^2 \,\middle|\, \Im_{\eta_n}\right\}\times$$

$$\times E^{1/2}_{v\,n-\varphi}\left\{\chi(C_2)\,\middle|\,\Im_{\eta_n}\right\}\,dv \leqslant$$

$$\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} p_n(v,\eta_n) E_{v\,n-\varphi}\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty} |u|^{2a} p_n(u,\xi_n)\,du \,\middle|\, \Im_{\eta_n}\right\}\,dv\right)^{1/2}\times$$

$$\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} p_n(v,\eta_n) E_{v\,n-\varphi}\left\{\chi(C_2)\,\middle|\,\Im_{\eta_n}\right\}\,dv\right)^{1/2},$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} p_n(v,\eta_n) E_{v\,n-\varphi}\left\{\chi(C_2)\middle/ F_{\eta_n}\right\}\,dv \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{-\infty}^{\infty} p_n(v,\eta_n) E_{v\,n-\varphi}\left\{\chi(C_2)\,\middle|\,\Im_{\eta_n}\right\}\,dv \leqslant$$

$$b_{2n}^{-a}\int\limits_{-\infty}^{\infty} p_n(v,\eta_n) E_{v\,n-\varphi}\left\{|\ell_{\xi_n}-v|^a\,\middle|\,\Im_{\eta_n}\right\}\,dv \leqslant b_{2n}^{-a}\triangle_n(\eta_n)\,. \tag{25}$$

Аналогично (24), (25), получаем

$$D(C_1\setminus C_2) < b\int\limits_{-A_n}^{A_n} p_n(v,\eta_n) E_{v\,n-\varphi}\times$$

$$\times\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty} (b_2^a+|u|^a)\,p_n(u,\xi_n)\,du\chi(C_1\setminus C_2)\,\middle|\,\Im_{\eta_n}\right\}\,dv \leqslant$$

$$b\left(\int\limits_{-A_n}^{A_n} p_n(v,\eta_n) E_{v\,n-\varphi}\left\{\int\limits_{-A_n}^{A_n} (b_{2n}+|u|^a)^2\,p_n(u,\xi_n)\,du\,\middle|\,\Im_{\eta_n}\right\}\,dv\right)^{1/2}\times$$

$$\left(\int_{-A_n}^{A_n} p_n(v,\eta_n) E_{v\,n-\varphi}\left\{\chi(C_1)|\,\Im_{\eta_n}\right\}\,dv\right)^{1/2}, \tag{26}$$

$$\int_{-A_n}^{A_n} p_n(v,\eta_n) E_{v\,n-\varphi}\left\{\chi(C_1)|\,\Im_{\eta_n}\right\}\,dv \leqslant$$

$$\leqslant b\int_{-\infty}^{\infty} q_n(v,\eta_n) E_{v\,n-\varphi}\left\{\chi(C_1)|\,\Im_{\eta_n}\right\}\,dv \leqslant$$

$$b\,b_{1n}^{-a}\int_{-\infty}^{\infty} q_n(v,\eta_n) E_{v\,n-\varphi}\,|s_{\xi_n}-v|^a\,dv \leqslant b\,b_{1n}^{-a}\Delta_n\pi(\eta_n). \tag{27}$$

Согласно Лемме 1

$$\int_{-\infty}^{\infty} |s_{\xi_n}-u|^a\, Z_n(u,\xi_n)\pi_n(u)\,du < \tau^a\int_{-\infty}^{\infty} Z_n(u,\xi_n)\pi_n(u)\,du.$$

Отсюда для любого $d>1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} Z_n(u,\xi_n)\pi_n(u)\chi(D)\,du < b\,d^a\int_{-\infty}^{\infty} Z_n(u,\xi_n)\pi_n(u)\chi(D_d)\,du,$$

где $D=\{u:|s_{\xi_n}-u|<\tau\}$, $D_d=\{u:|s_{\xi_n}-u|>\tau d\}$.

Следовательно существует последовательность $\alpha_n\to 0$ при $n\to\infty$ такая, что $|s_{\xi_n}-\ell_{\xi_n}|<\alpha_n$ иф $(X_1,\dots,X_{\xi_n})\in C_3$. Отсюда имеем

$$\left|\int_{-A_n}^{A_n} p_n(v,\eta_n)\,dv\,E_{v\,n-\varphi}\left\{(G_2-M)\chi(C_3)|\,\Im_{\eta_n}\right\}\right| \leqslant$$

$$b\,\alpha_n\int_{-A_n}^{A_n} p_n(v,\eta_n)\,dv\,E_{v\,n-\varphi}\left\{\int_{-A_n}^{A_n} |s_{\xi_n}-u|^{a-1}\,p_n(u,\xi_n)\,du\,\middle|\,\Im_{\eta_n}\right\} \leqslant$$

$$b\,\alpha_n\int_{-A_n}^{A_n} p_n(v,\eta_n)\,dv\,E_{v\,n-\varphi}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} |s_{\xi_n}-u|^{a-1}\,q_n(u,\xi_n)\,du\,\middle|\,\Im_{\eta_n}\right\} \leqslant$$

$$b\,\alpha_n \int\limits_{-A_n}^{A_n} p_n(v,\eta_n)\,dv\, E_{v\,n^{-\varphi}} \times$$

$$\times \left\{ \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} |s_{\xi_n} - u|^a\, q_n(u,\xi_n)\,du \right)^{(a-1)/a} \middle| \Im_{\eta_n} \right\} < b\,\alpha_n\,\tau. \qquad (28)$$

Из (23)–(28) и Лемм 1, 3 у Ермакова (1989) получаем, что существует последовательность $b_{1n} \to \infty$, $b_{2n} \to \infty$, $b_{2n}^2 b_{1n}^{-1} \to 0$ при $n \to \infty$ такая, что $|B_{1n} + B_{2n}| \to_P 0$ при $n \to \infty$.

Отсюда и из (17), (18), (20)–(22) получаем, что $|K_1 - K_2| \to_P 0$ при $n \to \infty$. Лемма 5 доказана.

Лемма 6. *Пусть выполнено условие A. Тогда*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{n\to\infty} E\,|s_{\tau_n}|^a\, \chi(\tau_n < \varepsilon n) = 0. \qquad (29)$$

Доказательство. Определим последовательность моментов остановки $\xi_{i\,n}$ по индукции.

Обозначим $\kappa_{1n} = \min\{k : \Delta_{n\pi}(k) < 2\tau\}$. Положим $\xi_{1n} = \kappa_{1n}$, если $\kappa_{1n} < \varepsilon n$ и $\xi_{1n} = \zeta_n$ в противном случае.

Обозначим $\kappa_{i\,n} = \min\{k : \Delta_{n\pi}(k) < 2\tau,\ \left|s_{\xi_{i-1}} - s_k\right| > (n/k)^\delta,$ $k > \xi_{i-1}\}$, где $\delta = 1/(3a)$. Тогда $\xi_{i\,n} = \kappa_{i\,n}$, если $\kappa_{i\,n} < \varepsilon n$ и $\xi_{i\,n} = \zeta_n$ в противном случае.

Лемма 7. *Пусть выполнено условие A. Тогда существует последовательность $\theta_n \to 0$ при $n \to \infty$ такая, что*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty} E_{\theta_n}\left(|s_{\xi_i} - \theta_n|^a + c_n\xi_i\right)\chi(\xi_i < \varepsilon n) = 0 \qquad (30)$$

для всех i.

Доказательство. Аналогично доказательству Леммы 5 у Ермакова (1989) получаем

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty} P_\pi\left(\xi_{i\,n} < \varepsilon n\right) = 0. \qquad (31)$$

Следовательно

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty} E_\pi\left(|s_{\xi_{i\,n}} - \theta|^a + c_n\xi_{i\,n}\right)\chi(\xi_{i\,n} < \varepsilon n) = 0. \qquad (32)$$

Из (32) следует (30).

Пусть $[V_k^n, \gamma_{i\,n}]$ последовательность байесовских планов последовательного оценивания с априорной плотностью $\rho(\theta) = \pi(\theta + \theta_n)$. Тогда P_0-распределение $[V_k, \gamma_{i\,n}]$ совпадает с P_{θ_n}-распределением $[S_k - \theta_n, \xi_{i\,n}]$. Следовательно

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\limsup_{n\to\infty} E\left\{n^{a\varphi}\left|V_{\gamma_i}\right|^a + c_n\gamma_{i\,n}\right\}\chi(\gamma_{i\,n} < \varepsilon n) = 0. \tag{33}$$

Дальнейшее доказательство Леммы 7 будет базироваться на (33). Положим $m = -\left[\ln n(4\ln\varepsilon)^{-1}\right]$. Для всех $1 \leqslant k \leqslant m-1$ определим интервалы $\Psi_k = \left[\varepsilon^{4k}n, \varepsilon^{4(k-1)}n\right]$. Положим $\Psi_m = \left[d, \varepsilon^{4(m-1)}n\right]$, где $d > 0$. Пусть $t > 1$. Обозначим $\nu = [4m(a+1)(\varphi+1)(a\delta-\delta)^{-1}]$, $z_k = \varepsilon^{-4k\,t}$, $1 \leqslant k \leqslant \nu$. Имеем

$$E\left|s_{\tau_n}\right|^a\chi(\tau_n < \xi_{\nu\,n}) \leqslant \Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3 + \Lambda_4, \tag{34}$$

где

$$\Lambda_1 = E\left|s_{\tau_n}\right|^a\chi\left(\left|s_{\tau_n}\right| < \left(\frac{n}{\tau_n}\right)^\delta\right),$$

$$\Lambda_2 = \sum_{k=2}^m E\left|s_{\tau_n}\right|^a\chi\left(\left|s_{\tau_n}\right| < n^t\xi_{nu\,n}^{-t},\ \tau_n > \xi_{\nu\,n},\ \left|s_{\tau_n}\right| > 2\left|s_{\xi\,\nu}\right|\right),$$

$$\Lambda_3 = \sum_{k=2}^m E\left|s_{\tau_n}\right|^a\chi\left(\tau_n \in \Psi_k,\ s_{\tau_n} > z_k\right),$$

$$\Lambda_4 = \sum_{k=2}^m E\left|s_{\tau_n}\right|^a\chi\left(\tau_n \in \Psi_k,\ \tau_n < \xi_\nu,\ \left|s_{\tau_n}\right| > \varepsilon^{-4k\delta}\right).$$

Имеем $\Lambda_1 \leqslant \sum_{k=2}^m J_k$, где

$$J_k = E\left|s_{\tau_n}\right|^a\chi\left(\tau_n \in \Psi_k,\ \left|s_{\tau_n}\right| < b\,\varepsilon^{-4k\delta}\right).$$

Так как $\triangle_{n\pi}(\tau_n) < 2\tau$, для всякого $A > 1$ имеет место

$$\int_{-\infty}^{\infty} Z_n(u,\tau_n)\,\chi\left(\left|s_{\tau_n} - u\right| < \tau_1\right)\pi_n(u)\,du >$$

$$> b\,A^a\int_{-\infty}^{\infty} Z_n(u,\tau_n)\,\chi\left(\left|s_{\tau_n} - u\right| > A\,\tau_1\right)\pi_n(u)\,du,$$

где $\tau_1 = (2\tau)^{1/a}$.

Отсюда имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |Z_n(u,\tau_n) - Z_n(u+v,\tau_n)|\, \chi\left(|s_{\tau_n} - u| < \tau_1\right) \pi_n(u)\, du \geqslant$$

$$b\, A^a \int\limits_{-\infty}^{\infty} Z_n(u,\tau_n)\, \chi\left(|s_{\tau_n} - u| > A\, \tau_1\right) \pi_n(u)\, du, \tag{35}$$

где $v = 3\tau_1$.

Положим $h_k = \left[2\varepsilon^{-4k\delta}\tau_1^{-1}\right]$. Из (35) следует

$$J_k \leqslant \sum_{j=-h_k}^{h_k} j^a K_{1\,jk} + (K_{2k} + K_{3k}) h_k^a, \tag{36}$$

где $\tau_n \in \Psi_k$

$$K_{1\,jk} =$$

$$= P\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} |Z_n(u,\tau_n) - Z_n(u+v,\tau_n)|\, \chi\left(|j-u| < 2\tau_1\right)\, du > b\, j^a q\right),$$

$$K_{2k} = P\left(\int\limits_{0}^{\infty} Z_n(u,\tau_n)\, du < q\right),$$

$$K_{3\,k} = P\left(\int\limits_{-\infty}^{0} Z_n(u,\tau_n)\, du < q\right).$$

Здесь $q = \varepsilon^{\lambda}$, $\lambda = 4k/3$.

Используя Лемму 3 у Ермакова (1989), получаем

$$K_{1jk} < \frac{1}{j^a bq} \int\limits_{(j-1)\tau_1}^{(j+1)\tau_1} E_{un^{-\varphi}} |Z_n(u,\tau_n) - Z_n(u+v,\tau_n)| \times$$

$$\times \chi\left(\tau_n \in \Psi_k\right)\, du \leqslant \varepsilon^{4k} (j^a bq)^{-1}, \tag{37}$$

$$J_k \leqslant 2\, h_k b \varepsilon^{4k} q^{-1} + b h_k^a q^{1/2\varphi} \varepsilon^{4k} < 2\varepsilon^{\lambda}. \tag{38}$$

Из (38) следует, что

$$\Lambda_1 < B\varepsilon^{1/3} \tag{39}$$

для $n > n_0(\varepsilon)$.

Имеем

$$\Lambda_2 < b\sum_{k=2}^{m}\left(\sum_{|i|<z} i^a M_{1ik} + M_{21k}\right), \tag{40}$$

где

$$M_{1ik} = P\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} Z_n(u,\tau_n)\,\chi\left(|u-i\tau_1|<\tau_1\right)\,du > qi^a\right.,$$

$$\left.\tau_n \in \Psi_k\,,\ \tau_n > \xi_{\nu n}\,,\ |s_{\tau_n}| > 2|s_{\xi\nu}|\,\right),$$

$$M_{2ik} = \varepsilon^{-4kta} P\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} Z_n(u,\tau_n)\,du < 2q\,, \tau_n \in \Psi_k\,,\ \tau_n \geqslant \xi_{\nu n}\right).$$

Так как $E\left(Z_n(u,\tau_n)\middle| X_1,\ldots,X_{\xi_{\nu n}}\right) = Z_n\left(u,\xi_{\nu n}\right)$, используя Леммы 1–3 у Ермакова (1989), получаем

$$\sum_{|i|<z_k} i^a M_{1ik} \leqslant bq^{-1}\sum_{|i|<z_k}\sum_{t_\nu=-i}^{i} E\int\limits_{(t_\nu-2)\tau_1}^{(t_\nu+2)\tau_1} Z_n\left(u,\xi_{\nu n}\right)\,du\chi\left(\xi_{\nu n} < \varepsilon^{uk} n\right) \leqslant$$

$$bq^{-1}\sum_{|i|<z_k}\sum_{t_\nu=-i}^{i}\sum_{|t_\nu-t_{\nu-1}|>W}|t_\nu-t_{\nu-1}|^{-a} E\int\limits_{(t_\nu-2)\tau_1}^{(t_\nu+2)\tau_1} Z_n\left(u,\xi_{\nu-1}\right)\,du\,\times$$

$$\chi\left(\left|s_{\xi_{\nu-1}} - t_{\nu-1}\right| < \tau_1\,,\qquad \xi_\nu < n\varepsilon^{4k}\right) \leqslant$$

$$bq^{-1}\sum_{|i|<z_k}\sum_{t_\nu=-i}^{i}\sum_{|t_\nu-t_{\nu-1}|>W}\ldots\sum_{|t_2-t_1|>W} E\int\limits_{(t_\nu-2)\tau_1}^{(t_\nu+2)\tau_1} Z_n\left(u,\xi_1\right)\,du\,\times$$

$$\prod_{j=2}^{\nu}|t_j-t_{j-1}|^{-a} < bq^{-1}\varepsilon^{\omega k}, \tag{41}$$

где $w = b\varepsilon^{-4k\delta}$, $\omega = 4\omega(a-1)\delta - 4t$.

Используя аппарат Лемм 1–3 у Ермакова (1989), имеем также $M_{21k} < b\varepsilon^{-4k}q^{1/(2\phi)}$. Отсюда, полагая $q = \varepsilon^{\kappa}$, $\kappa = 16k(ta+1)\varphi$, получаем

$$\Lambda_2 < bq^{-1}\varepsilon^{\omega k - 4kta} + bq^{1/(2\varphi)}\varepsilon^{-4k(ta+1)} \leqslant \varepsilon^{4kta} < \varepsilon^{4k}. \qquad (42)$$

Используя оценки Лемм 1–3 у Ермакова (1989), рассуждая аналогично доказательству Теоремы 1.5.6 в монографии Ибрагимова и Хасьминского (1981), получаем

$$\Lambda_3 \leqslant \sum_{k=2}^{m} \sum_{|j|>z_k} |j|^a P\left(\tau_n \in \Psi_k\,,\ \int\limits_{|u|>j} q_n(u,\tau_n)\,du \geqslant 1/2\right) \leqslant$$

$$\leqslant b \sum_{k=2}^{m} \sum_{j>z_k} j^a \left(j\varepsilon^{-4k}\right)^{-\gamma n \varepsilon^{-4k}} < \varepsilon^4. \qquad (43)$$

Здесь значение γ тоже самое, что и в Теореме 1.5.6 у Ибрагимова и Хасьминского (1981).

Обозначим $s_k^1 = n^{\varphi}V_k$. Определим события $\Omega_k = \{\tau_n \in \Psi_k\,,\ \tau_n < \xi_{\nu n}\,,\ |s_{\tau_n}| \geqslant 2\varepsilon^{-4k\delta},\ |s_{\tau_n} - s_{\xi_i}| < \varepsilon^{-4k\delta} + b$ для некоторого $i \leqslant \nu\}$, $\pi_k = \{\tau_n \in \Psi_k\,,\ \tau_n < \xi_{\nu}\,,\ |s_{\tau_n}| > \varepsilon^{-4k\delta}$, $\Phi_k = \{\tau_n < \varepsilon n\,$, существует $i < \nu$ такое, что $|s_{\tau_n}| < 2|s_{\xi_i}|\,\}$. Имеем $\pi_k \subset \Omega_k \subset \Phi_k$. Следовательно

$$\Lambda_4 \leqslant \sum_{i=1}^{\nu} E|s_{\tau_n}|^a \chi\left(|s_{\tau_n}| < 2|s_{\xi_i}^1|\,,\ \tau_n < \varepsilon n\right) \leqslant 2^a \sum_{i=1}^{\nu} E|s_{\xi_i}^1|^a\,\chi(\xi_i < \varepsilon n). \qquad (44)$$

Из (34), (39), (42), (43), (44) следует утверждение Леммы 7.

Лемма 8.

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \limsup_{n\to\infty} P(\tau_n < \varepsilon n) = 0.$$

Доказательство. Обозначим Γ множество всех моментов остановки. Используя технику, развитую в главах 1-5 Ибрагимова и Хасьминского, легко показать, что

$$P\left(|\Delta_{n\pi}(k) - \Delta_n(k)|\,\Delta_n^{-1}(k) > \delta\right) < b\,k^{-3}$$

для всех $\delta > 0$ и $n > n_0(\delta)$, $k > n_0(\delta)$.

Следовательно для любой последовательности ε_n, $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$ имеет место

$$P(\tau_n < \varepsilon_n n) \leqslant \sup_{\xi \in \Gamma} P(\Delta_{n\pi} < \tau, \xi < \varepsilon_n n) \leqslant$$

$$\sum_{i=1}^{k} P(\Delta_{n\pi}(i) < \tau) + b\,k^{-2} + \sup_{\xi \in \Gamma} P(\Delta_n(\xi) < 2\tau, \xi < \varepsilon_n n)\,. \qquad (45)$$

Обозначим G_n правую часть (45).

Используя Лемму 6 у Ермакова (1989) легко показать, что последнее слагаемое в правой части (45) стремится к нулю при $n \to \infty$. Следовательно $G_n = o(1)$ при $n \to \infty$. Доказательство Леммы 8 завершено.

Теорема 1 доказана.

Литература

1. M. Chernoff, H. Rubin, *The estimation of the location of a discontinuity in density.* Proc. Third Berkeley Symp Math. Statist. and Probab. v. 1 (1965) p. 19–38.
2. М. С. Ермаков, *Асимптотическое поведение статистических оценок параметра многомерной разрывной плотности.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **74** (1977), 88–107.
3. М. С. Ермаков, *О свойствах некоторых случайных процессов возникающих в теории статистического оценивания.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **98** (1980), 48–60.
4. М. С. Ермаков, *Асимптотически оптимальное эквивариантное последовательное оценивание параметра сдвига негладкой плотности.* — Теория вероятн. и ее примен. **33** (1988), 323–335.
5. М. С. Ермаков, *Асимптотически эффективное эквивариантное последовательное оценивание параметра сдвига негладкой плотности.* — Теория вероятн. и ее примен. **34** (1988), 480–490.
6. J. Hajek, *A characterization of limiting distributions of regular estimates.* Z. Warhrscheinlichkeits theorie und Verw. Geb., v. 14 (1970), p. 323–330.
7. J. Hajek, *Local asymptotic minimax and admissibility in estimation.* Proc. Sixth Berkeley Symp. on Math. Statist. and Prob. Univ. california Press, v. 1 (1972), p. 175–194.
8. И. А. Ибрагимов, Р. З. Хасьминский, *О последовательном оценивании параметра сдвига разрывной плотности.* — Теория вероятн. и ее примен. **19** (1974), 700–713.
9. I. A. Ibragimov and R. Z. Hasminskii, *Statistical Estimation: Asymptotic Theory.* Springer, New York (1981).
10. L. Le Cam, *Sufficiency and asymptotic sufficiency.* — Ann. Math. Statist., **35** (1964), 1419–1455.
11. L. Le Cam, *On the assumptions used to prove asymptotic normality of maximum likelihood estimates.* — Ann. Math. Statist. **41** (1970), 802–828.

12. L. Le Cam, *Limits of experiments.* Proc. Sixth Berkeley Symp. on Math. Statist. and Probab. Univ. California Press, **1** (1972), p. 245–261.
13. L. Le Cam, *Asymptotic methods in statistical decision theory.* Springer, New York (1986).
14. B. L. S. Prakasa Rao, *Estimation of the location of the cusp of a continuous density.* — Ann. Math. Statist. **39** (1968), 76–87.

Ermakov M. S. On Bayes sequential estimation of location parameter of unsmooth density.

We consider the problem of sequential estimation of location parameter for the density having irregular behaviour in some points (discontinuities, infinite derivatives). Thus the density has no finite Fisher information. In this case the sequential estimation is usually "essentially better" then the estimation with the fixed sample size. In the paper we prove asymptotic efficiency of Bayes plans of sequential estimation and find their limit distributions.

С.-Петербургский Государственный университет

Поступило 15 февраля 1998 г.